

**KETIDAKSTABILAN TURING MODIFIKASI MODEL
LESLIE-GOWER DAN FUNGSI RESPON HOLLING
TIPE IV YANG DISEDERHANAKAN**

*TURING INSTABILITY OF MODIFIED LESLIE-GOWER MODEL
WITH SIMPLIFIED HOLLING TYPE IV FUNCTIONAL RESPONSE*



NUR SUCI RAMADHANI

H022182002

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2021**

**KETIDAKSTABILAN TURING MODIFIKASI MODEL
LESLIE-GOWER DAN FUNGSI RESPON HOLLING
TIPE IV YANG DISEDERHANAKAN**

TESIS

***Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Magister Sains
pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin***

NUR SUCI RAMADHANI

H022182002

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2021

TESIS

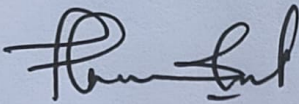
KETIDAKSTABILAN TURING MODIFIKASI MODEL LESLIE-GOWER DAN
FUNGSI RESPON HOLLING TIPE IV YANG DISEDERHANAKAN

Disusun dan diajukan oleh

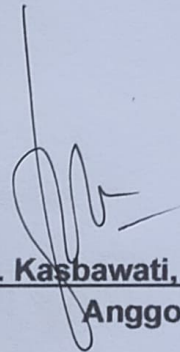
NUR SUCI RAMADHANI
Nomor Pokok H022182002

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis
Pada tanggal 02 Juli 2021
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui
Komisi Penasehat,

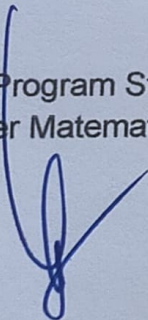


Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc
Ketua



Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si
Anggota

Ketua Program Studi
Magister Matematika,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin,



Dr. Eng. Amiruddin, M.Si

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Suci Ramadhani

NIM : H022182002

Program Studi : Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis ini merupakan karya orisinal penulis dan sepanjang pengetahuan penulis tidak memuat bahan yang pernah dipublikasi atau telah ditulis oleh orang lain dalam rangka tugas akhir untuk suatu gelar akademik di Universitas Hasanuddin atau di Lembaga Pendidikan tinggi lainnya dimanapun, kecuali bagian yang telah dikutip sesuai kaidah ilmiah yang berlaku. Penulis juga menyatakan bahwa tesis ini merupakan hasil kerja penulis sendiri dan dalam batas tertentu dibantu oleh pihak pembimbing.

Penulis



Nur Suci Ramadhani

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Ketidakstabilan Turing Modifikasi Model Leslie-Gower dan Fungsi Respon Holling Tipe IV yang Disederhanakan” dengan baik. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik karena adanya bantuan, bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc dan Dr. Kasbawati, M.Si selaku pembimbing yang senantiasa membimbing dan mengarahkan penulis. Kepada Dr. Hendra, M.Kom, Dr. Muh. Nur, M.Si dan Prof. Dr. Hasmawati, M.Si selaku penguji atas kritik dan saran selama pelaksanaan seminar. Kepada Dr. Muhammad Zakir, M.Si selaku Dosen Penasehat Akademik dan Ketua Program Studi Matematika atas segala motivasi dan bantuan yang diberikan. Terima kasih kepada Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis serta seluruh staf dan karyawan TU atas segala bantuan yang diberikan.

Terima kasih kepada suami (Syafuruddin), kedua orang Tua (M. Nurdin dan Kurnia) serta seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

Teman-teman seperjuangan Matematika 2018 atas kebersamaan selama proses perkuliahan serta semua pihak yang membantu dalam penulisan tesis ini, baik secara langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk perbaikan pada penelitian selanjutnya. Semoga tesis ini bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Makassar, 01 Juni 2021

Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keberadaan kondisi ketidakstabilan Turing pada modifikasi model Leslie-Gower menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan. Dari hasil analisis diperoleh syarat terjadinya ketidakstabilan Turing pada model tersebut. Dari hasil tersebut, ditunjukkan pola spasial dari kedua populasi dengan simulasi numerik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pola spasial yang terbentuk pada kedua populasi bergantung pada parameter-parameter model yang digunakan. Semakin tinggi tingkat kompetisi diantara individu mangsa mengakibatkan kepadatan kedua populasi mangsa dan pemangsa semakin rendah. Ketika kepadatan populasi mangsa meningkat, daya predasi populasi pemangsa berkurang. Hal ini menggambarkan bahwa kepadatan populasi pemangsa akan berkurang ketika mangsa yang tersedia tidak melimpah. Namun, ketika kepadatan mangsa meningkat, populasi pemangsa tidak dapat memaksimalkan daya predasinya karena mangsa yang berbahaya memiliki kemampuan yang lebih baik untuk mempertahankan diri dari pemangsa ketika jumlahnya cukup besar.

Kata Kunci: Sistem Mangsa Pemangsa, Model Leslie-Gower, Holling Tipe IV, Ketidakstabilan Turing, Pola Spasial.

ABSTRACT

This study aims to analyze the existence of Turing instability condition of modified Leslie-Gower predator-prey model with simplified Holling type IV functional response. The sufficient conditions for Turing instability in the model are obtained. Based on this, we perform the spatial pattern via numerical simulation. The obtained results show that the spatial pattern formed in both populations prey and predator depend on the model parameters. The higher competition between individual prey, the lower density of both prey and predator population. When the population density of prey increases, predation of predator population decreases. This illustrates that the predator population density will decrease when the available prey is not abundant. However, when the population density of prey increases, predator populations cannot maximize their predation because dangerous prey have a better ability to defend themselves from predators when their numbers are large enough.

Keywords: *Prey-Predator System, Leslie-Gower Model, Holling Type IV, Turing Instability, Spatial Pattern.*

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN SAMBUNG	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	4
1.3. Tujuan Penelitian	5
1.4. Manfaat Penelitian	5
1.5. Ruang Lingkup Penelitian	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Model Mangsa Pemangsa Leslie-Gower	7
2.2. Fungsi Respon	9
2.3. Konsep Dasar Persamaan Diferensial Parsial	12

2.3.1.	Persamaan Reaksi Difusi	13
2.3.2.	Syarat Batas (<i>Boundary Conditions</i>) Persamaan Reaksi Difusi.....	15
2.4.	Ketidakstabilan Turing.....	16
2.4.1	Analisis Kestabilan Sistem Tanpa Difusi.....	17
2.4.2	Analisis Kestabilan Sistem dengan Adanya Difusi	21
2.5.	Metode Beda Hingga FTCS	25
2.6.	Modifikasi Model Mangsa Pemangsa Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV.	30

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1.	Jenis Penelitian	33
3.2.	Lokasi dan Waktu Penelitian	33
3.3.	Langkah Penelitian	33
3.4.	Simulasi Model	35
3.5.	Penarikan Kesimpulan	35

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1.	Modifikasi Model Mangsa Pemangsa Leslie-Gower dan Fungsi Respon Holling Tipe IV yang Disederhanakan	37
4.2.	Analisis Titik Keseimbangan dan Kestabilan Model	40
4.2.1.	Analisis Titik Keseimbangan.....	40
4.2.2.	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model	43
4.3.	Analisis Ketidakstabilan Turing.....	45
4.4.	Simulasi Numerik	49
4.4.1	Simulasi Numerik dalam Ruang Satu Dimensi....	50
4.4.2	Simulasi Numerik dalam Ruang Dua Dimensi	54

BAB V PENUTUP

5.1. Kesimpulan	65
5.2. Saran	66

DAFTAR PUSTAKA.....	67
----------------------------	-----------

LAMPIRAN.....	70
----------------------	-----------

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Variabel pada Model (4.1).....	39
Tabel 4.2	Parameter pada Model (4.1)	40
Tabel 4.3.	Nilai Parameter pada Model (4.1)	48
Tabel 4.4	Syarat Terjadinya Ketidakstabilan Turing pada Titik Kesetimbangan T_4 untuk Nilai Parameter dalam Tabel 4.3 .	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Plot Fungsi Respon Holling Tipe IV	11
Gambar 3.1.	Diagram Alur Kerja	36
Gambar 4.1.	Diagram Model Mangsa Pemangsa.....	37
Gambar 4.2.	Dinamika Spasial dari Populasi Mangsa u dan Populasi Pemangsa v pada Ruang (a) $Lx = 50$ dan (b) $Lx = 300$ untuk $t = 0$ sampai 30.....	53
Gambar 4.3.	Pola Spasial Populasi Mangsa u dan Pemangsa v dengan Parameter (a) $b = 0.09$, (b) $b = 0.095$ dan (c) $b = 0.10$ untuk $t = 100$	58
Gambar 4.4.	Pola Spasial dari Populasi Mangsa u dan Populasi Pemangsa v dengan Parameter (a) $m_1 = 0.7$, (b) $m_1 = 0.745$ dan (c) $m_1 = 0.79$ untuk $t = 100$	60
Gambar 4.5.	Pola spasial dari Populasi Mangsa u dan Populasi Pemangsa v dengan Waktu (a) $t = 0$, (b) $t = 350$, (c) $t = 700$ dan (d) 1500	62

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Nama/Arti
α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
λ	Lambda
∂	Turunan parsial
∇	Nabla
Δ	Delta
Ω	Omega
\in	Elemen
Σ	Sigma
$\text{Re}(\lambda)$	Bagian real lambda
ε	Epsilon
δ	Delta
\forall	Untuk setiap
$ $	Nilai mutlak
\mathbb{R}	Bilangan real

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Titik Kesetimbangan	70
Lampiran 2	Titik Kesetimbangan Menggunakan Maple.....	73
Lampiran 3	Bukti Teorema 4.1	74
Lampiran 4	Syarat Batas dalam Ruang Dua Dimensi	79
Lampiran 5	Kode Program Simulasi Menggunakan Matlab	82

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Interaksi antar populasi dalam suatu lingkungan sangat kompleks. Para peneliti dan ilmuwan menggunakan model matematika untuk memprediksi dan menggambarkan dampak dari interaksi tersebut. Salah satu interaksi yang sering terjadi adalah interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa.

Banyak perluasan yang bertujuan untuk memperhitungkan interaksi antara mangsa dan pemangsa yang lebih kompleks. Model interaksi populasi mangsa pemangsa yang paling sering digunakan adalah model Lotka-Volterra. Model ini berasumsi bahwa tanpa adanya pemangsa maka populasi mangsa akan tumbuh secara eksponensial dan pertumbuhan pemangsa bergantung pada tangkapan mangsa. Selanjutnya, Leslie dan Gower memperkenalkan sebuah model sebagai modifikasi dari model Lotka-Volterra yang disebut sebagai model mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan asumsi bahwa populasi yang berinteraksi tumbuh sesuai dengan pertumbuhan logistik dan daya dukung lingkungan untuk pemangsa tidak konstan tetapi proporsional dengan ukuran populasi mangsa.

Dalam dinamika populasi mangsa pemangsa, pertahanan kelompok adalah istilah yang digunakan untuk menggambarkan fenomena dimana predasi berkurang atau bahkan dicegah sama sekali, karena peningkatan

kemampuan mangsa yang lebih baik dalam mempertahankan atau menyamarkan diri ketika jumlah mangsa cukup besar. Untuk menggambarkan fenomena ini, fungsi respon yang digunakan untuk menggambarkan interaksi mangsa dan pemangsa adalah fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan (Shen, 2007). Fungsi ini menggambarkan bahwa pada saat kepadatan mangsa meningkat maka daya predasi dari pemangsa berkurang karena adanya sifat bertahan dari mangsa. Contohnya dijelaskan oleh Holmes dan Bethel yang melibatkan populasi serangga tertentu. Kawanan besar serangga membuat pemangsa serangga sulit mengidentifikasinya (Ruan dan Xiao, 2001).

Pada penelitian sebelumnya, Alaoui dan Okiye (2003) melakukan analisis kestabilan global pada modifikasi model mangsa pemangsa Leslie-Gower dan fungsi respon Holling tipe II. Modifikasi dilakukan pada persamaan kedua dalam model Leslie-Gower atau pada persamaan populasi pemangsa. Penelitian selanjutnya, Ruan dan Xiao (2001) melakukan analisis global pada sistem mangsa pemangsa Lotka-Volterra menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan. Selanjutnya, Huang (2016) melakukan analisis bifurkasi pada model Leslie-Gower dengan pertumbuhan logistik pada mangsa dan menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan.

Selanjutnya, terdapat pula fenomena alam dimana terjadi kepadatan populasi yang menyebabkan setiap populasi memiliki kecenderungan untuk menyebar ke daerah dengan kepadatan populasi yang lebih kecil, sehingga

diperlukan faktor difusi untuk menggambarkan bagaimana kepadatan populasi dalam ruang atau *space* berubah seiring waktu. Dengan adanya faktor difusi, tidak hanya perubahan populasi terhadap waktu yang dapat diamati, tetapi juga pola penyebaran spasial masing-masing spesies. Penyebaran tersebut membuat dinamika dan perilaku masing-masing populasi lebih kompleks.

Pada tahun 1952, Turing memperkenalkan sebuah teori yang sederhana namun mendalam. Turing menemukan bahwa jika suatu sistem tanpa difusi berada dalam keadaan setimbang maka dengan adanya difusi dan dalam kondisi tertentu dapat menjadi tidak stabil. Proses ketidakstabilan ini disebut ketidakstabilan Turing (Yan dan Zhang, 2014).

Penelitian sebelumnya, seperti Yan dan Zhang (2014) telah melakukan analisis kestabilan dan ketidakstabilan Turing pada model mangsa pemangsa menggunakan fungsi repon Beddington-DeAngelis dan memperoleh kesimpulan bahwa pada wilayah parameter dimana sistem berada dalam keadaan setimbang yang stabil secara global ketika tidak ada difusi menjadi tidak stabil dengan adanya faktor difusi. Gao, dkk. (2019) telah melakukan analisis ketidakstabilan Turing dan bifurkasi pada model mangsa pemangsa dengan waktu tunda dan pemanenan pada populasi pemangsa. Dari penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa difusi dan waktu tunda merupakan dua faktor yang harus dimasukkan dalam membangun model mangsa pemangsa, karena faktor tersebut dapat

menstimulasi pembentukan ketidakstabilan Turing dan solusi periode bifurkasi secara spasial.

Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, peneliti akan mengkaji bagaimana difusi dapat merubah suatu kondisi sistem yang stabil tanpa difusi menjadi tidak stabil ketika ditambahkan difusi. Adapun model yang digunakan dalam penelitian ini merupakan modifikasi model Leslie-Gower pada persamaan populasi pemangsa yang dikemukakan dalam penelitian Alaoui dan Okiye (2003) dan menggunakan bentuk sederhana dari fungsi respon Holling tipe IV untuk menggambarkan interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa. Model dalam penelitian ini juga dikembangkan dengan menambahkan faktor difusi terhadap modifikasi model tersebut. Berdasarkan penjelasan yang telah diuraikan, akan dilakukan penelitian tentang **“Ketidakstabilan Turing Modifikasi Model Leslie-Gower dan Fungsi Respon Holling Tipe IV yang Disederhanakan”**.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian, adapun rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana syarat terjadinya ketidakstabilan Turing pada modifikasi model Leslie-Gower dan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan?

2. Bagaimana pola spasial yang terbentuk pada modifikasi model Leslie-Gower dan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan menggunakan metode beda hingga FTCS?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah:

1. Menganalisis syarat terjadinya ketidakstabilan Turing pada modifikasi model Leslie-Gower dan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan.
2. Menentukan dan menganalisis pola spasial yang terbentuk pada modifikasi model Leslie-Gower dan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan menggunakan metode beda hingga FTCS.

1.4. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan masukan yang baru kepada para peneliti yang bergelut dibidang pemodelan mangsa pemangsa tentang pengaruh pola penyebaran populasi dalam dinamika populasi.

1.5. Ruang Lingkup Penelitian

Perlu diberi asumsi untuk model yang dimaksud agar ruang lingkup penelitian lebih terarah dan lebih jelas. Berikut asumsi yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Interaksi antara mangsa dan pemangsa yang diteliti menggunakan modifikasi model Leslie-Gower.
2. Populasi mangsa diasumsikan sebagai populasi yang berbahaya yang dilengkapi dengan kemampuan pertahanan sehingga fungsi respon yang digunakan untuk memodelkan interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa adalah fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan.
3. Faktor difusi dalam penelitian ini dideskripsikan sebagai pola penyebaran populasi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Model Mangsa Pemangsa Leslie-Gower

Pada tahun 1948, Leslie membahas model Lotka-Volterra dan menemukan ketidakmungkinan dalam model tersebut, yaitu laju pertumbuhan pemangsa tidak terbatas. Selanjutnya, Leslie dan Gower memperkenalkan sebuah model mangsa pemangsa yang baru sebagai modifikasi dari model Lotka-Volterra yang disebut sebagai model mangsa pemangsa Leslie-Gower yang dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= ru - bu^2 - p(u)v, \\ \frac{dv}{dt} &= sv - \frac{m_2 v^2}{u},\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan,

u menyatakan kepadatan populasi mangsa

v menyatakan kepadatan populasi pemangsa

$\frac{du}{dt}$ menyatakan laju perubahan kepadatan populasi mangsa terhadap waktu t .

$\frac{dv}{dt}$ menyatakan laju perubahan kepadatan populasi pemangsa terhadap waktu t .

r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik mangsa.

- s menyatakan laju pertumbuhan intrinsik pemangsa
- b mengukur kekuatan kompetisi diantara individu mangsa
- $p(u)$ menyatakan fungsi respon dimana pemangsa mengkonsumsi mangsa
- m_2 menyatakan pengurangan pada populasi pemangsa karena kompetisi antar individu untuk memperoleh mangsa
- $\frac{r}{b}$ menyatakan daya dukung alam dari mangsa tanpa adanya predasi
- $\frac{su}{m_2}$ menyatakan daya dukung alam yang proporsional dengan ukuran populasi mangsa (kelimpahan populasi mangsa)
- $\frac{v}{u}$ mengukur kerugian pada populasi pemangsa karena kelangkaan makanan kesukaannya

Model Leslie-Gower adalah model mangsa-pemangsa yang mengasumsikan bahwa pertumbuhan populasi yang berinteraksi sesuai dengan hukum logistik dimana populasi tidak dapat tumbuh tanpa batas karena pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh kepadatan populasi dan daya dukung lingkungan yang sifatnya terbatas. Model ini juga mengasumsikan bahwa daya dukung lingkungan pada populasi pemangsa sebanding dengan jumlah populasi mangsa, menekankan fakta bahwa ada batas pertumbuhan pada populasi mangsa u dan pemangsa v yang tidak dikenali dalam model Lotka-Volterra, (Yue, 2016).

Selanjutnya, Alaoui dan Okiye (2003) melakukan modifikasi pada persamaan kedua atau pada populasi pemangsa dalam model Leslie-

Gower dan fungsi respon Holling tipe II. Modifikasi dilakukan dengan menambahkan konstanta k_2 dalam penyebut untuk menormalkan residual penurunan populasi pemangsa karena kelangkaan parah dari populasi mangsa favoritnya sehingga diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= ru - bu^2 - \frac{m_1 uv}{k_1 + u}, \\ \frac{dv}{dt} &= sv - \frac{m_2 v^2}{k_2 + u},\end{aligned}\tag{2.2}$$

dengan r, b, s, m_2 memiliki makna yang sama sebagaimana dalam Model (2.1), m_1 mengukur nilai maksimum laju pengurangan per kapita mangsa dapat dicapai, k_1 dan k_2 mengukur sejauh mana lingkungan memberikan perlindungan terhadap mangsa u dan pemangsa v .

2.2. Fungsi Respon

Fungsi respon merupakan fungsi yang menggambarkan total konsumsi dari individu pemangsa yang bergantung pada kepadatan mangsa, sehingga fungsi respon berkaitan erat dengan pengurangan populasi mangsa atau peningkatan populasi pemangsa saat saling berinteraksi. Pada penelitian ini menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan. Fungsi respon Holling tipe IV dituliskan dalam bentuk

$$P_1(x) = \frac{mx}{a + bx + x^2} \text{ dan biasa disebut sebagai fungsi respon Monod-Haldane.}$$

Selanjutnya, Sokol dan Howell (1981) mengusulkan bentuk sederhana dari fungsi respon Monod-Haldane dan menemukan bahwa fungsi tersebut lebih sederhana dan lebih sesuai dengan data eksperimen yang digunakan secara signifikan dalam penelitiannya tentang kinetika oksidasi phenol. Fungsi yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$P_2(x) = \frac{mx}{a+x^2},$$

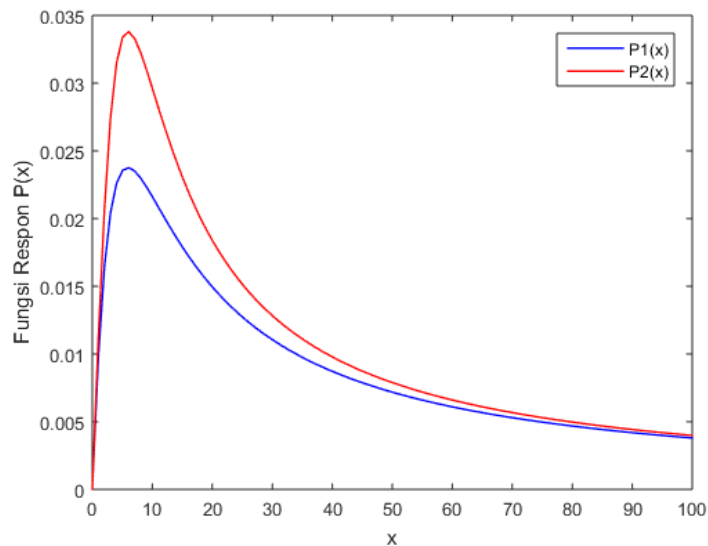
dengan,

- x menyatakan kepadatan populasi mangsa
- m menyatakan laju interaksi kedua populasi
- a menyatakan titik jenuh pemangsa

Dalam dinamika populasi, fungsi respon Holling tipe IV didasari oleh adanya interaksi yang terjadi antara pemangsa dan mangsa yang tidak monoton. Hubungan tingkat pemangsaan dan kepadatan mangsa yaitu pada saat jumlah populasi mangsa meningkat, daya predasi pemangsa berkurang karena adanya sifat bertahan dari mangsa.

Dinamika perilaku dari fungsi respon Holling tipe IV dapat dilihat dalam Gambar 2.1. Dari gambar tersebut, jelas bahwa sifat dasar dari kedua fungsi respon adalah sama dan nilainya pada kepadatan pemangsa adalah sama, hanya berbeda pada nilai maksimum yang dicapai oleh fungsi respon. Dalam konteks ini, dapat diketahui bahwa fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan mampu menggambarkan dinamika interaksi mangsa pemangsa dimana daya predasi dari pemangsa berkurang ketika

terjadi peningkatan pada populasi mangsa karena kemampuan mangsa untuk mempertahankan diri lebih baik ketika spesiesnya cukup besar (Khajanchi, 2017).



Gambar 2.1. Plot Fungsi Respon Holling Tipe IV

Penelitian-penelitian yang berkaitan dengan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan dalam model mangsa pemangsa telah banyak dilakukan oleh peneliti, seperti Huang (2016) yang melakukan analisis bifurkasi model Leslie dengan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan, Huang, T (2019) melakukan analisis pembentukan pola terhadap model Lotka-Volterra dengan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan. Khajanchi (2017) melakukan analisis pada sistem mangsa pemangsa tahapan struktur dengan fungsi respon Holling tipe IV yang disederhanakan.

2.3. Konsep Dasar Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). PDB adalah persamaan diferensial yang memuat satu variabel bebas. PDP adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Orde persamaan diferensial ditentukan oleh tingkat atau orde tertinggi dari turunan yang terdapat pada suatu persamaan. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n dapat dinyatakan sebagai,

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^n) = 0,$$

dengan t adalah variabel bebas dan $y(t)$ adalah variabel tak bebas. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi n adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, \dots, y_n, t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, \dots, y_n, t), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, \dots, y_n, t), \end{aligned}$$

dengan f_i adalah fungsi dari $n+1$ variabel, untuk $i=1,2,\dots,n$ dan $n \geq 2$ (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.1. (Gunawan, 2016)

Persamaan diferensial parsial (PDP) merupakan sebuah persamaan yang memfokuskan pada hubungan antara sebuah fungsi yang belum diketahui $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ berdimensi $n \geq 2$ dan turunan parsial fungsi terhadap variabel-variabel bebasnya. Bentuk umum PDP diberikan sebagai berikut:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \dots\right) = 0.$$

PDP biasanya memiliki variabel bebas untuk ruang dan/atau waktu. Berikut beberapa contoh PDP sederhana dengan u sebagai fungsi yang belum diketahui dan hanya memiliki dua variabel bebas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{Persamaan laplace}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 \quad \text{Persamaan difusi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0 \quad \text{Persamaan gelombang}$$

2.3.1. Persamaan Reaksi Difusi

Misalkan suatu individu organisme atau partikel yang mulai pada suatu titik bergerak disepanjang garis dan mengambil langkah secara acak sepanjang Δx ke kiri atau ke kanan. Asumsikan bahwa dalam setiap satuan waktu Δt partikel bergerak ke salah satu ruang $+\Delta x$ atau $-\Delta x$. Jika partikel berada berada pada lokasi x_0 pada saat t_0 , maka pada saat $t = t_0 + \Delta t$,

partikel akan berada di $x_0 - \Delta x$ atau di $x_0 + \Delta x$. Biasanya peluang probabilitas harus sama, sehingga probabilitas partikel bergerak ke kiri atau ke kanan adalah $1/2$.

Selanjutnya diasumsikan bahwa banyak partikel yang bergerak dalam waktu yang sama secara bersamaan dengan ukuran langkah yang sama pada garis. Didefinisikan $p(x, t)$ sebagai jumlah partikel yang berada pada lokasi x pada saat t . Kemudian setelah satu langkah Δt , semua partikel pada lokasi x_0 telah berpindah atau bergerak ke $x_0 - \Delta x$ atau ke $x_0 + \Delta x$. Sehingga diperoleh:

$$p(x_0, t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2} p(x_0 - \Delta x, t_0) + \frac{1}{2} p(x_0 + \Delta x, t_0), \quad (2.3)$$

dengan menggunakan ekspansi deret Taylor:

$$p(x_0, t_0 + \Delta t) = p(x_0, t_0) + \frac{\partial p}{\partial t}(x_0, t_0)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_0, t_0)\Delta t^2 + \dots, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{2} p(x_0 - \Delta x, t_0) = \frac{1}{2} p(x_0, t_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t}(x_0, t_0)(-\Delta x) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_0, t_0)(-\Delta x)^2 + \dots, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} p(x_0 + \Delta x, t_0) = \frac{1}{2} p(x_0, t_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t}(x_0, t_0)(\Delta x) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_0, t_0)(\Delta x)^2 + \dots. \quad (2.6)$$

Substitusi Persamaan (2.4), (2.5) dan (2.6) ke dalam Persamaan (2.3) diperoleh:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x_0, t_0)\Delta t + \dots = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_0, t_0)\Delta x^2 + \dots. \quad (2.7)$$

Diasumsikan bahwa Δt dan Δx bernilai kecil, selanjutnya orde tertinggi dalam ekspansi deret Taylor bernilai lebih kecil dibandingkan suku yang terdapat dalam Persamaan (2.7) atau mendekati nol. Dengan membagi Persamaan (2.7) dengan Δt , diperoleh:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_0, t_0) + \dots, \quad (2.8)$$

diasumsikan bahwa $\Delta t \rightarrow 0$ dan $\Delta x \rightarrow 0$ sedemikian hingga

$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \right) = D > 0$. Berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x_0, t_0) = D \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_0, t_0),$$

atau lebih sederhana dalam bentuk:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) disebut sebagai persamaan difusi satu dimensi, dimana D merupakan koefisien difusi.

2.3.2. Syarat Batas (*Boundary Conditions*) Persamaan Reaksi Difusi

Jika diasumsikan suatu persamaan reaksi difusi pada domain terbatas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yaitu $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, maka diperlukan tambahan syarat awal dan syarat batas yang sesuai. Misalkan diberikan persamaan sebagai berikut:

$$u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + f(u(x, t)) \quad \text{untuk } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0,$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ untuk } x \in \Omega ,$$

dan syarat batas

$$u(a,t) = \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t) .$$

Syarat batas dimana nilai solusi ditentukan sendiri disebut *Dirichlet Boundary Conditions*. Syarat batas dimana satu ujung atau kedua ujungnya mungkin dibatasi, dalam hal ini tidak ada fluks di batas, sehingga $\frac{du}{dx} = 0$ pada titik, atau syarat pada turunan u bukan pada u itu sendiri disebut *Neumann Boundary Conditions* (Leveque, 2007).

2.4. Ketidakstabilan Turing

Pada tahun 1952 Alan Turing mengusulkan tiga jenis ketidakstabilan yang ditemukan yaitu berisolasi dalam waktu dan ruang yang seragam, diam dalam waktu dan periodik dalam ruang, berisolasi dalam ruang dan waktu. Dari ketiga jenis ketidakstabilan tersebut, jenis ketidakstabilan kedua yang menstimulasi pembentukan pola spasial dimana sebelumnya tidak ada pola, yang selanjutnya dikenal sebagai ketidakstabilan Turing (Rodrigues dkk., 2014). Dengan mengubah nilai parameter pada model akan diperoleh serangkaian pola spasial yang mencerminkan perilaku dinamis yang berbeda dari sistem (Huang, 2019).

Analisis ketidakstabilan Turing dilakukan dalam dua langkah, yaitu menganalisis sistem yang berada dalam keadaan setimbang tanpa difusi, selanjutnya menganalisis ketidakstabilan sistem ketika difusi dimasukkan.

Suatu sistem yang menggambarkan difusi dan dinamika reaksi antara dua spesies secara umum dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v) + Du \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v) + Dv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{2.10}$$

dimana u dan v adalah dua konsentrasi yang berbeda dari spesies kimia dalam sistem penggunaan reaksi, f dan g adalah fungsi reaksi, Du dan Dv merupakan koefisien difusi dari u dan v (Murray, 2003). Dalam analisis ketidakstabilan Turing, biasanya diasumsikan bahwa fluks pada batas sama dengan nol. Syarat batas tanpa fluks menunjukkan bahwa tidak ada partikel atau individu yang melintasi batas tersebut sehingga pola spasial yang terbentuk tidak mengalami pengaruh dari masukan eksternal apapun.

2.4.1. Analisis Kestabilan Sistem Tanpa Difusi

Berdasarkan Persamaan (2.10) suatu sistem tanpa difusi dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Definisi 2.2. (Baker, 2016)

Solusi kesetimbangan (*steady state*) adalah suatu solusi atau titik dimana dinamika tidak berubah seiring waktu.

Definisi 2.3. (Baker, 2016)

Titik (u_0, v_0) dikatakan titik kesetimbangan dari Sistem (2.11) jika

$$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.2., suatu sistem dikatakan berada dalam keadaan setimbang apabila sistem tersebut tidak mengalami perubahan terhadap waktu atau sama dengan nol. Diasumsikan bahwa dalam keadaan setimbang $(u, v) = (u_0, v_0)$, maka Persamaan (2.11) harus memenuhi:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u, v) = 0, \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Misalkan didefinisikan gangguan kecil pada solusi kesetimbangan sebagai berikut:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Menggunakan ekspansi deret Taylor, ditemukan pendekatan linear dari f dan g menjadi:

$$\begin{aligned} f(u, v) &\approx f(u_0, v_0) + f_u(u_0, v_0)(u - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v - v_0), \\ g(u, v) &\approx g(u_0, v_0) + g_u(u_0, v_0)(u - u_0) + g_v(u_0, v_0)(v - v_0), \end{aligned} \tag{2.14}$$

karena f dan g sama dengan nol dalam keadaan setimbang, maka Persamaan (2.14) menjadi:

$$\begin{aligned} f(u, v) &\approx f_u(u_0, v_0)(u - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v - v_0), \\ g(u, v) &\approx g_u(u_0, v_0)(u - u_0) + g_v(u_0, v_0)(v - v_0), \end{aligned} \quad (2.15)$$

sehingga pendekatan linear pada fungsi reaksi dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad (2.16)$$

dimana matriks \mathbf{A} adalah matriks Jacobian dari Sistem (2.11) atau matriks turunan parsial dari fungsi f dan g sehubungan dengan u dan v pada titik kesetimbangan (u_0, v_0) yang didefinisikan dalam bentuk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{df}{du} & \frac{df}{dv} \\ \frac{dg}{du} & \frac{dg}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)}.$$

Jika λ adalah nilai eigen dari matriks \mathbf{A} dengan vektor eigen \mathbf{V} , maka:

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}, \quad (2.17)$$

selanjutnya $\mathbf{w} = e^{\lambda t}\mathbf{V}$ adalah solusi dari Persamaan (2.16).

Teorema 2.1 (Kriteria Kestabilan Sistem)

- (i) Solusi kesetimbangan **stabil** jika dan hanya jika bagian real dari setiap nilai eigen λ dari matriks Jacobian \mathbf{A} bernilai kecil atau sama dengan nol ($\text{Re}(\lambda) \leq 0$).

- (ii) Solusi kesetimbangan **stabil asimtotik** jika dan hanya jika bagian real dari setiap nilai eigen λ dari matriks Jacobian \mathbf{A} bernilai negatif ($\text{Re}(\lambda) < 0$).

Selanjutnya, nilai eigen pada Persamaan (2.17) ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= 0, \\ \begin{vmatrix} f_u - \lambda & f_v \\ g_u & g_v - \lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda(f_u + g_v) + (f_u g_v - f_v g_u) &= 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan,

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[(f_u + g_v) \pm \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{(\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4 \det(\mathbf{A})} \right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Berdasarkan Teorema 2.1., solusi kesetimbangan stabil jika bagian real dari setiap nilai eigen kecil dari nol, karena dalam kasus ini, $\mathbf{w} \rightarrow 0$ ketika $t \rightarrow \infty$. Sehingga dari analisis pada Persamaan (2.19) diperoleh syarat perlu untuk kestabilan dari sistem Persamaan (2.11) pada titik kesetimbangan (u_0, v_0) , yaitu matriks \mathbf{A} harus memenuhi:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}) &= f_u + g_v < 0, \\ \det(\mathbf{A}) &= f_u g_v - f_v g_u > 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.4.2. Analisis Ketidakstabilan Sistem dengan Adanya Difusi

Diberikan sistem reaksi dengan adanya difusi yang dijelaskan pada Persamaan (2.10) dan linearisasi dalam keadaan setimbang sebagai berikut:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{D}\nabla^2\mathbf{w} + \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad (2.21)$$

dengan $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} Du & 0 \\ 0 & Dv \end{pmatrix}$ dan $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Langkah pertama, misalkan \mathbf{w} adalah solusi time-independent dari masalah nilai eigen $\nabla^2\mathbf{w} + k^2\mathbf{w} = 0$ dengan kondisi batas $(n \cdot \nabla)\mathbf{w} = 0$ dan k adalah nilai eigen yang sehubungan dengan fungsi eigen. Jika \mathbf{w}_k adalah fungsi eigen dari masalah nilai eigen, maka diperoleh solusi dari sistem Persamaan (2.21) dalam bentuk

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{w}_k(x), \quad (2.22)$$

dimana vector $\mathbf{C}_k \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ adalah konstanta Fourier untuk sistem. Substitusi solusi pada Persamaan (2.22) ke dalam Persamaan (2.21), diperoleh:

$$\sum_k \mathbf{C}_k \lambda_k e^{\lambda_k t} \mathbf{w}_k = D \nabla^2 \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{w}_k + A \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{w}_k,$$

karena $\nabla^2\mathbf{w} + k^2\mathbf{w} = 0$ maka $\nabla^2\mathbf{w} = -k^2\mathbf{w}$, sehingga persamaan di atas dapat ditulis:

$$\sum_k \mathbf{C}_k \lambda_k e^{\lambda_k t} \mathbf{w}_k = A \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} \mathbf{w}_k - D \sum_k \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t} k^2 \mathbf{w}_k,$$

dimana \mathbf{w}_k adalah linear independent. Persamaan di atas mengarah ke bentuk $\lambda_k \mathbf{I} = -k^2 \mathbf{D} + \mathbf{A}$ dimana \mathbf{I} adalah matriks identitas. Selanjutnya, diperoleh matriks Jacobian untuk Persamaan (2.21) sebagai berikut:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} - k^2 \mathbf{D} = \begin{pmatrix} f_u - k^2 Du & f_v \\ g_u & g_v - k^2 Dv \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian \mathbf{A}_k ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik berikut:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_k - \lambda_k \mathbf{I}| &= 0, \\ \begin{vmatrix} f_u - k^2 Du - \lambda & f_v \\ g_u & g_v - k^2 Dv - \lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ \lambda_k^2 - \lambda_k [f_u + g_v - k^2 (Du + Dv)] + (f_u - k^2 Du)(g_v - k^2 Dv) - f_v g_u &= 0, \end{aligned}$$

atau dapat juga dituliskan dalam bentuk

$$\lambda_k^2 - \lambda_k [\text{tr}(\mathbf{A}_k)] + \det(\mathbf{A}_k) = 0, \quad (2.24)$$

dengan,

$$\text{tr}(\mathbf{A}_k) = f_u + g_v - k^2 (Du + Dv), \quad (2.25)$$

$$\det(\mathbf{A}_k) = k^4 Du Dv - k^2 (f_u Dv + g_v Du) + f_u g_v - f_v g_u. \quad (2.26)$$

Berdasarkan teorema 2.1, solusi kesetimbangan stabil jika $\text{Re}(\lambda) < 0$ untuk setiap nilai eigen. Ketidakstabilan Turing mengacu terhadap situasi dimana solusi stabil tanpa adanya difusi, tetapi tidak stabil ketika ditambahkan difusi. Oleh karena itu, diperlukan $\text{Re}(\lambda) > 0$ untuk

setiap nilai eigen sedemikian hingga keadaan stabil menjadi tidak stabil dengan adanya difusi.

Terdapat dua kemungkinan untuk kasus ini, yaitu $\text{tr}(\mathbf{A}_k) > 0$ atau $\det(\mathbf{A}_k) < 0$. Dari kondisi $f_u + g_v < 0$ dan fakta bahwa koefisien difusi selalu bernilai positif, maka Persamaan (2.25) atau $\text{tr}(\mathbf{A}_k)$ akan selalu bernilai negatif. Sehingga satu-satunya kemungkinan untuk $\text{Re}(\lambda) > 0$ yaitu ketika

$$\det(\mathbf{A}_k) = k^4 DuDv - k^2(f_u Dv + g_v Du) + f_u g_v - f_v g_u < 0. \quad (2.27)$$

Karena $f_u g_v - f_v g_u > 0$ pada Persamaan (2.20), maka satu-satunya kemungkinan untuk $\det(\mathbf{A}_k) < 0$ jika

$$f_u Dv + g_v Du > 0. \quad (2.28)$$

Teorema 2.2. (Murray, 2003)

Jika $f_u + g_v < 0$ dan $f_u Dv + g_v Du > 0$ maka $Du \neq Dv$, f_u dan g_v harus berlawanan tanda.

Persamaan (2.28) diperlukan tetapi tidak cukup untuk $\text{Re}(\lambda) > 0$. Selanjutnya dapat dilihat bahwa $\det(\mathbf{A}_k)$ berbentuk fungsi kuadrat dalam k^2 . Hal ini menunjukkan bahwa fungsi berbentuk parabola terbuka ke atas karena $DuDv$ bernilai positif. Untuk $\det(\mathbf{A}_k)$ menjadi negatif, Persamaan (2.26) diturunkan terhadap k^2 dan diatur menjadi sama dengan nol, diperoleh

$$\frac{d}{d(k^2)} \det(\mathbf{A}_k) = 2k^2 DuDv - (f_u Dv + g_v Du) = 0,$$

atau

$$k^2 = \frac{f_u Dv + g_v Du}{2DuDv}. \quad (2.29)$$

Substitusi nilai k^2 ke dalam Persamaan (2.27), diperoleh

$$\begin{aligned} DuDv \left(\frac{f_u Dv + g_v Du}{2DuDv} \right)^2 - (f_u Dv + g_v Du) \left(\frac{f_u Dv + g_v Du}{2DuDv} \right) + f_u g_v - f_v g_u &< 0, \\ DuDv \left(\frac{f_u Dv + g_v Du}{2DuDv} \right)^2 - 2DuDv \left(\frac{f_u Dv + g_v Du}{2DuDv} \right)^2 + f_u g_v - f_v g_u &< 0, \\ -\frac{(f_u Dv + g_v Du)^2}{4DuDv} + f_u g_v - f_v g_u &< 0, \end{aligned}$$

atau dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$(f_u Dv + g_v Du)^2 > 4DuDv(f_u g_v - f_v g_u). \quad (2.30)$$

Berdasarkan uraian di atas, ketidakstabilan Turing terjadi pada Sistem (2.10) jika memenuhi empat syarat yang diberikan dalam Rai (2013) sebagai berikut:

$$(H1) \quad \text{tr}(\mathbf{A}) = f_u + g_v < 0$$

$$(H2) \quad \det(\mathbf{A}) = f_u g_v - f_v g_u > 0$$

$$(H3) \quad f_u Dv + g_v Du > 0$$

$$(H4) \quad (f_u Dv + g_v Du)^2 > 4DuDv(\det(\mathbf{A}))$$

2.5. Metode Beda Hingga FTCS

Metode beda hingga *forward time centered space* (FTCS) merupakan salah satu metode beda hingga yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi dari masalah difusi. Misalkan $u(x,t)$ merupakan solusi dari persamaan difusi satu dimensi. Dalam metode ini, aproksimasi untuk perubahan u terhadap waktu (*time*) menggunakan pendekatan *forward time difference* dan perubahan u terhadap jarak (*space*) menggunakan pendekatan *centered space difference* (Kasbawati, 2011).

Penggunaan metode beda hingga menggunakan ekspansi deret Taylor. Menurut Gupta (2019) ekspansi deret Taylor diberikan sebagai berikut:

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dots \quad (2.30)$$

Dari Persamaan (2.30) dapat diperoleh aproksimasi untuk turunan parsial orde pertama dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + O(h). \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) disebut aproksimasi beda maju (*forward difference*) fungsi u pada x dengan $O(h)$ adalah galat atau error. Sementara itu, aproksimasi beda maju (*forward difference*) fungsi u pada t dapat dilakukan dengan cara yang sama, yakni mengubah Persamaan (2.30) dengan $u(x,t+k)$ sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} + O(k). \quad (2.32)$$

Selanjutnya aproksimasi untuk turunan parsial orde kedua dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dots \quad (2.33)$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dots \quad (2.34)$$

Persamaan (2.33) dan (2.34) dijumlahkan, diperoleh

$$u(x+h,t) + u(x-h,t) = 2u(x,t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dots, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2), \quad (2.36)$$

Persamaan (2.36) disebut aproksimasi beda pusat (*centered difference*) fungsi u pada x . Sementara itu, aproksimasi beda pusat (*centered difference*) fungsi u pada t dilakukan dengan cara yang sama, yakni mengubah Persamaan (2.33) dan (2.34) dengan $u(x,t+k)$ diperoleh,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} + O(k^2), \quad (2.37)$$

Persamaan (2.37) disebut pendekatan beda pusat (*centered difference*) fungsi u pada t .

Menurut Gupta (2019) untuk mengganti berbagai suku turunan dengan pendekatan beda hingga, dilakukan diskritisasi terhadap suku-suku turunan pada titik (x_i, t_j) . Misalkan variabel x dan t memiliki jarak yang sama dengan jarak h dan k . Diasumsikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ pada titik (x_i, t_j) adalah $u_{i,j}$, sehingga diperoleh aproksimasi untuk turunan parsial orde pertama kedua pada titik (x_i, t_j) sebagai berikut:

a. Aproksimasi untuk turunan pertama dengan metode *forward difference*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i + h, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + O(h) \\ &= \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + O(h) \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h)\end{aligned}\tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k) \\ &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} + O(k) \\ &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k)\end{aligned}\tag{2.39}$$

b. Aproksimasi untuk turunan kedua dengan metode *centered difference*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} + O(h^2) \\ &= \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} + O(h^2) \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) &= \frac{u(x_i, t_j + k) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_j - k)}{k^2} + O(k^2) \\
&= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} + O(k^2) \\
&= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Berdasarkan aproksimasi pada Persamaan (2.39) dan (2.41) maka diperoleh kesalahan pemangkasan lokal pada metode beda hingga FTCS sebagai berikut:

$$E_{i,j} = O(k) + O(h^2).$$

Diasumsikan nilai $u(x, t)$ pada titik (x_i, t_j) adalah $u_{i,j}$, ukuran langkah untuk variabel t dan variabel x masing-masing adalah Δt dan Δx . Diskritisasi Persamaan (2.9) pada titik (x_i, t_j) menggunakan beda maju pada turunan pertama untuk variabel waktu dalam Persamaan (2.39) dan beda pusat pada turunan kedua untuk variabel ruang dalam Persamaan (2.40) dengan mengabaikan error, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2},
\end{aligned}$$

atau

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}). \tag{2.42}$$

Menurut Esfandiari (2017) metode beda hingga FTCS dalam Persamaan (2.42) dikatakan stabil dan konvergen jika dan hanya jika

$$\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.43)$$

yang berarti bahwa Δt harus memenuhi

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}. \quad (2.44)$$

Selanjutnya, diberikan persamaan difusi dua dimensi sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.45)$$

Diskritisasi Persamaan (2.45) pada titik (x_i, y_j, t_n) menggunakan beda hingga FTCS dengan ukuran langkah untuk variabel t , x dan y masing-masing adalah Δt , Δx dan Δy diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\Delta t} &= D \left(\frac{u_{i+1,j,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i-1,j,n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j-1,n}}{\Delta y^2} \right), \end{aligned}$$

atau

$$u_{i,j,n+1} = u_{i,j,n} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i-1,j,n}) + \frac{D\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i,j+1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j-1,n}) \quad (2.46)$$

Metode beda hingga FTCS dalam Persamaan (2.46) dikatakan stabil jika memenuhi

$$D\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (2.47)$$

yang berarti bahwa Δt harus memenuhi

$$\Delta t \leq \frac{1}{2D \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}. \quad (2.48)$$

2.6. Modifikasi Model Mangsa Pemangsa Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV

Dinamika populasi pada penelitian ini dimodelkan secara matematis menggunakan persamaan differensial. Model dihasilkan dengan modifikasi persamaan kedua pada Persamaan (2.1) dan dengan menggunakan fungsi respon holling tipe IV yang telah disederhanakan seperti yang ditunjukkan pada sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= ru - bu^2 - \frac{m_1 uv}{h_1 + u^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= sv - \frac{m_2 v^2}{e + u}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

dengan,

- u menyatakan kepadatan populasi mangsa
- v menyatakan kepadatan populasi pemangsa

$\frac{du}{dt}$ menyatakan laju perubahan kepadatan populasi mangsa terhadap waktu t

$\frac{dv}{dt}$ menyatakan laju perubahan kepadatan populasi pemangsa terhadap waktu t

r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik mangsa

s menyatakan laju pertumbuhan intrinsik pemangsa

b mengukur kekuatan kompetisi diantara individu mangsa

m_1 menyatakan nilai maksimum dimana laju pengurangan per kapita mangsa dapat dicapai

m_2 menyatakan nilai maksimum pengurangan populasi pemangsa karena kompetisi antar individu untuk memperoleh mangsa

h_1 menyatakan titik kejenuhan pemangsa

e menyatakan residual pengurangan pada populasi pemangsa

dengan kondisi $u(0) = u_0 > 0$, $v(0) = v_0 > 0$.

Pada Model (2.49), istilah $-\frac{m_2 v^2}{e+u}$ menunjukkan pengurangan pada

populasi pemangsa karena kompetisi intra-spesies untuk memperoleh mangsa dan menunjukkan bahwa laju pertumbuhan dari pemangsa terbatas dengan fakta bahwa mangsa yang tersedia tidak melimpah.

Secara biologi, istilah ini menunjukkan bahwa dengan tidak adanya mangsa ($u = 0$), model umum Leslie-Gower rusak (pada Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa $u \neq 0$), sehingga dengan konstanta tambahan e

dalam penyebut menormalkan residual penurunan populasi pemangsa karena kelangkaan parah dari populasi mangsa (P. Mishra, dkk., 2019).

Jika dilakukan pengembangan pada Model (2.49) dengan memasukkan faktor penyebaran dimana individu populasi mangsa menyebar di wilayah tertentu, berkembang biak dan mati, serta diburu oleh pemangsa dan individu pemangsa menyebar karena kelaparan jika tidak ada mangsa, berburu mangsa dan bersaing, maka diperoleh model baru dalam bentuk persamaan differensial parsial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - Du \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= ru - bu^2 - \frac{m_1 uv}{h_1 + u^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - Dv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= sv - \frac{m_2 v^2}{e + u},\end{aligned}\tag{2.50}$$

dengan Du dan Dv merupakan konstanta difusi atau laju penyebaran dari u dan v , dan x merupakan ruang (*space*). Selanjutnya, Persamaan (2.50) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= ru - bu^2 - \frac{m_1 uv}{h_1 + u^2} + Du \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= sv - \frac{m_2 v^2}{e + u} + Dv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{2.51}$$