BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori titik tetap adalah salah satu topik penting dalam matematika analisis dan salah satu teori yang dapat berguna dalam berbagai bidang seperti analisis nonlinear, teori operator, persamaan differensial dll[1]. Teori titik tetap pertama kali ditemukan pada tahun 1911 oleh Brouwer yang menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu dari bola satuan tertutup dalam pemetaan ruang berdimensi terbatas terhadap dirinya sendiri harus mempunyai titik tetap[2]. Kemudian, tepatnya pada tahun 1922, Banach memelopori teorinya yang dikenal dengan teori Prinsip kontraksi Banach dan memainkan peran penting dalam memecahkan banyak masalah dibanyak cabang yang berhubungan dengan titik tetap dan keberadaannya. Ini menyatakan beberapa kriteria menjamin keberadaan dan keunikan titik tetap[3].

Ruang metrik penting untuk area titik tetap. Sebuah fungsi dikatakan metrik jika memenuhi beberapa syarat[4]. Berbagai jenis generalisasi ruang metrik telah dihasilkan dari waktu ke waktu dan beberapa pembuktian tentang teorema titik tetap ruang metrik telah dilakukan[5][6]. Pada tahun 1993 Czerwik memperkenalkan ruang b-metrik dan menyatakan sebuah aksioma ketaksamaan segitiga dengan menambahkan koefesien pada ketaksamaan segitiganya. Kamran dkk[7] pada tahun 2017 menggunakan ruang tersebut untuk melakukan generalisasi baru dari ruang metrik. Mlaiki dkk[8] pada tahun 2018 melakukan salah satu generalisasi dari ruang b-metrik. Mlaiki dkk memperkenalkan konsep ruang tipe metrik terkontrol dengan menerapkan fungsi kontrol $\delta: X \times X \to [1, \infty)$ pada pertidaksamaan segitiga. Banyak penelitian yang telah memberikan hasil dan contoh titik tetap yang berbeda dalam ruang metrik ini. Sebagai contoh Ahmad dkk[9] pada tahun 2020 yang membahas tentang hasil titik tetap pada ruang metrik terkontrol. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Mlaiki dkk[10] pada tahun 2020 membahas tentang peningkatan hasil terkini pada ruang metrik terkontrol. Berbagai generalisasi dari ruang metrik terkontrol juga telah dilakukan oleh beberapa penelitian, diantaranya Abdeljawad dkk[11] yang membahas tentang perluasan ruang b-metrik, Abdeljawad dkk memodifikasi ruang metrik terkontrol melalui dua fungsi kontrol $\alpha(x, y)$ dan $\mu(x, y)$. Ahmad dkk[12] membahas tentang ruang tipe metrik parsial terkontrol ganda, yang merupakan generalisasi dari ruang terkontrol ruang tipe metrik, ruang metrik parsial, dan ruang tipe metrik terkontrol ganda. Mlaiki dkk[13] memperkenalkan generalisasi ruang *rectangular* b-metrik, dengan mengubah pertidaksamaan *rectangular*, dan Souayah dkk[14] penelitian ini terinspirasi dari penelitian yang dilakukan oleh Mlaiki dkk yang memperkenalkan tentang ruang tipe metrik terkontrol sehingga dalam penelitian ini, Souyah dkk mendefinisikan ruang tipe metrik parsial terkontrol dan memberikan beberapa teorema titik tetap untuk perluasan kontraksi Kannan pada ruang ini. Selain itu, sebagai aplikasi, Souyah dkk memperoleh teorema titik tetap untuk kontraksi grafis ruang metrik yang dipertimbangkan yang dilengkapi dengan grafik.

Sedghi dkk[15] pada tahun 2012 memperkenalkan tentang ruang S-metrik beserta sifat-sifatnya dan Joshi dkk[16] pada tahun 2022 membuktikan teorema titik tetap pada ruang S-metrik. Selanjutnya pada tahun 2023 Yazici dkk[4] melakukan penelitian ruang tipe S-metrik terkontrol dan aplikasi untuk integral pecahan. Branciari[17] pada tahun 2000 melakukan generalisasi dengan mengganti pertidaksamaan segitiga dengan ekpresi tiga suku yang dikenal dengan ruang metrik *rectangular* Branciari juga memperkenalkan sifat-sifat pada ruang metrik *rectangular*. Ayodele dkk[18] pada tahun 2023 menggunakan ruang metrik tersebut untuk memperkenalkan konsep quanternion ruang *rectangular* S-metrik bernilai yang menggeneralisasi metrik bernilai nyata dan kompleks. Pada tahun 2022 Adewale dkk[19] juga menggunakan ruang *rectangular* S-Metrik pada penelitiannya yang menghasilkan beberapa pembuktian teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik dan hasil yang diperoleh menggeneralisasi banyak hasil yang telah diketahui dalam teori titik tetap. Peneliti terinspirasi oleh penelitian yang dilakukan oleh Adewale dkk. tentang *rectangular* S-Metrik dan penelitian yang dilakukan oleh Mlaiki tentang konsep ruang tipe metrik terkontrol dengan menerapkan fungsi kontrol $\delta: X \times X \to [1, \infty)$ pada pertidaksamaan segitiga, namun hingga kini belum ada yang menggunakan aspek terkontrol pada ruang *rectangular* S-metrik. Sehingga hal ini memotivasi peneliti untuk membuat penelitian tentang teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.

1.2. Perumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

a. Mendefinisikan ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
b. Membuat proposisi atau lemma untuk mendukung teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
c. Membuat teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
d. Membuat teorema tentang aplikasi titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.

1.3. Tujuan dan Manfaat

a. Tujuan Penelitian

   Tujuan penelitian pada penelitian ini adalah membuat teorema dan bukti yang terkait denga keberadaan titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol serta aplikasinya.

b. Manfaat Penulisan
   1) Memberikan pengetahuan tentang teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
   2) Teorema yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah pada persamaan diferensial, integral, persamaan
   3) diferensi, persamaan non-linear, dan lain sebagainya.

1.4. Teori

Subbab ini menyajikan konsep dasar yang dibutuhkan dalam penelitian ini, konsep dasar yang dimaksud yaitu, definisi ruang metrik, ruang S-metrik, definisi ruang *rectangular* S-metrik dan perluasannya, serta titik tetap.

1.4.1. Ruang Metrik dan Beberapa Perluasannya

Pada subbab 1.4.1 disajikan ruang metrik dan beberapa perluasan ruang metrik beserta contohnya yang akan digunakan dalam tesis ini.

Definisi 1.4.1 (Ruang Metrik)[20]

Diberikan X himpunan tak kosong. Fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$ disebut *metrik* jika memenuhi:

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii. $d(x, y) = d(y, x)$,
iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

$\forall x, y, z \in X$ dan pasangan (X, d) disebut *ruang metrik*.

Contoh 1.4.1 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dengan $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
Akan ditunjukkan d adalah metrik pada X.
Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. Misalkan $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x - y|} = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. Jelas $d(x, y) = d(y, x)$
3. Akan ditunjukkan $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   Dari sifat
   $$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$$
   Maka diperoleh
   $$\sqrt{|x + y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$
   Akibatnya
   $$\sqrt{|x - y + y - z|} \leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|}$$
   Diperoleh
   $$\sqrt{|x - z|} \leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|}$$
   Dengan demikian
   $$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Jadi, terbukti bahwa (X, d) merupakan ruang metrik.

Definisi 1.4.2 (Ruang Metrik Terkontrol)[8]
Diberikan X himpuan tak kosong dan $\alpha: X \times X \to [1, \infty)$. Fungsi $d : X \times X \to [0, \infty)$ disebut *metrik terkontrol* jika memenuhi:

i. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$,
ii. $d(x, y) = d(y, x)$,
iii. $d(x, y) \leq \alpha(x, z)d(x, z) + \alpha(z, y)d(z, y)$

Untuk semua $x, y, z \in X$. Pasangan (X, d) disebut *ruang metrik terkontrol*.

Ruang metrik adalah kasus khusus ruang metrik terkontrol. Jika fungsi kontrol pada ruang metrik terkontrol $\alpha(x, y) = 1$, maka ruang tersebut menjadi ruang metrik.

Contoh 1.4.2 Ambil $X = \{0,1,2\}$ dan fungsi d didefinisikan sebagai berikut:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x = 1, y = 0 \; atau \; y = 1 \,, x = 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, y = 2 \; atau \; y = 2 \,, x = 0 \\ \dfrac{2}{5}, & x = 1, y = 2 \; atau \; y = 2 \,, x = 1 \end{cases}$$

Ambil $\alpha: X \times X \to [1, \infty)$ definisikan sebagai

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 4, & jika \; x = 0 \; atau \; x = 2 \; dan \; y = 1 \\ 3, & jika \; x = 1 \,, y = 2 \; atau \; y = 0 \\ 2, & lainnya \end{cases}$$

Akan ditunjukkan $d(x, y) = d(y, x)$,

$$d(1,0) = 1 = d(0,1), \qquad d(0,2) = \frac{1}{2} = d(2,0), \qquad d(1,2) = \frac{2}{5} = d(2,1)$$

Akan ditunjukkan $d(x, y) \leq \alpha(x, z)d(x, z) + \alpha(z, y)d(z, y)$

$$1 = d(0,1) \leq \alpha(0,2)d(0,2) + \alpha(2,1)d(2,1) = 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$$

$$1 \leq \frac{11}{5}$$

maka (X, d) adalah ruang metrik terkontrol

Definisi 1.4.3 (Ruang S-Metrik)[15]
Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Fungsi $S: X^3 \to [0, \infty)$ disebut *S-metrik* jika memenuhi kondisi, untuk setiap $x, y, z, a \in X$

i. $S(x, y, z) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z$,
ii. $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$

Pasangan (X, S) disebut *Ruang S-metrik*.

Contoh 1.4.3 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan fungsi $S: X^3 \to [0, \infty)$ didefinisikan sebagai:

$$S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$$

i. Akan ditunjukkan $S(x, y, z) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z$
Misalkan $S(x, y, z) = 0$ berarti $|x - z| + |x + z - 2y| = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z$.

ii. $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$

$$S(x, x, a) = |x - a| + |x + a - 2x| = |x - a| + |a - x|$$
$$S(y, y, a) = |y - a| + |y + a - 2y| = |y - a| + |a - y|$$
$$S(z, z, a) = |z - a| + |z + a - 2x| = |z - a| + |a - z|$$

$$S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$$
$$= (|x - a| + |a - x|) + (|y - a| + |a - y|) + (|z - a| + |a - z|)$$
$$= 2(|x - a| + |y - a| + |z - a|)$$

Untuk memastikan ketidaksetaraan segitiga, perlu ditunjukkan bahwa:

$$|x - z| + |x + z - 2y| \leq 2(|x - a| + |y - a| + |z - a|)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\leq |x - z| + |x + z - 2y| \\ &\leq (|x - a| + |z - a|) + (|x + z - 2a| + |2a - 2y|) \\ &\leq (|x - a| + |z - a|) + (|x - a| + |z - a| + 2|a - y|) \\ &= 2(|x - a| + |z - a|) + 2|a - y| \\ &= 2(|x - a| + |y - a| + |z - a|) \\ &= S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a) \end{aligned}$$

Ketidaksetaraan terpenuhi. Jadi, $S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$ adalah ruang S-metrik pada $X = \mathbb{R}$.

Definisi 1.4.4(Ruang S-Metrik Terkontrol)[4]
Misal X adalah himpunan tak kosong dan $\alpha: X \times X \to [1, \infty)$ adalah sebuah fungsi kontrol dan fungsi $S: X^3 \to [0, \infty)$ dikatakan S *−metrik terkontrol* jika memenuhi:

i. $S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$;
ii. $S(x, y, z) \leq \alpha(x, a)S(x, x, a) + \alpha(y, a)S(y, y, a) + \alpha(z, a)S(z, z, a)$.

$\forall x, y, z, a \in X$ dan pasangan (X, S) dikatakan ruang S *−metrik terkontrol.*

Ruang S-metrik adalah kasus khusus ruang S-metrik terkontrol. Jika fungsi kontrol pada ruang S-metrik terkontrol $\alpha(x, y) = 1$, maka ruang tersebut akan menjadi ruang S-metrik. Jadi, ruang S-metrik adalah ruang S-metrik terkontrol tetapi sebaliknya tidak selalu benar.

Contoh 1.4.4[4] Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan d adalah metrik dengan fungsi kontrol $\alpha: X \times X \to [1, \infty)$. Ambil $S: X^3 \to [0, \infty)$ sebagai

$$S(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z).$$

i. Akan ditunjukkan $S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$;

$$S(x,y,z) = d(x,z) + d(y,z).$$

$$S(x,y,z) = d(x,x) + d(x,x) = 0.$$

ii. Akan ditunjukkan $S(x,y,z) \leq \alpha(x,a)S(x,x,a) + \alpha(y,a)S(y,y,a) + \alpha(z,a)S(z,z,a)$

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &= d(x,z) + (y,z) \\ &\leq d(x,a) + d(z,a) + d(y,a) + d(z,a) \\ &= d(x,a) + d(y,a) + 2d(z,a) \\ &\leq \alpha(x,a)d(x,a) + \alpha(y,a)d(y,a) + 2\alpha(z,a)d(z,a) \\ &\leq 2\alpha(x,a)d(x,a) + 2\alpha(y,a)d(y,a) + 2\alpha(z,a)d(z,a) \\ &= \alpha(x,a)S(x,x,a) + \alpha(y,a)S(y,y,a) + \alpha(z,a)S(z,z,a). \end{aligned}$$

Akibatnya S adalah ruang S −metrik terkontrol.

Definisi 1.4.5 (Ruang *Rectangular* S-Metrik)[19]
Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan $\underline{S}: X^3 \to [0,\infty)$ adalah fungsi yang memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $\underline{S}(x,y,z) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z$
ii. $\underline{S}(x,y,z) \leq \underline{S}(x,x,a) + \underline{S}(y,y,a) + \underline{S}(z,z,a) \quad \forall x,y,z \in X$ dan $a \in X - \{x,y,z\}$.

Pasangan $(X,\underline{S})$ disebut *ruang rectangular S-metrik*.
Ruang rectangular S-metrik lebih umum daripada ruang S-metrik. Jika S adalah S-metrik, maka ia otomatis memenuhi ketaksamaan segitiga *rectangular* karena berlaku untuk semua a, termasuk yang berbeda dari x,y,z. Namun, tidak semua *rectangular* S-metrik adalah S-metrik, karena ada kemungkinan bahwa ketaksamaan hanya berlaku untuk titik a yang berbeda. Setiap ruang S-metrik adalah ruang *rectangular* S-metrik, tetapi kebalikannya tidak selalu benar. Diperlihatkan seperti contoh berikut.
Contoh 1.4.5 Misalkan $X = \mathbb{R}^+$ dan $\underline{S}: X^3 \to [0,\infty)$ didefinisikan sebagai:

$$\underline{S}(x,y,z) = \begin{cases} x+y+z & z \neq x \; dan \; z \neq y \\ 0, & x = y = z \\ 1, & lainnya \end{cases}$$

Akan ditunjukkan $(X,\underline{S})$ adalah ruang *rectangular* S-metrik tapi bukan ruang S-metrik.

i. Akan ditunjukkan $\underline{S}(x,y,z) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z$
Untuk $\underline{S}(x,y,z) = 0$, berdasarkan definisi haruslah $x = y = z$ maka $\underline{S}(x,y,z) = 0$. Jadi sifat pertama terpenuhi.

ii. Akan ditunjukkan $\underline{S}(x,y,z) \le \underline{S}(x,x,a) + \underline{S}(y,y,a) + \underline{S}(z,z,a)\ \ \forall x,y,z \in X$ dan semua titik berbeda $a \in X - \{x,y,z\}$. Jika $z \neq x\ dan\ z \neq y$, maka $\underline{S}(x,y,z) = x + y + z$ maka $a \in X - \{x,y,z\}$.

$$\begin{aligned}\underline{S}(x,x,a) + \underline{S}(y,y,a) + \underline{S}(z,z,a) &= (2x+a) + (2y+a) + (2z+a)\\ &= 2x + 2y + 2z + 3a = x + y + z + x + y + z + 3a\\ &\ge x + y + z = \underline{S}(x,y,z)\end{aligned}$$

Hal tersebut dikarenakan $x,y,z \ge 0$ dan $a \ge 0$.

Jadi, kedua sifat terpenuhi. Oleh karena itu, $(X,\underline{S})$ adalah ruang *rectangular* S-metrik.

1.4.2. Titik Tetap[21]

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. $x \in X$ disebut titik tetap dari pemetaan $T: X \to X$ jika $Tx = x$.

1.4.3. Fungsi Kontraktif [21]

Diberikan (X,d) merupakan ruang metrik. Maka fungsi $T : X \to X$ disebut fungsi kontraksi jika terdapat $\gamma \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $x,y \in X$ berlaku

$$d(Tx,Ty) \le \gamma d(x,y).$$

Contoh 1.4.3 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan diketahui $X = [1,\infty)$ dengan fungsi $T : X \to X$ didefinisikan $T(x) = \frac{x}{2} + x^{-1}$.

Bukti.

Akan ditunjukkan T merupakan fungsi kontraksi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}|Tx - Ty| &= \left|\frac{x}{2} + x^{-1} - \left(\frac{y}{2} + y^{-1}\right)\right|\\ &= \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + x^{-1} - y^{-1}\right|\\ &= \left|\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right|\\ &\le \left|\frac{x-y}{2}\right| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|\\ &= \left|\frac{x-y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{xy}\right|\\ &= |x-y|\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right|\\ &= \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right||x-y|.\end{aligned}$$

Karena $X = [1, \infty)$ maka $x \geq 1$ dan $y \geq 1$ sehingga

$$xy \geq 1,$$

diperoleh

$$0 < \frac{1}{xy} \leq 1,$$

$$0 > -\frac{1}{xy} \geq -1,$$

maka

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \geq -\frac{1}{2},$$

$$0 \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Karena $0 \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$ maka T merupakan fungsi kontraksi Banach.

Teorema 1.4.3. [21] Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap dan $T : X \rightarrow X$ adalah fungsi kontraksi yang didefinisikan pada Definisi 1.4.3 maka T mempunyai titik tetap yang tunggal didalam X.

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang dilakukan merupakan jenis penelitian dasar atau murni. Metoode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur, yaitu dengan membaca literatur-literatur yang berhubungan dengan teorema-teorema yang berkaitan dengan perkembangan ruang metrik maupun titik tetap.

2.2 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Agustus 2024 s/d Desember 2024 di Universitas Hasanuddin

2.3 Prosedur Pelaksanaan Penelitian

Agar tujuan dari penelitian ini dapat tercapai, maka dilakukan Langkah-langkah berikut:

1. Mengumpulkan bahan atau materi yang berkaitan dengan titik tetap pada ruang S-metrik *rectangular* terkontrol.
2. Mendefinisikan ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
3. Membuat proposisi atau lemma untuk mendukung teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
4. Membuktikan teorema titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.
5. Membuat dan membuktikan teorema aplikasi titik tetap pada ruang *rectangular* S-metrik terkontrol.

2.4 Alur Kerja

Alur kerja dalam penelitian ini disajikan dalam bentuk diagram alir sebagai berikut: