BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu dasar yang dapat digunakan sebagai alat bantu memecahkan masalah dalam berbagai bidang ilmu. Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dalam hubungannya dengan berbagai disiplin ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa contoh dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah aljabar abstrak, teori bilangan dan teori graf.

Aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan dan sifat struktur-struktur di dalamnya. Salah satu yang di pelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah teori tentang grup. Grup adalah sebuah pasangan berurutan $(G,*)$ dimana G adalah sebuah himpunan dan " * " adalah sebuah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu yaitu tertutup, bersifat asosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemennya.

Dalam membicarakan struktur grup, sangat penting untuk mengetahui banyaknya elemen grup tersebut. Banyaknya elemen dari grup dinamakan order. Maka suatu grup dikatakan finite (berhingga) jika order grupnya berhingga, dan berlaku sebaliknya. Jika order dari grup tak hingga, maka grup tersebut dikatakan infinite (tak berhingga). Selanjutnya, grup yang dikaji adalah grup yang berorder hingga.

Selain aljabar abstrak, teori bilangan juga merupakan cabang dari matematika. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi mempunyai kaitan yang erat dengan perkembangan sistem numerasi, yaitu dalam hal menyatakan, menghubungkan dan mengoperasikan bilangan. Kajian lain yang populer sampai sekarang adalah perbedaan antara bilangan prima dan bilangan komposit. Bilangan prima adalah bilangan bulat positif lebih dari 1 yang tidak mempunyai faktor positif kecuali 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan bulat positif selain 1 dan bilangan prima disebut bilangan komposit. Faktorisasi prima adalah suatu proses pemfaktoran suatu bilangan bulat lebih dari 1yang dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali faktor-faktor prima. Salah satu cara untuk mencari faktor-faktor prima dari suatu bilangan bulat lebih dari 1 adalah dengan diagram pohon faktor prima.

Teori graf adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari struktur hubungan antara objek-objek yang disebut sebagai "simpul" atau "node" yang di hubungkan oleh "sisi" atau "edge". Graf juga menjadi salah satu pokok pembahasan dalam matematika diskrit, yang tujuannya untuk memvisualisasikan objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Teori ini pertama kali muncul pada tahun 1736, ketika seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler, memecahkan "Masalah Tujuh Jembatan Konigsberg". Pada saat itui Euler memikirkan kemungkinan untuk menyebrangi semua jembatan di Konigsberg, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Permasalahan serta solusi yang di hasilkan tersebut pada saat ini dikenal dengan teori graf.

Teori graf dapat didekati dengan pendekatan secara aljabar. Pendekatan ini dilakukan dengan mengkaji sifat-sifat yang ada dalam graf tersebut, sebagai contoh graf prima. Graf prima diperkenalkan pertama kali oleh Gruenberg dan Kegel pada tahun 1970. Williams (1981) memperkenalkan komponen graf prima dari grup berhingga.

Kondrat'ev (1990) membahas mengenai komponen graf prima dari grup berhingga yang sederhana. Dolfi dkk (2019) melakukan penelitian tentang graf prima pada beberapa kelas grup berhingga memiliki komplemen bipartit, dan menunjukkan bahwa graf prima tidak memuat siklus yang panjangnya ganjil yaitu graf bipartit. Chris dkk (2021) kemudian melakukan penelitian tentang graf prima dari beberapa kelas grup berhingga, dengan memberikan karakterisasi lengkap dari beberapa kelas grup.

Dari beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya tentang graf prima, penulis tertarik untuk meneliti mengenai graf prima dari grup berhingga dengan mengambil faktor prima dari order grup sebagai dasar dalam pembentukan graf. Kemudian penulis akan mengkaji tentang graf prima berdasarkan kajian teori grup dan teori graf, dan akan dituangkan dalam bentuk tulisan tesis dengan judul "Graf Faktor Prima dari Grup Berhingga".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk graf faktor prima dari grup berhingga;
2. Bagaimana hasil kombinasi graf faktor prima dari grup berhingga.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini hanya membahas tentang graf faktor prima dari grup berhingga dan dibatasi grup berhingga yang akan di gunakan yaitu kelas grup permutasi berupa grup dihedral berorde n $(Dn,*)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini yaitu untuk mengetahui bentuk graf yang terbentuk dari faktor prima suatu grup berhingga berupa grup dihedral.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini yaitu untuk memberikan informasi mengenai graf faktor prima dari grup berhingga, serta memberikan kontribusi dalam kemajuan dan perkembangan ilmu matematika pada umumnya dan aljabar pada khususnya.

1.6 Kajian Teori

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dasar dan konsep dasar pada grup, grup berhingga, graf dan terminologi graf, jenis-jenis graf serta penjelasan mengenai graf faktor prima dari grup yang akan digunakan pada bab selanjutnya.

1.6.1 Grup

Definisi 1.1

Himpunan tak kosong G dikatakan Grup jika dalam G didefinisikan sebuah operasi biner $(*)$ sedemikian sehingga*:*

(a) Untuk setiap $a, b \in G,$ maka $a * b \in G.$ (tertutup)

(b) Diberikan $a, b, c \in G,$ maka $a * (b * c) = (a * b) * c.$ (asosiatif)

(c) Terdapat $e \in G$, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$. (identitas)

(d) Untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$. (b sebagai a^{-1}) (invers). (Herstein, 1999).

Contoh : Misalkan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat dengan operasi " $+$ " , maka $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup karena memenuhi :

a. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$, merupakan operasi biner. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$ (tertutup).
b. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif.
c. Terdapat elemen identitas yaitu 0 terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
d. Untuk $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $-a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (terdapat invers di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi +).

Karena semua aksioma grup terpenuhi, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Definisi 1.2

Grup G dikatakan grup berhingga jika jumlah elemen grupnya berhingga. (Herstein, 1999).

Definisi 1.3

Suatu Grup G dikatakan abelian jika operasi binernya bersifat komutatif, $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$. (Herstein, 1999).

Definisi 1.4

Suatu elemen a dari grup G menghasilkan G dan merupakan generator untuk G jika $\langle a \rangle = G$. Suatu grup G dikatakan siklik jika terdapat beberapa elemen a di G yang menghasilkan G. (Fraleigh,2014)

Definisi 1.5

Jumlah elemen di G dikatakan orde/orde dari G dan dinotasikan $|G|$.(Herstein, 1999).

Contoh :

1. Orde dari $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ adalah $|\mathbb{Z}_3| = 3$
2. Orde dari grup simetri S_3 adalah $|S_3| = 3! = 6$

Definisi 1.6

Orde dari suatu elemen a dalam suatu grup $(G,*)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n, sedemikian sehingga $a^n = e$ ($e = 1$, untuk perkalian) dan $na = e$ ($e = 0$, untuk penjumlahan). Bila tidak ada bilangan seperti n tersebut, maka order dari unsur tersebut tak hingga. (Dummit, 2004).

Contoh : Diberikan grup $(\mathbb{Z}_6, +)$. $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Elemen identitasnya adalah 0, maka orde dari setiap elemen dalam $\mathbb{Z}_6$ adalah sebagai berikut:

- $o(0) = 1$
- $o(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$, maka $o(1) = 6$
- $o(2) = 2 + 2 + 2 = 0$, maka $o(2) = 3$
- $o(3) = 3 + 3 = 0$, maka $o(3) = 2$
- $o(4) = 4 + 4 + 4 = 0$, maka $o(4) = 3$
- $o(5) = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 0$, maka $o(5) = 6$

Theorema 1.1 (Theorema Lagrange)
Jika G grup berhingga,dan H adalah subgrup dari G, maka order dari H membagi order dari G. (Herstein, 1999*)*.

Contoh : Misalkan G grup berhingga, dan $|G| = 30$,
maka kemungkinan orde dari setiap subgrup H di G ialah
$|H| = 1, |H| = 2, |H| = 3, |H| = 5, |H| = 6, |H| = 10, |H| = 15, |H| = 30,$
Karena habis membagi 30.

Theorema 1.2 *Theorema Cauchy*
Jika p adalah bilangan prima dan p membagi order dari G, maka G memiliki elemen dengan order p. (Herstein, 1999).

Theorema 1.3
Misalkan a elemen dari grup G. Jika $a^m = e$. Maka $Ord(a)$ membagi m. (Badawi, 2001)

Theorema 1.4
Jika $p|ab$, p bilangan prima dan n, m bilangan positif maka $p|a \; atau \; p|b$. Secara umum, jika $p|a_1, a_2, \ldots, a_n$ maka p membagi paling tidak satu faktor a_i dari hasilnya. (Niven, dkk, 1991)

Theorema 1.5
Misalka*n* n, m, c bilangan positif. Jika $FPB(c, m) = 1$ dan c membagi nm, maka c membagi n. (Badawi, 2001*)*

Theorema 1.6
Oder elemen dari hasil kali langsung dua grup hingga adalah kelipatan persekutuan terkecil dari order elemen grup hingga, disimbol:

$$|g_1, g_2, \ldots, g_n| = kpk(|g_1|, |g_2|, \ldots, |g_n|).$$ (Gallian, 2010)

Definisi 1.7
Misalkan A himpunan berhingga $\{1,2, \ldots, n\}$. Grup dari semua permutasi A adalah grup simetris pada suku ke-*n*, dan dinotasikan S_n.
S_n memiliki elemen sebanyak $n!$, dimana

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots (3)(2)(1).$$ (Fraleigh,2014)

Definisi 1.8
Bilangan bulat a membagi habis –bilangan bulat b (ditulis $a|b$) jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $b = ak$. Jika a tidak membagi habis b maka ditulis $a \nmid b$. *(Niven, dkk, 1991)*

1.6.2 Grup Dihedral
Grup simetris dari dari poligon beraturan disebut grup Dihedral dengan orde $2n$, dan berisi subgrup siklik dengan orde n yang terdiri dari rotasi; dan setiap elemen diluar subgrup siklik adalah refleksi, dan memiliki orde 2. Dinotasikan dengan D_{2n} atau beberapa menuliskan dengan notasi D_n, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $n \geq 3$. Misalkan D_n adalah suatu grup yang didefinisikan dengan rotasi (r) dan refleksi (s) untuk $s, r \in D_n$ yang didapatkan dari penerapan pertama s kemudian r dalam segi-n dari simetri (simetri sebagai fungsi segi-n, jadi sr merupakan fungsi komposisi. Jika s, r merupakan akibat permutasi titik-titik yang berturut-turut yaitu σ, τ maka sr merupakan akibat $\sigma^\circ \tau$. Operasi biner di D_n adalah asosiatif karena fungsi komposisinya adalah asosiatif. Identitas dari D_n merupakan dihedral dari simetri yang di notasikan dengan 1, dan invers dari $r \in D_n$ merupakan kebalikan semua putaran dari simetri r (jadi jika r merupakan efek permutasi pada titik-titik σ, r^{-1} akibat dari σ^{-1}).

Grup dihedral akan di gunakan secara luas dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya, serta membantu mengamati D_n sebagai grup dihedral, yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1},$ dan $r^n = 1,$ sehingga $o(r) = n, n \in \mathbb{N}$
2. $o(s) = 2$
3. $s \neq r^i$, untuk sebarang $i, \forall i \in \mathbb{Z}^+$
4. $r^i s \neq r^j s$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi $D_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1} s\}$, yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $r^i s^k$ untuk suatu $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$
5. $sr = sr^{-1}$
6. $r^i s = sr^{n-i}$, untuk semua $0 \leq i \leq n$. Hal ini menunjukkan cara bagaimana mengubah s dengan r. (Dummit, 2004).

Berdasarkan definisi diatas, diketahui juga bahwa $o(r^i) = \frac{n}{Fpb(i,n)}$ dan $o(r^i) = 2$, untuk semua $i = 1,2,3, \dots, n$.

1.6.3 Graf
Definisi 2.1
Suatu Graf G adalah sebuah pasangan (V, E) dimana V adalah sebuah himpunan dan E adalah sebuah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut titik dan $V(G)$ disebut himpunan titik dari graf, dan elemen-elemen dari E disebut sisi dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari graf. (Jacques Verstraete,2020)

Definisi 2.2
Jika titik v adalah endpoint/titik ujung dari sisi e, maka v dikatakan terkait (incident) dengan sisi e, dan e terkait dengan v. (Gross & Yellen, 2003)

Definisi 2.3

Titik u bertetangga (adjecent) dengan titik v jika keduanya di hubungkan oleh sebuah sisi. (Gross & Yellen, 2003)

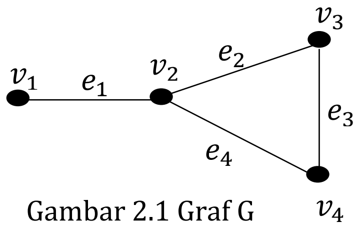
Definisi 2.4

Sisi yang bertetangga (adjecent edges) adalah dua sisi yang memiliki titik ujung (endpoint) yang sama. (Gross & Yellen, 2003)

Definisi 2.5

Derajat dari sebuah titik v pada graf G, dinotasikan dengan $\deg(v)$, adalah jumlah dari sisi-sisi yang tepat ada di v ditambah 2 kali jumlah dari self-loop. (dalam graf sederhana/simple graph, derajatnya hanyalah jumlah dari tetangga/neighbors). (Gross & Yellen, 2003)

Contoh**:**



Gambar 2.1 Graf G

Berdasarkan gambar 2.1 di ketahui bahwa himpunan titik dan sisi dari Graf G adalah :

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Dari gambar 2.1 , diperoleh juga :

1) Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, tetapi titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_3
2) Sisi e_1 terkait/incident dengan titik v_1 dan v_2.
3) $\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = \deg(v_4) = 2$
4) Sisi yang bertetangga adalah sisi e_1 dan e_2

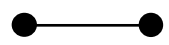
Definisi 2.6

Graf trivial adalah graf yg hanya memiliki satu titik dan tidak memiliki sisi.

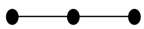
Definisi 2.7

Graf terhubung yang berderajat 2 adalah graf siklus, dinotasikan C_n, dengan n titik. Graf yang diperoleh dari C_n dengan menghapus sebuah sisi adalah graf lintasan dengan n titik, dinotasikan P_n . (Robin J. Wilson,1996)

Contoh



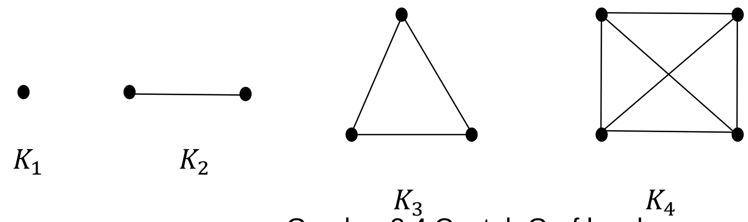
Gambar 2.2 Lintasan P_2



Gambar 2.3 Lintasan P_3

Definisi 2.8

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunya sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n-1)/2$.



Gambar 2.4 Contoh Graf lengkap

Definisi 2.9

Graf prima dari grup berhingga adalah graf dimana titiknya adalah bilangan prima yang membagi order dari grup, dengan dua titik yang di hubungkan oleh sisi jika dan hanya jika hasil kalinya membagi order dari elemen grup.(Chris Florez, dkk, 2021)

Contoh: Diberikan grup siklik $C_{30} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots,27,28,29\}$. Bagaimana bentuk graf prima dari grup C_{30}.

Jawab:

Berdasarkan definisi graf prima, himpunan titik dari suatu grup berhingga adalah bilangan prima yang membagi order dari grup, maka :

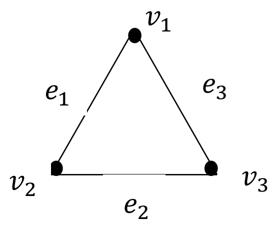
Orde dari grup $|C_{30}|$=30. Himpunan pembagi prima dari $C_{30} = \{2,3,5\}$. Sehingga diperoleh $V(C_{30}) = \{v_1, v_2, v_3\} = \{2,3,5\}$.

Selanjutnya akan dicari himpunan sisi dari titik yang terbentuk dari grup berhingga, berdasarkan definisi graf prima, dua titik akan dihubungkan oleh sisi jika dan hanya jika hasil kali titiknya membagi order dari elemen grup, sehingga:

Untuk titik {2,3,5} diperoleh :

- $2 \times 3 = 6$ habis membagi $o(1) = 30$, $o(5) = 6$ sehingga terbentuk sisi {(2,3)}.
- $2 \times 5 = 10$ habis membagi $o(1) = 30$, $o(3) = 10$ sehingga terbentuk sisi {(2,5)}.
- $3 \times 5 = 15$ habis membagi $o(1) = 30$, $o(2) = 15$ sehingga terbentuk sisi {(3,5)}.

Jadi dipeoleh sisi $E(C_{30}) = \{(e_1), (e_2), (e_3)\}. = \{(2,3), (2,5), (3,5)\}$.



Gambar 2.5 Graf Prima

Contoh: Diberikan grup Dihedral dengan $n = 3$, tentukan graf prima dari grup D_3.

Diketahui : $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, rs^2\}$, $|D_3| = 6$, himpunan pembagi prima dari $D_3 = \{2, 3\}$ dikarenakan faktor prima yang membagi 6 adalah 2 dan 3, yaitu $6 = 2 \times 3$.

Maka :

$V(D_3) = \{v_1, v_2\} = \{2,3\}$

Selanjutnya akan di cari sisi e_1 yang menghubungkan kedua titik yaitu titik $v_1 = 2$ dan $v_2 = 3$.

Akan di cari orde dari masing-masing elemen grup D_3, yaitu :

$o(e) = 1, o(r) = 3, o(r^2) = 3, o(s) = 2, o(rs) = 2, o(rs^2) = 2$

Karena tidak terdapat $2 \times 3 = 6$ yang membagi orde dari elemen grup D_3 maka tidak terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik v_1, v_2. Sehingga $E(D_3) = \{\emptyset\}$

Gambar 2.6 Graf Prima dari Grup D_3

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

Dalam bab ini, akan dijelaskan mengenai jenis penelitian dan tahapan penelitian yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan beberapa literatur. Literatur yang digunakan berupa buku dan jurnal tentang penelitian sebelumnya yang relevan dengan masalah dan tujuan yang akan dicapai dalam penelitian ini.

2.2 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Adapun langkah-langkah yang di gunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Mendefinisikan graf prima dari grup $\Gamma(G)$;
2. Diberikan grup dengan elemen berhingga yaitu Grup dihedral D_n;
3. Menentukan orde grup dan orde elemen grup dihedral D_n untuk menentukan jumlah titik dan sisi pada graf prima yang akan di bentuk;
4. Membuat pola graf prima yang terbentuk dari grup dihedral;
5. Mendefinisikan graf prima yang terdiri dari 2 grup berhingga $\Gamma(D_m) * \Gamma(D_n)$;
6. Membentuk graf prima baru yang terbentuk dari 2 graf prima grup berhingga $\Gamma(D_m) * \Gamma(D_n)$;
7. Menunjukkan graf prima yang terbentuk dari grup berhingga $\Gamma(D_m) * \Gamma(D_n)$ serta menunjukkan pola yang di hasilkan.

2.3 Diagram Alir Penelitian

Mendefinisikan Graf Prima dari Grup $\Gamma(G)$.

↓

Menentukan Grup Berhingga yang akan digunakan, yaitu Grup Dihedral D_n berorde $2n$.

↓

Menentukan orde grup $|D_n|$ dan orde elemen grup $o(g)$, untuk menentukan titik dan sisi pada graf prima yang akan di bentuk.

↓

Membentuk graf prima dari grup dihedral $\Gamma(D_n)$.

↓

Mendefinisikan graf prima yang terdiri dari 2 grup berhingga $\Gamma(D_m) * \Gamma(D_n)$.

↓

Membentuk graf prima baru yang terbentuk dari 2 graf prima grup berhingga $\Gamma(D_m) * \Gamma(D_n)$.

↓

Menunjukkan graf prima yang terbentuk dari grup berhingga $\Gamma(D_m) * \Gamma(D_n)$ serta menunjukkan pola yang di hasilkan.