

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

*Seiches* dan resonansi adalah dua fenomena yang berkaitan dan dapat menimbulkan kerusakan pada wilayah pesisir. *Seiches* adalah gelombang berdiri yang terjadi pada basin tertutup seperti danau, kolam, dan waduk ataupun pada basin semi tertutup seperti pelabuhan. *Seiches* memiliki periode yang sama dengan periode resonansi alami basin yang ditentukan oleh bentuk topografi dan kedalaman basin yang dapat berkisar puluhan detik hingga beberapa jam. Pada umumnya, *seiches* dihasilkan oleh gelombang eksternal seperti tekanan atmosfer, angin, dan gempa (Wilson, 1972).

Osilasi pelabuhan adalah salah satu jenis *seiche* yang terjadi pada basin semi tertutup. Secara umum, osilasi pelabuhan dihasilkan oleh gelombang panjang yang datang dari laut lepas menuju pelabuhan. Jika periode gelombang bersesuaian dengan periode resonansi alami pelabuhan, maka dapat terjadi resonansi yang dapat mengakibatkan kerusakan pada kapal yang berlabuh, sehingga dapat menyebabkan keterlambatan operasi bongkar muat di pelabuhan, mengganggu aktivitas wilayah pesisir, dan merusak fasilitas di sekitar pelabuhan. Sifat osilasi pelabuhan menunjukkan bahwa gerakan vertikal yang relatif kecil (osilasi permukaan laut) dapat diikuti dengan gerakan horizontal yang besar (Rabinovich, 2009).

Wilson (1972) dan Rabinovich (2009) menemukan nilai dari periode resonansi alami untuk beberapa bentuk topografi basin tertutup dan basin semi tertutup secara eksperimen. Hwang dan Tuck (1970) mengembangkan sebuah teori untuk menghitung osilasi pelabuhan dengan kedalaman konstan dan bentuk topografi tak tentu. Teori ini didasarkan pada solusi persamaan integral tunggal. Hasil numerik yang diperoleh untuk pelabuhan jenis topografi persegi panjang kemudian dibandingkan dengan solusi analitik maupun eksperimen. Lee (1971) meneliti osilasi yang disebabkan oleh gelombang di pelabuhan dengan kedalaman konstan dan bentuk topografi tak tentu yang terhubung dengan laut terbuka secara analitik dan eksperimen. Solusi dari persamaan Helmholtz diformulasikan sebagai persamaan integral kemudian melakukan pendekatan dengan persamaan matriks.

Beberapa penelitian dalam beberapa tahun terakhir menggunakan persamaan air dangkal satu dimensi dan metode numerik volume hingga *staggered grid*, yang membedakan di antara penelitian tersebut adalah bentuk basin dan modifikasi yang digunakan. Magdalena dan Rif'atin (2019) mengamati model gelombang yang menuju pelabuhan dengan dan tanpa media berpori pada bagian tepi. Model tersebut diselesaikan secara analitik untuk mendapatkan nilai periode resonansi alami gelombang dari beberapa bentuk topografi basin semi tertutup dan divalidasi dengan solusi numerik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa keberadaan media berpori efektif mengurangi nilai amplitudo gelombang, sehingga dapat mencegah terjadinya resonansi. Selain itu, Magdalena dan Rif'atin (2019) juga mengkaji profil gelombang

saat resonansi terjadi pada basin tertutup dengan beberapa bentuk topografi. Hasil penelitian menunjukkan skema numerik bersesuaian dengan solusi analitik, hal ini menggambarkan fenomena resonansi sebenarnya.

Matin, dkk (2020) mengembangkan model matematis untuk menyelidiki fenomena resonansi *seiches* pada basin tertutup dan menganalisis pengaruh *linear bottom friction* dan efek non-linearitas terhadap resonansi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa *bottom friction* paling efektif pada basin topografi persegi panjang dalam mencegah resonansi. Karima, dkk (2020) meninjau fenomena resonansi di danau jenis topografi parabola dan kuartik. Solusi analitik yang diperoleh dari metode pemisahan variabel kemudian dibandingkan dengan solusi numerik. Hasil simulasi menunjukkan amplitudo gelombang maksimum terjadi pada jenis parabola dibandingkan topografi jenis kuartik. Magdalena, dkk (2021) membuat simulasi fenomena resonansi *seiches* di beberapa jenis topografi basin semi tertutup dan mengamati profil gelombang akibat fenomena tersebut. Perbandingan dilakukan antara periode resonansi alami solusi analitik dan solusi numerik di setiap jenis topografi basin untuk melakukan validasi skema numerik yang telah dibentuk. Hasil simulasi menunjukkan adanya peningkatan amplitudo gelombang secara bertahap pada setiap bentuk topografi basin.

Matin, dkk (2022) mengkaji pengaruh *linear bottom friction* terhadap fenomena resonansi dengan melakukan simulasi osilasi pelabuhan untuk beberapa bentuk topografi basin semi tertutup. Persamaan yang digunakan adalah persamaan linear air dangkal, yang dimodifikasi dengan penambahan *linear bottom friction* ke dalam persamaan momentum. Model yang dimodifikasi kemudian diselesaikan secara analitik untuk menentukan periode resonansi alami gelombang yang bergerak menuju pelabuhan. Hasil penelitian menyatakan bahwa *linear bottom friction* berfungsi dengan baik sebagai upaya pencegahan resonansi di pelabuhan bentuk topografi persegi panjang dan semi parabola, sedangkan untuk topografi segitiga tidak berfungsi dengan baik.

Sebagai perbedaan dari beberapa penelitian sebelumnya, penelitian ini melakukan simulasi numerik fenomena resonansi pelabuhan menggunakan metode numerik MacCormack dan modifikasi persamaan linear air dangkal dengan penambahan *nonlinear bottom friction*. Metode MacCormack merupakan metode beda hingga eksplisit dengan akurasi orde dua dalam ruang dan waktu (MacCormack, 1969). Metode MacCormack dipilih karena dapat memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode beda hingga eksplisit lainnya (Hoffmann dan Chiang, 2000; Said dkk, 2017). Solusi analitik yang telah diperoleh pada penelitian-penelitian sebelumnya selanjutnya akan divalidasi menggunakan simulasi numerik.

## 1.2 Rumusan Masalah

Adapun masalah yang dirumuskan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan solusi numerik dari persamaan linear air dangkal satu dimensi menggunakan metode MacCormack untuk mengamati fenomena resonansi pada tiga jenis topografi pelabuhan?
2. Bagaimana pengaruh jenis dan nilai koefisien *bottom friction* terhadap fenomena resonansi yang terjadi pada tiga jenis topografi pelabuhan?
3. Bagaimana pengaruh bentuk topografi pelabuhan terhadap fenomena resonansi yang terjadi?

## 1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, permasalahan dibatasi pada fenomena resonansi pelabuhan untuk tiga bentuk topografi basin semi tertutup, yaitu persegi panjang, segitiga, dan semi parabola dengan melakukan simulasi numerik, yaitu metode MacCormack dan menggunakan persamaan pembangun yaitu persamaan linear air dangkal satu dimensi dengan tiga kasus yaitu tanpa *bottom friction*, dengan modifikasi penambahan *linear bottom friction*, dan *nonlinear bottom friction* pada persamaan momentum.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang akan dicapai pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan solusi numerik dari persamaan linear air dangkal satu dimensi menggunakan metode MacCormack untuk mengamati fenomena resonansi pada tiga jenis topografi pelabuhan.
2. Mengetahui pengaruh jenis dan nilai koefisien *bottom friction* terhadap fenomena resonansi yang terjadi pada tiga jenis topografi pelabuhan.
3. Mengetahui pengaruh bentuk topografi pelabuhan terhadap fenomena resonansi yang terjadi.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pengetahuan mengenai fenomena resonansi pelabuhan dan pengaruh *bottom friction* yang terjadi pada tiga jenis topografi pelabuhan, hal ini merupakan salah satu upaya pencegahan dampak berbahaya dari osilasi pelabuhan.

## 1.6 Kajian Teori

### 1.6.1 Osilasi Pelabuhan

Kata *seiche* berasal dari bahasa Latin yaitu *siccus*, yang berarti kering atau terbuka. *Seiches* adalah gelombang berdiri yang terjadi pada wilayah perairan yang tertutup sebagian atau seluruhnya, seperti danau, waduk, kolam renang, teluk, dan pelabuhan. *Seiches* umumnya disebabkan oleh angin kencang, perubahan tekanan atmosfer, gempa bumi, dan tsunami. Bentuk geometri topografi dan kedalaman basin

menentukan periode resonansi *seiches* yang dapat berkisar puluhan detik hingga beberapa jam (Wilson, 1972).

Osilasi pelabuhan adalah salah satu jenis *seiche* yang dapat terjadi ketika gelombang panjang bergerak memasuki basin semi tertutup yang terhubung dengan laut terbuka. Fenomena ini umumnya terjadi pada teluk, selat, inlet, dan pelabuhan. Resonansi dapat terjadi apabila periode gelombang bersesuaian dengan periode resonansi alami pelabuhan, sehingga mengakibatkan peningkatan gelombang dan gangguan terhadap aktivitas pelabuhan (Rabinovich, 2009).

## 1.6.2 Persamaan Linear Air Dangkal

Persamaan air dangkal adalah sistem persamaan diferensial yang berlaku untuk aliran fluida dengan massa jenis konstan dimana skala aliran horizontal jauh lebih besar dibandingkan dengan skala aliran vertikal (kedalaman aliran) (Vallis, 2006). Persamaan ini diturunkan dari persamaan Navier-Stokes. Persamaan air dangkal terdiri dari dua persamaan yang diperoleh dari persamaan kekekalan massa dan momentum.

### 1.6.2.1 Persamaan Kekekalan Massa (Kontinuitas)

Bentuk turunan dari kekekalan massa yang dikenal sebagai persamaan kontinuitas, dapat dituliskan sebagai berikut (Hoffmann & Chiang, 2000):

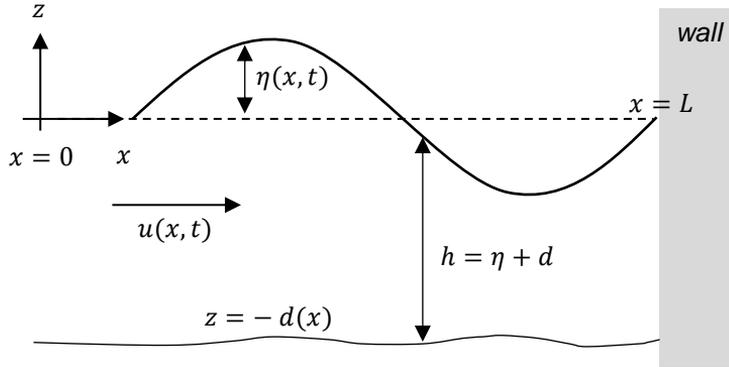
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.1)$$

dimana  $\rho$  adalah kepadatan,  $t$  adalah waktu, dan  $\vec{u}$  adalah vektor kecepatan. Dalam keadaan *steady state*, dimana fluida tidak bergantung pada waktu atau  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , Persamaan (1.1) menjadi,

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.2)$$

Untuk memperoleh persamaan air dangkal, fluida diasumsikan sebagai aliran bersifat *incompressible*, sehingga persamaan kontinuitas menjadi (Hoffmann & Chiang, 2000),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$



**Gambar 1.1.** Ilustrasi untuk menurunkan persamaan air dangkal.

Selanjutnya mengintegrasikan Persamaan (1.3) dari permukaan dasar  $z = -d$  sampai permukaan atas  $z = \eta$ , sehingga diperoleh,

$$\int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + w_{\eta} - w_{-d} = 0 \quad (1.4)$$

Syarat batas kondisi permukaan atas dan permukaan dasar terdiri dari dua jenis. Kondisi kinematik menjelaskan bahwa partikel air tidak dapat melewati batas permukaan atas dan permukaan dasar. Untuk permukaan dasar yang padat, komponen kecepatan normal harus dihilangkan (Vreugdenhil, 1994):

$$u_{-d} \frac{\partial(-d)}{\partial x} + v_{-d} \frac{\partial(-d)}{\partial y} = w_{-d} \quad (1.5)$$

Pada permukaan atas, kecepatan normal relatif harus dihilangkan (Vreugdenhil, 1994):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_{\eta} \quad (1.6)$$

Selanjutnya kondisi batas dinamik menjelaskan tentang gaya-gaya yang bekerja pada batas permukaan atas dan permukaan dasar. Pada permukaan dasar, diasumsikan bahwa kondisi tanpa *slip* terjadi,

$$u_{-d} = v_{-d} = w_{-d} = 0 \quad (1.7)$$

sehingga Persamaan (1.4) menjadi,

$$\int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + w_{\eta} = 0 \quad (1.8)$$

Aturan integrasi Leibniz didefinisikan sebagai berikut (Dean & Dalrymple, 1991):

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b f(x, z) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z} dx + \left[ f \frac{\partial b}{\partial z} \right]_{x=b} - \left[ f \frac{\partial a}{\partial z} \right]_{x=a} \quad (1.9)$$

Dengan menggunakan aturan integrasi Leibniz diperoleh,

$$\int_{-d}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_{-d} \frac{\partial(-d)}{\partial x} \quad (1.10)$$

dan,

$$\int_{-d}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v dz - v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_{-d} \frac{\partial(-d)}{\partial y} \quad (1.11)$$

Substitusi Persamaan (1.10) dan (1.11) ke dalam Persamaan (1.8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_{-d} \frac{\partial(-d)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v dz - v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ + v_{-d} \frac{\partial(-d)}{\partial y} + w_{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dengan asumsi Persamaan (1.7), maka Persamaan (1.12) menjadi,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + w_{\eta} = 0 \quad (1.13)$$

Dari persamaan (1.6), persamaan (1.13) menjadi,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v dz = 0 \quad (1.14)$$

Teorema nilai rata-rata didefinisikan (Dean & Dalrymple, 1991):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(\eta - (-d))} \int_{-d}^{\eta} u dz \\ u &= \frac{1}{(\eta + d)} \int_{-d}^{\eta} u dz \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata pada persamaan (1.15) dan Gambar 1.1, dapat dilihat bahwa total ketinggian air dinotasikan  $\eta + d = h$ , dimana  $d$  adalah kedalaman konstan dan  $\eta$  menunjukkan peninggian permukaan air, sehingga diperoleh persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (1.16)$$

### 1.6.2.2 Persamaan Kekekalan Momentum

Penerapan hukum kedua Newton yang berfungsi sebagai elemen turunan dalam sistem koordinat inersial menghasilkan persamaan momentum. Jika  $\sigma$  digunakan untuk mendeskripsikan tegangan yang bekerja pada elemen turunan, komponen persamaan momentum Navier-Stokes pada koordinat kartesius dituliskan dalam bentuk sebagai berikut (Hoffmann & Chiang, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= fv + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{xz}) \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -fu + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{yz}) \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz}) \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Parameter koriolis  $f = 2\Omega \sin \phi$  merupakan fungsi dari kecepatan angular bumi dan  $g$  adalah percepatan gravitasi bumi. Tegangan  $\sigma$  umumnya dituliskan dalam bentuk tekanan  $p$  dan tegangan geser  $\tau$ . Dalam notasi tensor dapat dituliskan yaitu:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.18)$$

dengan  $\delta_{ij}$  adalah delta Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = j \\ 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dengan menggunakan Persamaan (1.18) dan mengabaikan efek koriolis, Persamaan (1.17) dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (1.21)$$

Penaksiran hidrostatik hanya berkaitan dengan komponen vertikal dari persamaan momentum (1.21). Kecepatan vertikal jauh lebih rendah daripada kecepatan horizontal, karena skala horizontal lebih panjang dibandingkan dengan skala vertikal. Persamaan momentum vertikal dapat direduksi ke dalam hukum hidrostatik sederhana, jika aliran horizontal lebih dominan dan percepatan aliran vertikalnya lebih kecil daripada percepatan gravitasi. Asumsi hidrostatik menyederhanakan Persamaan (1.21) menjadi (Kowalik & Murty, 1993),

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad (1.22)$$

Selanjutnya mengintegrasikan Persamaan (1.22) dari permukaan dasar  $z = -d$  hingga permukaan atas  $z = \eta$ , diperoleh,

$$\int_{-d}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \int_{-d}^{\eta} \rho g dz$$

$$p(\eta) - p(-d) = -\rho g(\eta - (-d))$$

$$p(-d) = p(\eta) + \rho g(\eta - (-d))$$

$$p(-d) = p_a + \rho g(\eta - (-d)) \quad (1.23)$$

Tekanan pada permukaan atas  $p(\eta)$  bernilai sama dengan tekanan atmosfer  $p_a$ . Dengan mengabaikan tekanan atmosfer  $p_a$  dan  $\rho$  diasumsikan bernilai konstan, dari Persamaan (1.23), (1.19) dan (1.20) diperoleh (Vreugdenhil, 1994),

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.25)$$

Substitusi Persamaan (1.24) dan (1.25) ke Persamaan (1.19) dan (1.20),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (1.27)$$

Persamaan (1.3) masing-masing dikalikan dengan  $u$  dan  $v$  diperoleh,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.28)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

Kemudian Persamaan (1.26) dan (1.27) masing-masing dijumlahkan dengan Persamaan (1.28) dan (1.29),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (1.31)$$

Selanjutnya integralkan Persamaan (1.30) dan (1.31) dari permukaan dasar  $z = -d$  hingga permukaan atas  $z = \eta$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) dz + u_{\eta} w_{\eta} - u_{-d} w_{-d} \\ = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) dz + v_{\eta} w_{\eta} - v_{-d} w_{-d} \\ = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (1.33)$$

Dari asumsi Persamaan (1.7) maka,

$$\begin{aligned} \int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) dz + u_{\eta} w_{\eta} \\ = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-d}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) dz + v_{\eta} w_{\eta} \\
& = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Dengan menggunakan aturan integrasi Leibniz pada Persamaan (1.9) dan asumsi Persamaan (1.7) diperoleh,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} u dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u^2 dz - u_{\eta}^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} uv dz - u_{\eta} v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
& + u_{\eta} w_{\eta} = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} v dz - v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} uv dz - u_{\eta} v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v^2 dz - v_{\eta}^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
& + v_{\eta} w_{\eta} = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Kemudian,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} uv dz \\
& - u_{\eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_{\eta} \right) \\
& = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz
\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v^2 dz \\
& - v_{\eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_{\eta} \right) \\
& = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Dengan menggunakan Persamaan (1.6), Persamaan (1.38) dan (1.39) menjadi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} u \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u^2 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} uv \, dz \\ = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} v \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} uv \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v^2 \, dz \\ = \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (1.41)$$

Tegangan permukaan atas  $\tau_s$  pada  $z = \eta$  dinyatakan sebagai berikut (Vreugdenhil, 1994):

$$\begin{aligned} \tau_{sx} &= -\tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \tau_{xz} \\ \tau_{sy} &= -\tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \tau_{yz} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Pada permukaan dasar  $z = -d$ , tegangan permukaan dasar  $\tau_b$  dituliskan:

$$\begin{aligned} \tau_{bx} &= -\tau_{xx} \frac{\partial(-d)}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial(-d)}{\partial y} + \tau_{xz} \\ \tau_{by} &= -\tau_{xy} \frac{\partial(-d)}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial(-d)}{\partial y} + \tau_{yz} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Dengan menggunakan aturan Integrasi Leibniz Persamaan (1.9) pada bentuk tegangan geser ( $\tau$ ) yang terdapat pada Persamaan (1.40) dan (1.41) diperoleh,

$$\begin{aligned} \int_{-d}^{\eta} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xx} \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xy} \, dz + \tau_{xz} \Big|_{\eta} \\ - \tau_{xz} \Big|_{-d} - \tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial(-d)}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial(-d)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\int_{-d}^{\eta} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xy} \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} \tau_{yy} \, dz + \tau_{yz} \Big|_{\eta} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}
& -\tau_{yz}|_{-d} - \tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial(-d)}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
& \quad + \tau_{yy} \frac{\partial(-d)}{\partial y}
\end{aligned}$$

Kemudian menggunakan Persamaan (1.42) dan (1.43), Persamaan (1.44) dan (1.45) menjadi,

$$\int_{-d}^{\eta} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xy} dz + \tau_{sx} - \tau_{bx} \quad (1.46)$$

$$\int_{-d}^{\eta} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xy} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} \tau_{yy} dz + \tau_{sy} - \tau_{by}$$

Substitusi Persamaan (1.46) ke dalam Persamaan (1.40) dan (1.41) diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} uv dz &= \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} dz \\
&+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xy} dz + \tau_{sx} - \tau_{bx} \right) \quad (1.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{-d}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} v^2 dz &= \int_{-d}^{\eta} -g \frac{\partial \eta}{\partial y} dz \\
&+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} \tau_{xy} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} \tau_{yy} dz + \tau_{sy} - \tau_{by} \right) \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema nilai rata-rata pada Persamaan (1.15), Persamaan (1.47) dan (1.48) menjadi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [u(\eta + d)] + \frac{\partial}{\partial x} [u^2(\eta + d)] + \frac{\partial}{\partial y} [uv(\eta + d)] &= -g \frac{\partial}{\partial x} [\eta(\eta + d)] \\
&+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}(\eta + d)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\eta + d)}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{sx} - \tau_{bx}) \quad (1.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [v(\eta + d)] + \frac{\partial}{\partial x} [uv(\eta + d)] + \frac{\partial}{\partial y} [v^2(\eta + d)] &= -g \frac{\partial}{\partial y} [\eta(\eta + d)] \\
&+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}(\eta + d)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}(\eta + d)}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{sy} - \tau_{by}) \quad (1.50)
\end{aligned}$$

Suku-suku  $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$  dan tegangan permukaan atas  $\tau_{sx}$ ,  $\tau_{sy}$  pada Persamaan (1.49) dan (1.50) diabaikan sehingga diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho(\eta + d)} \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho(\eta + d)} \quad (1.52)$$

Tegangan permukaan dasar laut bernilai (Kowalik & Murty, 1993):

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = r|V|u \quad (1.53)$$

$$\frac{\tau_{by}}{\rho} = r|V|v \quad (1.54)$$

dimana  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$  dan  $r$  adalah koefisien gesekan permukaan dasar. Jika Persamaan (1.53) dan (1.54) direduksi, dimana  $r|V| = k$  sebagai konstan, maka bentuk linear Persamaan (1.53) dan (1.54) menjadi,

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = ku \quad (1.55)$$

$$\frac{\tau_{by}}{\rho} = kv \quad (1.56)$$

Dapat dilihat bahwa Persamaan Kekekalan Massa (1.16), Persamaan Kekekalan Momentum (1.51) dan (1.52) adalah persamaan nonlinear. Selanjutnya dilakukan linearisasi untuk mendapatkan solusi analitik, diasumsikan bahwa  $u, v$  bernilai sangat kecil, dan  $\eta$  bernilai sangat kecil dibandingkan dengan  $h$  maka dapat dituliskan bahwa  $h(x) = d(x)$ , sehingga Persamaan (1.16), (1.51) dan (1.52) menjadi (Dean & Dalrymple, 1991):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{bx}}{\rho h} = 0 \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{by}}{\rho h} = 0 \quad (1.59)$$

Penelitian ini membahas persamaan linear air dangkal satu dimensi dengan tiga kasus, yaitu:

1. Tanpa *bottom friction* (gesekan dasar)

Pada kasus ini suku  $\tau_{bx}$  pada Persamaan (1.58) diabaikan, diperoleh:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (1.61)$$

2. Dengan *linear bottom friction* (gesekan dasar linear)

Pada kasus ini substitusi Persamaan (1.55) ke Persamaan (1.58), diperoleh:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -C_f u \quad (1.63)$$

dimana  $C_f = \frac{k}{h}$  adalah koefisien gesekan permukaan dasar.

3. Dengan *nonlinear bottom friction* (gesekan dasar tidak linear)

Pada kasus ini substitusi Persamaan (1.53) ke Persamaan (1.58), diperoleh:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -C_f u |u| \quad (1.65)$$

dimana  $C_f = \frac{k}{h}$  adalah koefisien gesekan permukaan dasar.

### 1.6.3 Metode MacCormack

Metode MacCormack pertama kali diperkenalkan oleh Robert W. MacCormack pada tahun 1969 untuk menyelesaikan masalah komputasi dinamika fluida. Metode ini merupakan metode beda hingga eksplisit dengan akurasi orde dua dalam ruang dan waktu, secara komputasi lebih efisien, sederhana dan mudah dibandingkan dengan metode implisit (MacCormack, 1982). Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode ini sangat baik untuk beberapa masalah aliran fluida (Said, Ribal, & Mahie, 2017; Fikri dan Sumardi, 2022).

Metode MacCormack terdiri dari dua tahap, yaitu tahap prediktor dan tahap korektor. Misal diberikan persamaan linear adveksi satu dimensi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.66)$$

dimana  $\alpha$  merupakan kecepatan konstan dan  $\alpha > 0$ . Persamaan prediktor metode MacCormack diturunkan menggunakan beda hingga maju orde pertama. Skema beda maju dari  $u$  terhadap  $t$  menggunakan ekspansi deret Taylor berikut,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t)^3 \quad (1.67)$$

berdasarkan persamaan (1.67) diperoleh,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (1.68)$$

Selanjutnya skema beda maju orde pertama dari  $u$  terhadap  $x$  menggunakan ekspansi deret Taylor berikut,

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (1.69)$$

kemudian dari persamaan (1.69) diperoleh,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.70)$$

substitusi persamaan (1.68) dan (1.70) ke persamaan (1.66),

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.71)$$

Pada tahap ini selanjutnya nilai sementara  $u_i^{n+1}$  dituliskan dengan notasi  $u_i^{\overline{n+1}}$ , sehingga diperoleh persamaan prediktor metode MacCormack sebagai berikut:

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha(u_{i+1}^n - u_i^n)) \quad (1.72)$$

Persamaan korektor menggunakan beda hingga mundur orde pertama untuk turunan pertama terhadap variabel waktu dan ruang. Pada turunan terhadap variabel ruang menggunakan nilai  $u$  sementara pada tingkat waktu  $n + 1$  yang dituliskan dengan notasi  $u_i^{\overline{n+1}}$ . Kemudian nilai  $u_i^{n+\frac{1}{2}}$  diperoleh dari,

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^n + u_i^{\overline{n+1}}}{2} \quad (1.73)$$

Skema beda hingga mundur setengah langkah didapatkan dari ekspansi deret Taylor berikut,

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \quad (1.74)$$

dari persamaan (1.74) diperoleh,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (1.75)$$

Selanjutnya pendekatan beda mundur orde pertama dari  $u_{i-1}^{n+1}$  menggunakan ekspansi deret Taylor,

$$u_{i-1}^{n+1} = u_i^{n+1} - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^{n+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (1.76)$$

berdasarkan persamaan (1.76) diperoleh,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.77)$$

Kemudian menggunakan nilai  $u$  sementara yang dinotasikan  $u_i^{\overline{n+1}}$  untuk pendekatan (1.77). Substitusi persamaan (1.75) dan (1.77) ke persamaan (1.66),

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \alpha \frac{u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}}}{\Delta x} = 0 \quad (1.78)$$

berdasarkan persamaan (1.73), diperoleh persamaan korektor metode MacCormack sebagai berikut:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_i^n + u_i^{\overline{n+1}} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} (u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}}) \right) \quad (1.79)$$

Jadi diperoleh skema numerik beda hingga metode MacCormack untuk persamaan (1.66) adalah sebagai berikut:

- Tahap Prediktor

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha (u_{i+1}^n - u_i^n)) \quad (1.80)$$

- Tahap Korektor

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_i^n + u_i^{\overline{n+1}} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} (u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}}) \right) \quad (1.81)$$

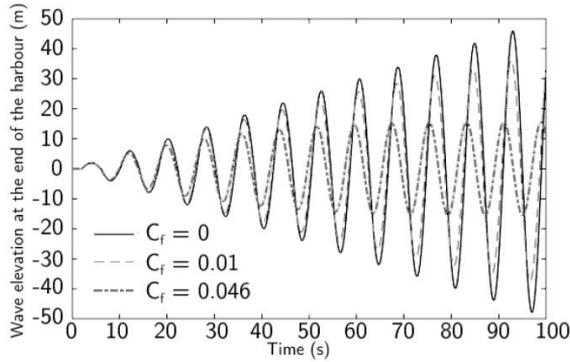
#### 1.6.4 Bottom Friction

Salah satu kondisi yang dapat meredam resonansi agar tidak terjadi, yaitu adanya *bottom friction*. Rifatin dkk (2022) menyelidiki fenomena resonansi pelabuhan pada tiga jenis topografi dan menganalisis efek *linear bottom friction* menggunakan model matematika yang dimodifikasi yaitu persamaan air dangkal dengan penambahan *linear bottom friction* pada persamaan momentum (Dean & Dalrymple, 1991):

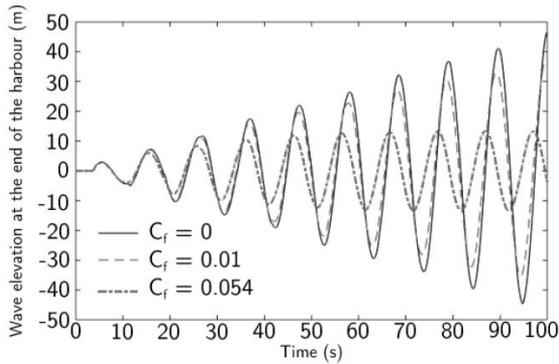
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + C_f u = 0$$

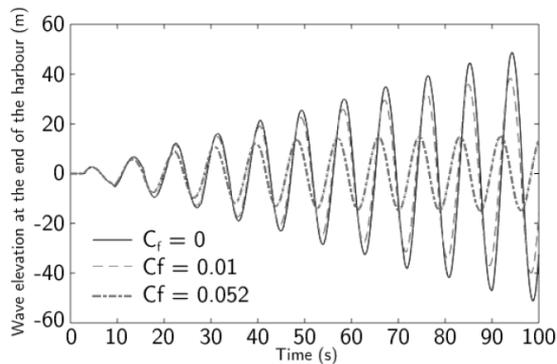
dimana  $C_f$  adalah koefisien gesekan permukaan dasar. *Bottom friction* ini akan menghasilkan efek disipasi pada gelombang yang meredam peningkatan gelombang yang disebabkan oleh resonansi.



**Gambar 1.2.** Fenomena resonansi pelabuhan jenis topografi persegi panjang (Magdalena dkk, 2022).



**Gambar 1.3.** Fenomena resonansi pelabuhan jenis topografi segitiga (Magdalena dkk, 2022).



**Gambar 1.4.** Fenomena resonansi pelabuhan jenis topografi semi parabola (Magdalena dkk, 2022).

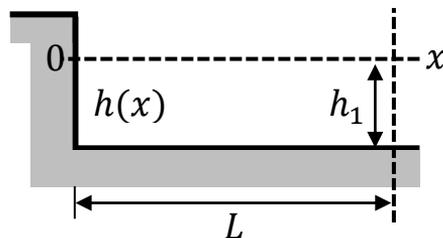
**Tabel 1.1.** Laju peningkatan amplitudo gelombang akibat resonansi untuk setiap jenis topografi pelabuhan ketika  $C_f = 0$  dan  $C_f = 0.01$  (Magdalena dkk, 2022).

Topografi pelabuhan	Laju peningkatan (%/s)		Penurunan laju peningkatan (%/s)
	$C_f = 0$	$C_f = 0.01$	
Persegi panjang	24.695	19.463	5.232
Segitiga	15.356	12.306	3.050
Semi parabola	19.166	15.071	4.095

Laju peningkatan amplitudo dihitung dengan menggunakan rumus  $growth\ rate = \left| \frac{C_{rest_F} - C_{rest_I}}{C_{rest_I}} \right| \times \left| \frac{1}{t_F - t_I} \right| \times 100\%$ .  $C_{rest_F}$  menunjukkan nilai pada titik puncak terakhir dari setiap gelombang pada Gambar 1.2 sampai Gambar 1.4, dan  $C_{rest_I}$  adalah titik puncak pertama dari setiap gelombang. Istilah  $t_F$  dan  $t_I$  merujuk pada nilai waktu yang bertepatan dengan nilai  $C_{rest_F}$  dan  $C_{rest_I}$ . Hasil penelitian menunjukkan pengaruh *linear bottom friction* pada topografi persegi panjang lebih baik dalam pencegahan resonansi dibandingkan dengan dua topografi lainnya.

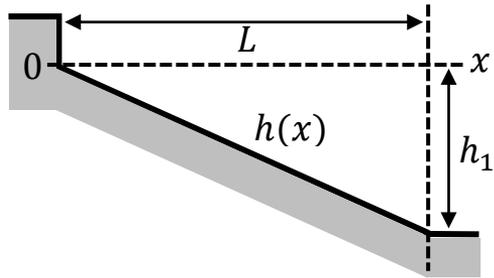
### 1.6.5 Basin Semi Tertutup

Istilah basin semi tertutup adalah jenis basin yang sebagian tertutup oleh daratan atau bentuk geografis lainnya. Karakteristik dari jenis basin ini yaitu terhubung dengan lautan terbuka, sehingga dapat menyebabkan terbentuknya osilasi pelabuhan. Bentuk topografi basin semi tertutup yang digunakan pada penelitian, yaitu persegi panjang, jenis topografi basin semi tertutup ini memiliki kedalaman yang konstan, yaitu  $h(x) = h_1$ .



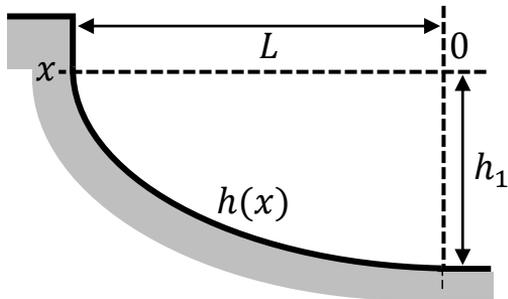
**Gambar 1.5.** Pelabuhan topografi persegi panjang (Magdalena dan Rif'atin, 2019).

Selanjutnya, pelabuhan topografi bentuk segitiga, jenis topografi ini memiliki kedalaman dengan fungsi  $h(x) = h_1 \frac{x}{L}$ .



**Gambar 1.6.** Pelabuhan topografi segitiga (Magdalena dan Rif'atin, 2019).

Kemudian, pelabuhan topografi semi parabola, jenis topografi ini memiliki kedalaman dengan fungsi  $h(x) = h_1 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$ .



**Gambar 1.7.** Pelabuhan topografi semi parabola (Magdalena dan Rif'atin, 2019).

## BAB II METODE PENELITIAN

### 2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Penelitian ini dilakukan dengan mengumpulkan dan menyusun referensi-referensi pendukung yang diperlukan dalam pelaksanaan penelitian.

### 2.2 Lokasi Dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di lingkungan Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan Juni 2023 sampai Desember 2024.

### 2.3 Langkah Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah dengan menentukan topik yang dibawa dalam penelitian ini yaitu simulasi numerik fenomena resonansi pelabuhan pada beberapa bentuk topografi dengan persamaan pembangun yaitu persamaan linear air dangkal menggunakan metode numerik MacCormack.
2. Studi literatur yaitu pengumpulan informasi-informasi yang berkaitan dengan penelitian yang dilakukan dari buku atau jurnal penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik penelitian.
3. Membangun tiga kasus yang diformulasikan dari persamaan linear air dangkal satu dimensi yaitu tanpa *bottom friction*, dengan modifikasi penambahan *linear bottom friction*, dan *nonlinear bottom friction*, untuk tiga bentuk topografi basin semi tertutup yaitu, persegi panjang, segitiga, dan semi parabola.
4. Diskritisasi tiga kasus yang telah dibentuk sebelumnya menggunakan metode numerik beda hingga MacCormack.
5. Simulasi numerik dengan bantuan *software* Matlab R2022a berdasarkan kondisi awal, syarat batas, parameter-parameter yang ditentukan dan skema numerik yang telah dibangun sebelumnya.
6. Membuat kesimpulan atas analisis hasil numerik yang diperoleh.

## 2.4 Diagram Alur Penelitian

