DIMENSI METRIK HASIL OPERASI KORONA GRAF KIPAS DENGAN GRAF TRIVIAL

SKRIPSI

AYU ANDINI

H011181014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2023

DIMENSI METRIK HASIL OPERASI KORONA GRAF KIPAS DENGAN GRAF TRIVIAL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

AYU ANDINI

H011181014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2023

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Graf Kipas dengan Graf Trivial

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 16 Mei 2023

Ayu Andini
H011181014

HALAMAN PENGESAHAN

DIMENSI METRIK HASIL OPERASI KORONA GRAF KIPAS DENGAN GRAF TRIVIAL

Disusun dan diajukan oleh:

AYU ANDINI
H011181014

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal sidang 16 Mei 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 196412311990032007	**NIP. 196808031992021001**

Ketua Program Studi Matematika

Prof. Dr. Nurdin, S. Si., M. Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan kehadirat Allah SWT., karena dengan rahmat, karunia, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebatas pengetahuan dan kemampuan yang dimiliki. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Ayahanda **Amiruddin** dan Ibunda **Hasna** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan penuh kasih sayang, memberikan dukungan material dan moral serta do'a yang senantiasa tak hentinya dilangitkan untuk penulis, sehingga penulis dapat tetap hidup sehat dan bahagia hingga saat menyusun skripsi ini;
2. Saudara penulis yaitu **Aswar, Alif A** dan **Aditya A** yang terus memberikan semangat dan mendoakan penulis;
3. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin;
4. **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin;
5. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Universitas Hasanuddin;
6. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
7. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
8. Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen penguji dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji serta penasihat akademik penulis yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;

9. Seluruh **Tenaga Pendidik/Dosen** Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah mengajar dan membimbing penulis selama masa perkuliahan;
10. Seluruh **Staf Departemen Matematika** yang turut bekerja sama membantu perihal administrasi dan persuratan selama penulisan skripsi ini;
11. Teman penulis **St Munieroh Fachrunnisa, Aqila Nurul Hayya Spaer, Nur Afni Annisa, Zulhijrah RA, Gresye Angeline Parinussa** dan **Nurjannah Maulinda** yang sudah memberikan banyak masukan dan membersamai penulis pada hari-hari yang tidak mudah selama proses pengerjaan skripsi;
12. Teman-teman Matematika Unhas 2018 yang senantiasa membersamai dan membantu penulis semasa perkuliahan;
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dan belum sempat penulis sampaikan satu per satu;
14. Kepada diri sendiri yang telah berjuang, kuat dan sabar. Beribu maaf atas kelelahan, kesusahan, keluhan, masalah serta kesedihan yang selalu hadir. Tetap tersenyum dan tetap semangat perjuangan masih panjang. Jangan menyerah dan terus berusaha menjadi versi terbaik dirimu.

Akhir kata, penulis berharap kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* agar membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan ke depannya.

Makassar, 16 Mei 2023

Penulis.

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ayu Andini
NIM	: H011181014
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royaliti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Graf Kipas dengan Graf Trivial"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 16 Mei 2023.

Yang menyatakan

(Ayu Andini)

ABSTRAK

Graf merupakan suatu (V, E) dengan V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Bentuk graf yang dibentuk dari operasi jumlah antara graf lintasan dan graf lengkap orde satu disebut sebagai graf kipas $F_{1,n}$. Misalkan G adalah graf terhubung dan W adalah himpunan pembeda dari himpunan titik pada graf G. Himpunan W disebut himpunan pembeda jika untuk setiap titik pada graf G memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W. Himpunan pembeda dengan banyak anggota minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G dan kardinalitas dari himpunan tersebut dinamakan dimensi metrik dari graf G , dinotasikan dengan $dim(G)$. Pada tugas akhir ini, dibahas mengenai dimensi metrik dari graf kipas dan operasi korona antara graf kipas berkepala satu berorde n dengan graf trivial berorde 1. Metode penelitian yang digunakan pada tugas akhir ini adalah mengkontruksi himpunan pembeda dalam menentukan batas atas kemudian batas bawah untuk mendapatkan dimensi metrik. Hasil penelitian menyatakan bahwa dimensi metrik graf kipas $F_{1,n}$ adalah $dim(F_{1,n}) = 2$ untuk $3 \leq n \leq 5$, $dim(F_{1,n}) = 3$ untuk $n = 6$, dan $dim(F_{1,n}) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ untuk $n \geq 7$ dan dimensi metrik dari hasil operasi korona graf kipas $F_{1,n}$ dengan graf trivial K_1 dengan $n \geq 3$ adalah $dim(F_{1,n} \odot K_1) = 2$ untuk $n = 3{,}4$, $dim(F_{1,n} \odot K_1) = 3$ untuk $n = 5{,}6$ dan $dim(F_{1,n} \odot K_1) = \left\lfloor \frac{2(n+1)+2}{5} \right\rfloor$ untuk $n \geq 7$.

Kata Kunci: Himpunan Pembeda, Dimensi Metrik, Graf Kipas, Graf Trivial, Operasi Korona

ABSTRACT

A graph is an (V, E) with V to set of vertices and E to set of edges. The form of a graph which formed from sum operation of a path graph and complete graph one order is called a fan graph $F_{1,n}$. Let G is connected graph and W be a subset of vertices on graph G. The set W is called the resolving set on graph if every vertex on the graph G has a different representation of W. The resolving set with minimum number of vertices is called the minimum resolving set or basis of a graph G and the cardinality of resolving set is called the metric dimension on graph G, denoted by $dim(G)$. In this final project, we discuss the metric dimensions of the fan graph and the corona operation of a fan graph one headed order n with a trivial graph order 1. The research method used in this final project is construct the resolving set to determine infimum and supremum to get metric dimension. The result of this research are as follow. The metric dimension of the fan graph $F_{1,n}$ is $dim(F_{1,n}) = 2$ for $3 \leq n \leq 5$, $dim(F_{1,n}) = 3$ for $n = 6$, and $dim(F_{1,n}) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ for $n \geq 7$ and the metric dimension of the corona operation of a fan graph $F_{1,n}$ with a trivial graph K_1 for $n \geq 3$ is $dim(F_{1,n} \odot K_1) = 2$ for $n = 3{,}4$, $dim(F_{1,n} \odot K_1) = 3$ for $n = 5{,}6$, and $dim(F_{1,n} \odot K_1) = \left\lfloor \frac{2(n+1)+2}{5} \right\rfloor$ for $n \geq 7$.

Keywords: *Resolving Set, Metric Dimension, Fan Graph, Trivial Graph, Corona Operation*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
KATA PENGANTAR iv
PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR vi
ABSTRAK vii
DAFTAR ISI viii
DAFTAR GAMBAR ix
DAFTAR SIMBOL x
BAB I. PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penelitian 2
1.5 Manfaat Penelitian 2
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1 Dasar-dasar Graf 3
2.2 Operasi dalam Graf 8
2.3 Dimensi Metrik 10
2.4 Definisi Dua Titik Setara 12
BAB III. METODOLOGI PENELITIAN 14
3.1 Jenis Penelitian 14
3.2 Tempat dan Waktu Penelitian 14
3.3 Tahapan Penelitian 14
3.4 Diagram Alur Penelitian 15
BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN 16
4.1 Dimensi Metrik Graf $F_{1,n}$ 16
4.2 Dimensi Metrik Graf $F_{1,n} \odot K_1$ 19
BAB V. PENUTUP 39
5.1 Kesimpulan 39
5.2 Saran 39
DAFTAR PUSTAKA 40

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.1 Graf G berorde 5 5
Gambar 2.1.2 Graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G. 5
Gambar 2.1.3 Graf Lintasan Pn 7
Gambar 2.1.4 Graf Lengkap $K_1, K_2. K_3$ dan K_4. 7
Gambar 2.1.5 Graf siklus C_3. 8
Gambar 2.1.6 Graf Kipas Berkepala Satu $F1,3$ 8
Gambar 2.2.1 Graf C_3, Graf K_1. 9
Gambar 2.2.2 Graf $C3 \odot K1$ 9
Gambar 2.2.3 Graf $F1,3 \odot K1$ 10
Gambar 2.4.1 Graf $F1,6$ 12
Gambar 3.4.1 Diagram Alur Penelitian. 15
Gambar 4.1. 1 Graf Kipas Berkepala Satu $F1, n$ 16
Gambar 4.1.2 Graf $F1, n \odot K1$ 19

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
G	Graf G	1
$V(G)$	Himpunan titik graf G	1
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	1
u, v	Titik u dan v	1
$d(u, v)$	Jarak antara titik u dan v pada graf G	1
W	Himpunan W	1
$\in$	Elemen dari suatu himpunan	1
$r(v\|W)$	Representasi titik v terhadap himpunan W	1
$dim\ (G)$	Dimensi metrik graf G	1
P_n	Graf lintasan berorde n	1
K_m	Graf lengkap berorde m	1
C_n	Graf siklus berorde n	1
$F_{1,n}$	Graf kipas berorde n	2
K_1	Graf trivial berorde 1	2
$\odot$	Operasi korona	2
$\mathbb{R}$	Bilangan real	3
$\forall$	Untuk setiap	3
$p(G)$	Banyaknya tititk pada graf G	4
$q(G)$	Banyaknya sisi pada graf G	4
$\|V(G)\|$	Kardinalitas himpunan titik graf G	4
$\|\mathrm{E}(G)\|$	Kardinalitas himpunan sisi graf G	4
$d(v_i)$	Derajat titik v_i pada graf G	5
$N_G(v)$	Himpunan tetangga titik v pada graf G	5
$\delta(G)$	Derajat minimum suatu graf G	5
$\lfloor x \rfloor$	Membulatkan angka ke bilangan bulat yang lebih rendah	13
$\cup$	Gabungan	29

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dimensi metrik merupakan salah satu topik dalam teori graf yang menarik untuk dikaji, karena memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang. Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1966.

Dalam penentuan dimensi metrik pada graf digunakan beberapa istilah seperti istilah jarak, himpunan pembeda dan basis. Diberikan suatu graf tak berarah dan terhubung G, jarak antara dua titik u dan v dinotasikan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf terhubung G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dan $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W dinotasikan $r(v|W)$ pasangan terurut *k-tuple* $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika titik-titik pada G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Kardinalitas dari basis tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim\ (G)$ (Wahyudi, dkk., 2011).

Suatu graf baru dapat dibentuk dengan cara menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Salah satu operasi graf adalah operasi korona. Beberapa penelitian yang telah dilakukan terkait dengan dimensi metrik dalam operasi korona diantaranya, Fendiyanto pada tahun 2019 dalam skripsi yang berjudul "Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona antara Graf Lintasan dengan Graf Lengkap $(P_n \odot K_m)$ dan Graf Sikel dengan Graf Lintasan $(C_n \odot mP_2)$", ditemukan nilai dimensi metrik graf $P_n \odot K_m = n(m-1)$ dengan $m \geq 2$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$.

Pada tahun 2017, Maya, dkk., dalam jurnalnya "Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Dua Buah Graf " menemukan dimensi metrik graf $P_n \odot C_m = n(m-3)$ dengan $m \geq 5$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ dan juga menemukan dimensi metrik graf $P_n \odot K_{1,m} = nm$ dengan $m \geq 3$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$.

Dari hasil penelitian tersebut menjadi acuan dalam mencari dimensi metrik

dari graf yang diperoleh dari hasil operasi korona. Graf yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah hasil operasi korona graf kipas berkepala satu dengan graf trivial yang dinotasikan $F_{1,n} \odot K_1$. Oleh karena itu, penulis mendapatkan suatu permasalahan baru yang dapat dikaji menjadi suatu bentuk penelitian yaitu "Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Korona Graf Kipas dengan Graf Trivial".

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penentuan dimensi metrik terlebih dahulu dibentuk satu himpunan titik yang merupakan himpunan pembeda minimum. Himpunan pembeda minimum disebut basis dan kardinalitas dari basis adalah dimensi metrik dari graf $F_{1,n} \odot K_1$ (Korona Kipas Berkepala Satu dengan Graf Trivial). Oleh karena itu, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan himpunan pembeda minimum atau basis dari graf $F_{1,n} \odot K_1$ (Korona Kipas Berkepala Satu dengan Graf Trivial) untuk mendapatkan dimensi metrik.

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas dan melebar, maka diberikan batasan masalah yaitu penelitian ini hanya mencakup pada graf $F_{1,n} \odot K_1$ dengan $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu menentukan himpunan pembeda minimum dan dimensi metrik operasi korona graf kipas berkepala satu (dengan n titik) dengan graf trivial yang dinotasikan $F_{1,n} \odot K_1$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian diatas, maka diharapkan dalam penulisan skripsi ini dapat menambah pemahaman baru tentang konsep teori graf, khususnya pada kajian dimensi metrik hasil operasi korona suatu graf dan dapat menjadi referensi bagi peneliti lain terkait dimensi metrik ke depannya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas beberapa materi yang dijadikan landasan teori untuk memahami penentuan dimensi metrik suatu graf, khususnya graf kipas dan graf trivial. Materi tersebut meliputi dasar-dasar graf, operasi dalam graf dan dimensi metrik. Adapun definisi, istilah, dan notasi yang dibahas pada bab ini umumnya paling banyak dikutip dari buku Prof. Hasmawati, M.Si. yang berjudul "Pengantar dan Jenis-jenis Graf" tahun 2020.

2.1 Dasar-dasar Graf

Pada Subbab 2.1 ini disajikan definisi graf, unsur-unsur dan jenis-jenis graf yang akan digunakan dalam skripsi ini. Sebelum itu, dalam mendefinisikan graf menggunakan konsep tentang himpunan, oleh karena itu sebelum menyajikan definisi graf terlebih dahulu disajikan pengertian tentang himpunan.

2.1.1 Himpunan

Berikut disajikan definisi himpunan dan himpunan terbatas.

Definisi 2.1.1 Himpunan adalah koleksi objek yang memiliki karakteristik tertentu yang jelas (Subhan, 2017).

Objek yang terdapat di dalam himpunan disebut elemen, unsur atau anggota. Dalam pengertian himpunan disyaratkan bahwa setiap elemennya hanya muncul satu kali saja. Suatu himpunan dikatakan terbatas (*bounded*) jika himpunan tersebut terbatas di atas dan terbatas di bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas (*unbounded*). Berikut disajikan definisi batas atas dan batas bawah suatu himpunan.

Definisi 2.1.2 Diberikan S himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2011).

a. Himpunan S dikatakan terbatas di atas jika S mempunyai batas atas. $u \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas dari S jika $x \leq u, \forall x \in S$.
b. Himpunan S dikatakan terbatas di bawah jika S mempunyai batas bawah. $w \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah dari S jika $x \geq w, \forall x \in S$.

Misalkan u batas atas dari S, maka u disebut batas atas terkecil jika $u \leq x$, untuk setiap x, x batas atas S. Sebaliknya, u disebut batas bawah terbesar jika $u \geq x$, untuk setiap x, x batas bawah dari S.

2.1.2 Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa notasi dan istilah yang berkaitan dengan graf. Berikut ini disajikan definisi graf, beberapa definisi lain, notasi dan istilah yang akan digunakan dalam skripsi ini.

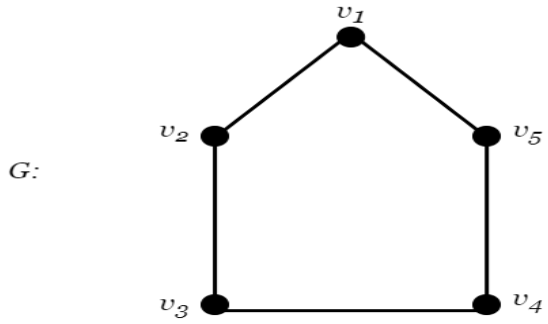
Definisi 2.1.3 (Definisi graf secara umum) Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Jika graf $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ atau (u, v) dapat ditulis dengan uv yang disebut sebagai sisi. Jika $uv = vu$ dan $u \neq v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka graf G disebut **graf sederhana**.

Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari graf G dengan notasi $p(G)$ dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dengan notasi $q(G)$. Sedangkan, banyaknya anggota pada himpunan tersebut disebut **kardinalitas** yang dinyatakan dengan simbol "| |". Jadi apabila $p(G)$ adalah orde graf dan $q(G)$ adalah ukuran graf, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Jika $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan titik u **bertetangga** (*adjacent*) dengan v demikian juga sebaliknya, dan sisi e **terkait** (*incident*) dengan titik u dan titik v. Suatu graf berorde n disebut **graf lengkap** jika setiap dua titiknya bertetangga.

Contoh 2.1.1 Misalkan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$ dengan $p(G) = 5$ dan $q(G) = 5$, graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.

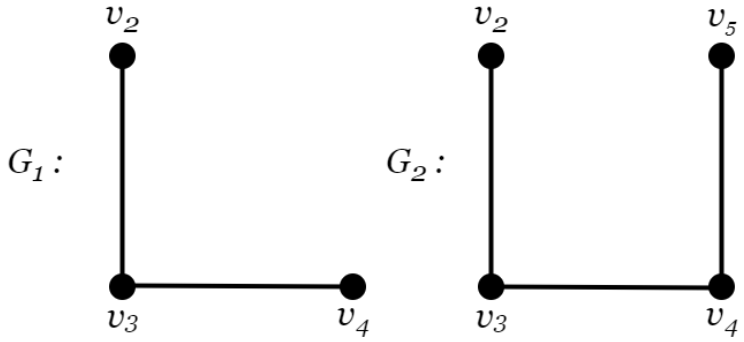


Gambar 2.1.1 Graf G berorde 5

Suatu graf sebut H merupakan subgraf dari graf lainnya sebut G karena setiap anggota yang ada pada H juga berada pada G. Berikut disajikan definisi mengenai subgraf.

Definisi 2.1.4 Misalkan dua graf $H = (V(H), E(H))$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Contoh 2.1.2 Subgraf dari graf G pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.2 Graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G.

Derajat suatu graf akan diketahui jika derajat setiap titik pada graf tersebut diketahui. Berikut ini disajikan definisi derajat suatu titik pada graf.

Definisi 2.1.5 Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan dengan "$d(v_i)$", yaitu banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$. Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{d(v): v \in V(G)\}$ (Hasmawati,2020).

Contoh 2.1.3 Dari Gambar 2.1.1 diperoleh $N_G(v_1) = \{v_2, v_5\}, N_G(v_2) =$

$\{v_1, v_3\}, N_G(v_3) = \{v_2, v_4\}, N_G(v_4) = \{v_3, v_5\}, N_G(v_5) = \{v_1, v_4\}$ maka derajat untuk setiap titiknya adalah $d(v_1) = |N_G(v_1)| = 2, d(v_2) = |N_G(v_2)| = 2, d(v_3) = |N_G(V_3)| = 2, d(v_4) = |N_G(v_4)| = 2, d(v_5) = |N_G(v_5) = 2.$ Dengan demikian, diperoleh $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 2.$

Untuk mencari jarak terpendek dari suatu graf G, maka diberikan definisi tentang lintasan dan jarak sebagai berikut.

Definisi 2.1.6 Misal G adalah graf dengan $u, v \in V(G)$. Lintasan dari titik u ke v pada graf G adalah barisan antara titik dan sisi v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 ... v_{n-1}, e_{n-1}, v_n dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n - 1.$

Contoh 2.1.4 Lintasan pada graf sederhana cukup dituliskan sebagai barisan titik-titik saja v_1, v_2, ... , v_{n-1}, v_n, karena antara dua buah simpul berurutan di dalam lintasan hanya ada satu sisi. Sehingga, pada Gambar 2.1.1 memiliki lintasan dengan barisan sisi yaitu $(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$.

Definisi 2.1.7 Misalkan u dan v adalah dua titik dalam graf G. Jarak titik u dan v ditulis $d(u, v)$, yang memenuhi

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{jika } u = v, \\ k, & \text{jika panjang lintasan terpendek } u - v \text{ adalah } k, \\ \infty, & \text{jika tidak ada lintasan dari } u \text{ ke } v. \end{cases}$$

Contoh 2.1.5 Dari Gambar 2.1.1 dapat ditentukkan jarak antara dua titik sebagai berikut.

Diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, dan

$d(v_1, v_1) = 0, d(v_1, v_2) = 1, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 2, d(v_1, v_5) = 1.$

$d(v_2, v_1) = 1, d(v_2, v_2) = 0, d(v_2, v_3) = 1, d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_5) = 2.$

$d(v_3, v_1) = 2, d(v_3, v_2) = 1, d(v_3, v_3) = 0, d(v_3, v_4) = 1, d(v_3, v_5) = 2.$

$d(v_4, v_1) = 2, d(v_4, v_2) = 2, d(v_4, v_3) = 1, d(v_4, v_4) = 0, d(v_4, v_5) = 1.$

$d(v_5, v_1) = 1, d(v_5, v_2) = 2, d(v_5, v_3) = 2, d(v_5, v_4) = 1, d(v_5, v_5) = 0.$

Pada pembahasan selanjutnya, akan dibahas mengenai jenis-jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini dan untuk mengetahui ada banyak jenis-jenis graf yang ada.

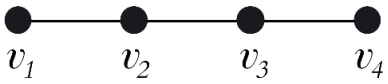
2.1.3 Jenis-jenis Graf

Selain graf sederhana yang telah dibahas pada Subbab 2.1.2, dan telah banyak ditemukan jenis-jenis graf yang baru, sehingga pada Subbab 2.1.3 ini disajikan beberapa definisi jenis-jenis graf sebagai berikut.

a. Graf Lintasan

Definisi 2.1.8 Graf lintasan adalah graf yang terdiri barisan titik dan sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$ adalah sisi-sisi dari graf lintasan. Graf lintasan dinotasikan P_n dengan orde n dan jumlah sisi $n-1$. Graf lintasan terdiri atas satu lintasan maksimal.

Contoh 2.1.6

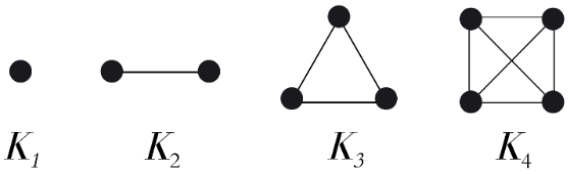


Gambar 2.1.3 Graf Lintasan P_n

b. Graf Lengkap

Definisi 2.1.9 Graf lengkap adalah graf yang dimana setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan K_n. K_n dengan $n = 1$ atau graf lengkap yang hanya memiliki 1 titik dan tidak mempunyai sisi disebut graf trivial atau graf K_1.

Contoh 2.1.7

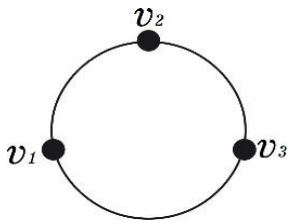


Gambar 2.1.4 Graf Lengkap $K_1, K_2. K_3$ dan K_4.

c. Graf Siklus

Definisi 2.1.10 Graf siklus dinotasikan C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$.

Contoh 2.1.8

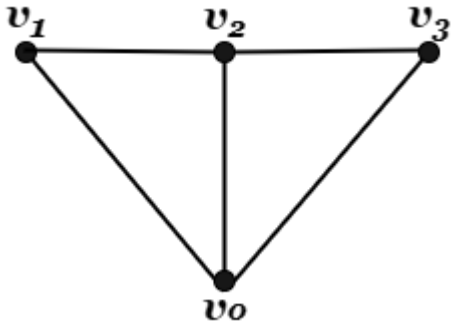


Gambar 2.1.5 Graf siklus C_3.

d. Graf Kipas

Definisi 2.1.11 Graf kipas berkepala satu dengan n titik, $n \geq 3$ dinotasikan sebagai $F_{1,n}$, dimana $F_{1,n} = P_n + K_1$. Jika $v_0 \in K_1$ dan $v \in P_{n-1}$ maka sisi $v_0 v_i \in E(F_{1,n})$ disebut jari-jari dari $F_{1,n}$.

Contoh 2.1.9



Gambar 2.1.6 Graf Kipas Berkepala Satu $F_{1,3}$

Graf yang dibahas pada penelitian ini adalah graf korona antara graf kipas dan graf trivial, dan korona adalah salah satu operasi pada graf. Karenanya, pembahasan berikut adalah operasi dalam graf.

2.2 Operasi dalam Graf

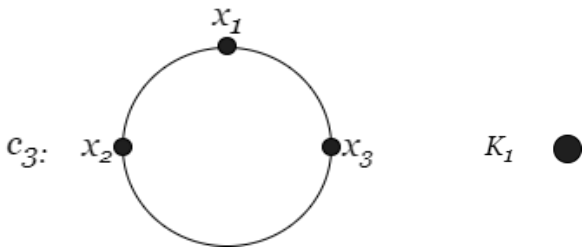
Operasi dalam graf adalah operasi terhadap dua graf atau lebih untuk menghasilkan graf baru. Pada Subbab 2.2 ini disajikan operasi graf salah satunya Abdallah operasi korona, yang dimana operasi korona ini adalah operasi graf yang akan digunakan dalam skripsi ini.

2.2.1 Operasi Korona

Definisi 2.2.1 Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah menggandakan graf H sebanyak n kali namakan $H_1, H_2, \ldots, H_n$, dengan mengaitkan setiap titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i = 1,2,..,n$.

Contoh 2.2.1

Diberikan graf sebagai berikut.



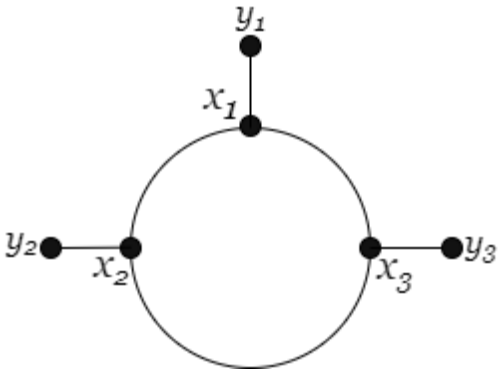
Gambar 2.2.1 Graf C_3, Graf K_1.

Himpunan titik dan sisi dari Gambar 2.2.1 diberikan sebagai berikut :

$V(C_3) = \{x_1, x_2, x_3\}, E(C_3) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\}$.

$V(K_1) = \{y\}, E(K_1) = 0$.

Operasi korona graf C_3 dengan graf K_1 adalah $C_3 \odot K_1$ dengan himpunan titik $V(C_3 \odot K_1) = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$. Diperoleh graf baru seperti berikut.



Gambar 2.2.2 Graf $C_3 \odot K_1$

Selain Contoh 2.2.1 yang memberikan operasi korona pada graf siklus dengan graf trivial, selanjutnya pada Contoh 2.2.2 diberikan korona graf kipas berkepala satu dengan graf trivial.

Contoh 2.2.2

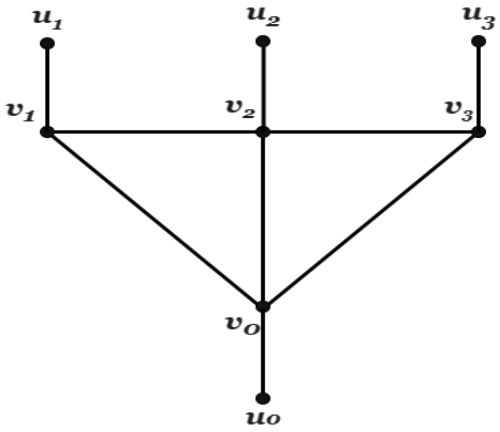
Operasi korona graf kipas berkepala satu $F_{1,3}$ dengan graf trivial K_1 adalah

$F_{1,3} \odot K_1$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$V(F_{1,3} \odot K_1) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, u_0, u_1, u_2, u_3\}$,

$E(F_{1,3} \odot K_1) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_1v_2, v_2v_3, u_0v_0, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3\}$.

Diperoleh graf baru hasil operasi korona pada graf kipas berkepala satu $F_{1,3}$ dengan graf trivial K_1 sebagai berikut.



Gambar 2.2.3 Graf $F_{1,3} \odot K_1$

Topik pada penelitian ini membahas tentang dimensi metrik pada operasi korona graf kipas dengan graf trivial dan perlu diketahui apa itu dimensi metrik terlebih dahulu yang akan dibahas pada pembahasan berikut.

2.3 Dimensi Metrik

Pada Subbab 2.3 ini disajikan definisi, istilah-istilah dan hasil penelitian yang berkaitan dengan dimensi metrik. Misalkan G adalah graf terhubung dan $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W dinotasikan $r(v|W)$ yakni pasangan terurut k-tuple $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$.

Definisi 2.3.1 Misalkan G graf dan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ adalah himpunan terurut. Himpunan terurut W disebut himpunan pembeda pada graf G, jika untuk setiap $u, v \in V(G), u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r((v|S)$ (Eka dan Rahadjeng, 2012).

Berikut diberikan contoh mengenai dimensi metrik graf $F_{1,3} \odot K_1$.

Contoh 2.3.1

Misalkan G adalah graf $F_{1,3} \odot K_1$ seperti pada gambar 2.2.3, yang akan ditentukan dimensi metrik dari graf $F_{1,3} \odot K_1$.

Pilih $W_1 = \{v_1, u_2\}, W_2 = \{v_1, u_0, u_2\}, W_3 = \{v_1, v_2, u_0, u_2\}$. Akan

ditunjukkan W_1, W_2 dan W_3 adalah himpunan pembeda dari graf $F_{1,3} \odot K_1$.

Representasi setiap titik pada graf $F_{1,3} \odot K_1$ terhadap $W_1 = \{v_1, u_2\}$ adalah

$$r(v_0|W_1) = \big(d(v_0, v_1), d(v_0, u_2)\big) = (1,2).$$
$$r(v_1|W_1) = \big(d(v_1, v_1), d(v_1, u_2)\big) = (0,3).$$
$$r(v_2|W_1) = \big(d(v_2, v_1), d(v_2, u_2)\big) = (1,1).$$
$$r(v_3|W_1) = \big(d(v_3, v_1), d(v_3, u_2)\big) = (2,2).$$
$$r(u_0|W_1) = \big(d(u_0, v_1), d(u_0, u_2)\big) = (2,3)$$
$$r(u_1|W_1) = \big(d(u_1, v_1), d(u_1, u_2)\big) = (1,3).$$
$$r(u_2|W_1) = \big(d(u_2, v_1), d(u_2, u_2)\big) = (2,0).$$
$$r(u_3|W_1) = \big(d(u_3, v_1), d(u_3, u_2)\big) = (3,3).$$

Karena setiap titik pada graf $F_{1,3} \odot K_1$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $W_1 = \{v_1, u_2\}$, maka W_1 merupakan himpunan pembeda dari graf $F_{1,3} \odot K_1$.

Representasi setiap titik pada graf $F_{1,3} \odot K_1$ terhadap $W_2 = \{v_1, u_0, u_2\}$ adalah

$$r(v_0|W_2) = \big(d(v_0, v_1), d(v_0, u_0), d(v_0, u_2)\big) = (1,1,2).$$
$$r(v_1|W_2) = \big(d(v_1, v_1), d(v_1, u_0), d(v_1, u_2)\big) = (0,2,2).$$
$$r(v_2|W_2) = \big(d(v_2, v_1), d(v_2, u_0), d(v_2, u_2)\big) = (1,2,1).$$
$$r(v_3|W_2) = \big(d(v_3, v_1), d(v_3, u_0), d(v_3, u_2)\big) = (3,2,2).$$
$$r(u_0|W_2) = \big(d(u_0, v_1), d(u_0, u_0), d(u_0, u_2)\big) = (2,0,3).$$
$$r(u_1|W_2) = \big(d(u_1, v_1), d(u_1, u_0), d(u_1, u_2)\big) = (1,3,3).$$
$$r(u_2|W_2) = \big(d(u_2, v_1), d(u_2, u_0), d(u_2, u_2)\big) = (2,3,0).$$
$$r(u_3|W_2) = \big(d(u_3, v_1), d(u_3, u_0), d(u_3, u_2)\big) = (3,3,3).$$

Karena setiap titik pada graf $F_{1,3} \odot K_1$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $W_2 = \{v_1, u_0, u_2\}$, maka W_2 merupakan himpunan pembeda dari graf $F_{1,3} \odot K_1$.

Representasi setiap titik pada graf $F_{1,3} \odot K_1$ terhadap $W_3 = \{v_1, v_2, u_0, u_2\}$ adalah

$$r(v_0|W_3) = \big(d(v_0, v_1), d(v_0, v_2), d(v_0, u_0), d(v_0, u_2)\big) = (1,1,1,1).$$
$$r(v_1|W_3) = \big(d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), d(v_1, u_0), d(v_1, u_2)\big) = (0,1,2,2).$$
$$r(v_2|W_3) = \big(d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), d(v_2, u_0), d(v_2, u_2)\big) = (1,0,2,1).$$
$$r(v_3|W_3) = \big(d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, u_0), d(v_3, u_2)\big) = (2,1,2,2).$$

$$r(u_0|W_3) = \big(d(u_0,v_1), d(u_0,v_2), d(u_0,u_0), d(u_0,u_2)\big) = (3,2,3,3).$$
$$r(u_1|W_3) = \big(d(u_1,v_1), d(u_1,v_2), d(u_1,u_0), d(u_1,u_2)\big) = (2,2,0,3).$$
$$r(u_2|W_3) = \big(d(u_2,v_1), d(u_2,v_2), d(u_2,u_0), d(u_2,u_2)\big) = (1,2,3,3).$$
$$r(u_3|W_3) = \big(d(u_3,v_1), d(u_3,v_2), d(u_3,u_0), d(u_3,u_2)\big) = (2,1,3,0).$$

Karena setiap titik pada graf $F_{1,3} \odot K_1$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $W_3 = \{v_1, v_2, u_0, u_2\}$ maka W_3 merupakan himpunan pembeda dari graf $F_{1,3} \odot K_1$.

Definisi 2.3.2 Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Banyaknya anggota atau kardinalitas dari basisnya (himpunan pembeda minimum) disebut dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$ (Wahyudi, dkk., 2011).

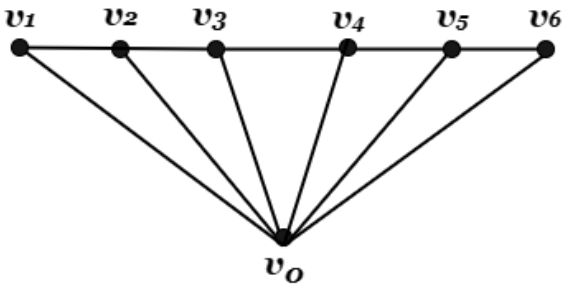
Dari ketiga himpunan titik pada contoh 2.3.1 yang merupakan himpunan pembeda yaitu $W_1 = \{v_1, u_2\}, W_2 = \{v_1, u_0, u_2\}, W_3 = \{v_1, v_2, u_0, u_2\}$, himpunan dengan kardinalitas minimum adalah W_1 yakni $|W_1| = 2$. Oleh karena itu, himpunan terurut W_1 merupkan basis dari graf $F_{1,3} \odot K_1$ dan $dim\big(F_{1,3} \odot K_1\big) = 2$.

2.4 Definisi Dua Titik Setara (Hasmawati,dkk. 2021)

Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik–titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut :

- $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) / \{u,v\}$.
- Terdapat titik c sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$ untuk setiap $s \in V(G) / \{u,v\}$.

Contoh 4.2 diberikan graf $F_{1,6}$ dengan $V\big(F_{1,6}\big) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E\big(F_{1,5}\big) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_0v_5, v_0v_6, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6\}$ seperti pada gambar 2.4.1



Gambar 2.4.1 Graf $F_{1,6}$

Untuk $i,j = 1,2,3,4,5,6$ $(i \neq j)$ titik v_i dan v_j adalah titik setara karena terdapat titik v_0 sehingga $d(v_i, v_0) + d(v_0, x) = d(v_j, v_0) + d(v_0, x)$ untuk setiap $x \in V(F_{1,6}) / \{v_i, v_j\}$.

Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik diberikan pada teorema yang disajikan berikut ini.

Teorema 2.3.1 (Chartrand, dkk., 2000) Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka

a. $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$,
b. Untuk $n \geq 2$, $dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$,
c. Untuk $n \geq 4, dim(G) = n - 2$ jika dan hanya jika $G = K_{r,s}(r, s \geq 1), G = K_r + \bar{K}_s (r \geq 1, s \geq 2)$ atau $G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r, s \geq 1)$.

Teorema 2.3.2 (J Caceres, dkk., 2005)

$$dim(F_{1,n}) = \begin{cases} 2, untuk\ n = 3,4,5,6 \\ \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor, untuk\ n \geq 7 \end{cases}$$

Teorema 2.3.3 (Saputro dkk,2017) Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $m \geq 2$. Jika o adalah titik dari P_n dengan derajat 1, maka $dim(G \rhd_o P_n) \geq dim(G)$. Batas bawahnya kuat. $dim(G \rhd P_n) \cong dim(G \odot K_1)$.