TITIK TETAP DI DALAM RUANG PERLUASAN KHUSUS b-METRIK PADA FUNGSI KONTRAKTIF PERBANDINGAN

FIXED POINT ON SPECIFIC EXTENDED b-METRIC SPACE WITH CONTRACTIVE COMPARISON FUNCTION

SITI M. SARI
H022212001

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

TITIK TETAP DI DALAM RUANG PERLUASAN KHUSUS b-METRIK PADA FUNGSI KONTRAKTIF PERBANDINGAN

FIXED POINT ON SPECIFIC EXTENDED b-METRIC SPACE WITH CONTRACTIVE COMPARISON FUNCTION

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

SITI M. SARI
H022212001

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

TESIS

TITIK TETAP DI DALAM RUANG PERLUASAN KHUSUS *b*-METRIK PADA FUNGSI KONTRAKTIF PERBANDINGAN

SITI M. SARI

NIM: H022212001

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 3 Oktober 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 19580802 198403 1002	NIP. 19850529 200812 1 002
Ketua Program Studi Matematika S2	Dekan Fakulras MIPA Universitas Hasanuddin
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1013	NIP. 19720515 1997 02 1002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis berjudul “Titik Tetap di Dalam Ruang Perluasan Khusus b-Metrik pada Fungsi Kontraktif Perbandingan” adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Budi Nurwahyu, MS sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari tesis ini telah diajukan di Kyungpook Mathematical Journal sebagai artikel dengan judul “*Existence and Uniqueness of Fixed Point Theorems on Weak Extended b-Metric Space*”.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, September 2023

Siti M. Sari
NIM. H022212001

UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillahirabbil'alamin. Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan hidayah yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul "Titik Tetap di Dalam Ruang Perluasan Lemah b-Metrik pada Fungsi Kontraktif Perbandingan". Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang merupakan teladan bagi penulis dalam kehidupan dunia dan akhirat. Penulisan tesis ini merupakan salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar Magister pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari ada banyak rintangan dan hambatan yang dihadapi, selama penyusunan proposal hingga tesis ini dapat terselesaikan. Namun, semua dapat teratasi berkat nikmat yang diberikan Allah SWT, penulis juga senantiasa mendapat bantuan dan petunjuk-petunjuk dari berbagai pihak. Oleh karena itu, melalui kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan kepada pihak-pihak yang langsung maupun tidak langsung telah membantu penulis menyelesaikan studi, yaitu kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing pertama yang ditengah–tengah kesibukannya telah meluangkan waktu untuk memberi petunjuk, arahan dan bimbingan sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.**, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**, selaku dosen penguji yang telah memberikan saran bagi penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, Ketua Departemen Matematika, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, Ketua Program Studi Magister Matematika, **Dosen Pengajar**, serta **Staf** dalam lingkungan Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan ilmu dan bantuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa.

4. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.
5. Kedua orangtua penulis Bapak **La Hasirun** dan Mama **Wa Ode Hayati** yang telah mencurahkan segenap cinta dan kasih sayang serta perhatian moril maupun materiil, juga kepada adikku **Nur Rahayu Ramadhan** yang selalu memberikan dukungan dan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Teman – teman Magister Matematika 2021 Genap yakni Darmiani, Nurul Ilma Islamiyah, dan Muhammad Afdal Bau yang telah memberi bantuan dan untuk kebersamaan selama ini.
7. Sahabat-sahabat penulis yang selalu memberi semangat dan saran-saran yang membangun dalam kehidupan sehari-hari serta berbagai kenangan indah yang diberikan selama ini.
8. Pihak-pihak yang telah memberikan bantuan, semangat, serta doa untuk penulis, baik secara langsung maupun tak langsung. Maafkan bila penulis tak bisa menyebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih memiliki kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun guna perbaikan kedepannya. Akhir kata, penulis berharap semoga tesis ini dapat memberikan manfaat dan menambah ilmu bagi pembaca maupun bagi penulis sendiri.

Makassar,   September 2023
Penulis

Siti M. Sari
NIM. H022212001

ABSTRAK

SITI M. SARI. *Titik Tetap di Dalam Ruang Perluasan Khusus b-Metrik pada Fungsi Kontraktif Perbandingan* (dibimbing oleh Budi Nurwahyu dan Muh. Nur).

Pada penelitian ini, diperkenalkan generalisasi dari ruang b-metrik yaitu perluasan khusus b-metrik. Untuk membuktikan teorema keberadaan dan ketunggalan titik tetap, digunakan fungsi kontraktif perbandingan dalam penelitian pada ruang tersebut. Contoh dan aplikasi disajikan untuk mendukung hasil yang diperoleh.

Kata kunci : titik tetap, ruang perluasan khusus b-metrik, fungsi perbandingan.

ABSTRACT

SITI M. SARI. *Fixed Point on Specific Extended b-Metric Space with Contractive Comparison Function* (Supervised by Budi Nurwahyu and Muh. Nur).

As a generalization of b-metric space, we offer the idea of spesific extended b-metric space in this paper. To demonstrate the existence and uniqueness of fixed-point theorems on such spaces, we utilize a contraction condition that is determined by the comparison function. We provide an example and an application to validate our results.

Key words : fixed point, spesific extended b-metric space, comparison function.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori titik tetap merupakan salah satu topik penting dalam matematika analisis. Titik tetap berarti titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Sifat titik tetap diantaranya digunakan untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear [1], menentukan solusi persamaan integral [2], atau solusi dari masalah program dinamis [3], [4]. Teori titik tetap telah diterapkan di banyak cabang ilmu pengetahuan lainnya, seperti fisika, ekonomi, ilmu komputer, dan teknik. Karena banyaknya penerapan teori titik tetap maka banyak peneliti yang mengembangkan teori titik tetap dari waktu ke waktu. Pada tahun 1922, S. Banach [5] membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif dalam ruang metrik lengkap yang dikenal dengan Teorema Titik Tetap Banach/ Prinsip Kontraktif Banach. Teorema titik tetap Banach menjamin adanya titik tetap tunggal pada pemetaan kontraktif dalam ruang metrik, serta menyediakan metode untuk menemukan titik tetap tersebut. Teorema Titik Tetap Banach menginspirasi peneliti lain untuk mengembangkan teori titik tetap.

Harjani (2011) [6] membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan C-kontraktif khusus dalam ruang metrik terurut. Chandok (2013) [7] memperkenalkan kontraktif khusus siklik tipe Chatterjea dan menunjukan keberadaan titik tetap untuk pemetaan tersebut dalam ruang metrik lengkap. Shanatawi (2013) [8] membuktikan beberapa teorema titik tetap sekutu untuk empat pemetaan f, g, S dan T yang memenuhi kontraktif nonlinier dalam ruang metrik terurut. Ionescu (2013) [9] membuktikan titik tetap dari pemetaan kontraktif baru pada ruang metrik fuzzy intuitif. Hussain (2014) [10] menggeneralisasi teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif $\alpha - \psi$ di ruang metrik lengkap. Lakzian (2019) [11] membuktikan teorema titik tetap menggunakan fungsi Meir-Keeler khusus di ruang metrik dengan jarak-w di ruang metrik parsial terurut. Seshagiri Rao (2020) [12] membuktikan teorema titik tetap di ruang metrik parsial terurut.

Dari banyaknya penelitian tentang titik tetap, dapat kita ketahui bahwa pengembangan teori titik tetap dikembangkan ke dalam dua hal, yaitu dari ruangnya dan dari pemetaan kontraktifnya. Untuk perkembangan dari ruang, kita telah mengenal ruang metrik, ruang b-metrik, ruang dislokasi metrik, ruang quasi metrik, ruang dislokasi quasi metrik, ruang dislokasi b-metrik, ruang quasi b-metrik, ruang dislokasi quasi b-metrik, ruang metrik *cone*, ruang metrik parsial, ruang perluasan b-metrik, dll. Konsep ruang metrik sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Fréchet [5] tahun 1906 . Selanjutnya Bakhtin [1] pada tahun 1989 memperkenalkan konsep ruang b-metrik. Dia membuktikan prinsip pemetaan kontraktif dalam ruang b-metrik yang menggeneralisasi prinsip kontraktif Banach. Ruang b-metrik merupakan generalisasi dari ruang metrik dengan perbedaan yang terletak pada koefisien pertidaksamaan segitiga yang berlaku dalam syarat b-metrik. Pada tahun 2017, Kamran [13] memperkenalkan ruang baru yang disebut sebagai ruang perluasan b-metrik. Ide ini menginspirasi peneliti lainnya untuk membuktikan teorema titik tetap di ruang baru ini, diantaranya Alqahtani [14] dan Alamgir [15].

Selain perkembangan dari ruang, banyak penelitian yang mengembangkan ke pemetaan kontraktif yang berbeda. Kannan mengenalkan pemetaan Kannan [16]. Kirk mengenalkan kontraktif siklik [16]. Imed Kedim [17] membuktikan teorema titik tetap menggunakan kontraktif Maia $\alpha - \psi$. Eke [18] membuktikan teorema titik tetap untuk fungsi kontraktif random. Abu Donia [19] membuktikan teorema titik tetap menggunakan fungsi kontraktif (ϕ, φ). Selain itu kita mengenal fungsi perbandingan. Dalam matematika terapan, fungsi perbandingan merupakan fungsi kontinu, yang digunakan dalam teori kestabilan untuk menentukan sifat kestabilan sistem kontrol seperti stabilitas Lyapunov, stabilitas asimtotik seragam, dll. Berinde [20] pada tahun 1993 menggeneralisasi kontraktif di ruang quasimetri dengan fungsi perbandingan φ. Selanjutnya pada tahun 2014, Shatanawi [21] membuktikan teorema titik tetap untuk dua pemetaan menggunakan fungsi perbandingan di ruang b-metrik. Hua tahun 2015 membuktikan teorema titik tetap untuk kontraktif φ di ruang Menger. Pada tahun 2018, Shatanawi [22] mengenalkan perluasan fungsi perbandingan dan digunakan untuk membuktikan keberadaan titik tetap di ruang perluasan b-metrik. Namun, fungsi kontraktif dalam penelitian Shatanawi tersebut masih sederhana. Hal ini memotivasi penulis untuk menggeneralisasi fungsi kontraktif tersebut ke ruang yang berbeda yaitu ruang perluasan khusus b-metrik. Oleh karena itu permasalahan ini akan dibahas dalam penelitian dengan judul : "Titik Tetap di dalam Ruang Perluasan Khusus b-Metrik pada Fungsi Kontraktif Perbandingan".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimana membuktikan teorema titik tetap dalam ruang perluasan khusus b-metrik pada fungsi kontraktif perbandingan?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk membuktikan teorema titik tetap dalam ruang perluasan khusus b-metrik pada fungsi kontraktif perbandingan.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan pemikiran dalam perkembangan ilmu pengetahuan dalam hal ini pengembangan teori tentang titik tetap maupun ruang metrik. Selain itu, teorema yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan dapat diaplikasikan dalam penyelesaian persamaan diferensial dan persamaan integral.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menyajikan konsep dasar yang dibutuhkan dalam penelitian ini. Konsep dasar yang dimaksud yaitu, ruang metrik, barisan di ruang metrik, fungsi perbandingan, pemetaan kontraktif, dan titik tetap.

2. 1 Ruang Metrik dan Beberapa Perluasannya

Pada Subbab 2.1 ini disajikan definisi ruang metrik dan beberapa perluasan ruang metrik beserta contohnya, juga definisi barisan konvergen dan barisan Cauchy yang akan digunakan dalam tesis ini.

Definisi 2.1 (Ruang Metrik) [23] Misalkan X merupakan himpunan tak kosong dan misalkan $r : X \times X \to [0, +\infty)$ merupakan fungsi dan untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(A_1). $r(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(A_2). $r(x, y) = r(y, x)$;

(A_3). $r(x, z) \leq r(x, y) + r(y, z)$.

Maka r disebut metrik pada X, dan pasangan (X, r) disebut ruang metrik.

Contoh 2.1 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dengan $r(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ merupakan ruang metrik.

Akan ditunjukan (X, r) ruang metrik.

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. Misalkan $r(x, y) = 0$ maka $\sqrt{|x - y|} = 0$. Ini berlaku jika dan hanya jika $|x - y| = 0$. Oleh karena itu diperoleh $x - y = 0$. Akibatnya $x = y$.

   Misalkan $x = y$ maka

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \sqrt{|x - y|} \\ &= \sqrt{|x - x|} \\ &= \sqrt{|0|} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Berlaku

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \sqrt{|x-y|} \\ &= \sqrt{|-(y-x)|} \\ &= \sqrt{|y-x|} \\ &= r(y,x). \end{aligned}$$

3. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |a+b| &\leq |a|+|b| \\ &\leq |a|+|b|+2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} \\ &= \left(\sqrt{|a|}\right)^2+\left(\sqrt{|b|}\right)^2+2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} \\ &= \left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\right)^2. \end{aligned}$$

   Dengan mengambil akar kuadrat dari kedua ruas diperoleh

$$\sqrt{|a+b|} \leq \sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}.$$

   Misalkan $a = x - y$ dan $b = y - z$ maka

$$\sqrt{|x-y+y-z|} \leq \sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|},$$

   diperoleh

$$\sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|},$$

   dengan demikian

$$r(x,z) \leq r(x,y)+r(y,z).$$

Jadi, terbukti bahwa (X, r) merupakan ruang metrik. ■

Definisi 2.2 (Barisan Konvergen di Ruang Metrik) [24] Barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik X disebut konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ yang memenuhi: untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat N sedemikian sehingga $n \geq N \rightarrow r(x_n, x) < \varepsilon$, atau dengan kata lain, $\{x_n\}$ konvergen ke x, atau $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Contoh 2.2 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $r(x,y) = |x-y|$. Barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \frac{n+1}{n}$ konvergen ke 1.

Akan ditunjukkan $\{x_n\}$ konvergen ke 1.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berarti $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < N$ atau $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Terbukti $\{x_n\}$ konvergen ke 1. ■

Definisi 2.3 (Barisan Cauchy di Ruang Metrik) [24] Barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik X disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat N sedemikian sehingga $r(x_n, x_m) < \varepsilon$ jika $n \geq N$ dan $m \geq N$.

Contoh 2.3 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $r(x,y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \frac{n+1}{n}$ merupakan barisan Cauchy.

Akan dibuktikan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Untuk setiap $n, m \geq N$ diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ dan $\frac{1}{m} < \frac{1}{N}$ sehingga

$$\begin{aligned} \left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{nm}\right| &< \left|\frac{m+n}{nm}\right| \\ &\leq \left|\frac{m}{nm}\right| + \left|\frac{n}{nm}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{2}{N} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. ■

Definisi 2.4 (Ruang b-Metrik) [23] Misalkan X merupakan himpunan tak kosong dan $b \geq 1$ merupakan bilangan riil. Misalkan $r : X \times X \to [0, +\infty)$ merupakan fungsi dan untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi :

(A_1). $r_b(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(A_2). $r_b(x,y) = r_b(y,x)$;

(A_3). $r_b(x,z) \leq b[r_b(x,y) + r_b(y,z)]$.

Maka r_b disebut b-metrik pada X, dan pasangan (X, r_b) disebut ruang b-metrik.

Contoh 2.4 Misalkan $X = [0, +\infty)$ dan $r_b : X \times X \to [0, +\infty)$ yang didefinisikan sebagai

$$r_b(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y, \\ (x + y)^2 & \text{jika } x \neq y. \end{cases}$$

maka (X, r_b) ruang b-metrik.

Akan dibuktikan (X, r_b) disebut ruang b-metrik.

Ambil sebarang $x, y, z \in [0, +\infty)$.

1. $r_b(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ jelas dari definisi r_b.
2. Berlaku $r_b(x, y) = (x + y)^2 = (y + x)^2 = r_b(y, x)$.
3. Perhatikan bahwa $(x - z)^2 \geq 0$ sehingga $(x + z)^2 \leq (x + z)^2 + (x - z)^2$ diperoleh

$$\begin{aligned} (x + z)^2 &\leq 2x^2 + 2z^2 \\ &\leq 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2y^2 + 4yz + 2z^2 \\ &= 2(x^2 + 2xy + y^2) + 2(y^2 + 2yz + z^2) \\ &= 2(x + y)^2 + 2(y + z)^2 \\ &= 2[(x + y)^2 + (y + z)^2] \\ &= 2[r(x, y) + r(y, z)]. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa (X, r_b) merupakan ruang b-metrik dengan $b = 2$. ■

Definisi 2.5 (Barisan Konvergen dan Barisan Cauchy di Ruang *b*-Metrik) [21] Misalkan $\{x_n\}$ merupakan barisan pada ruang *b*-metrik (X, r_b).

1. Barisan $\{x_n\}$ disebut konvergen jika dan hanya jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $r_b(x_n, x) \to 0$ jika $n \to +\infty$.
2. $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika $r_b(x_n, x_m) \to 0$ jika $n, m \to +\infty$.

Contoh 2.5 Misalkan $X = [0, +\infty)$ dan $r_b(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y \\ (x + y)^2 & \text{jika } x \neq y \end{cases}$.

Barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ merupakan barisan yang konvergen ke 0 dan merupakan barisan Cauchy.

Akan dibuktikan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa $\frac{1}{(n^2+1)^2} < \frac{1}{n^4} < \frac{1}{n}$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$r_b(x_n, 0) = \left(\frac{1}{n^2+1} + 0\right)^2 = \left(\frac{1}{n^2+1}\right)^2 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Terbukti $\{x_n\}$ konvergen ke 0. ■

Selanjutnya akan dibuktikan $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{(n^2+1)^2} < \frac{1}{n^4} < \frac{1}{n}$$

dan

$$\frac{1}{(m^2+1)^2} < \frac{1}{m^4} < \frac{1}{m}.$$

Menurut Sifat Archimedes, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $N < \frac{4}{\varepsilon}$. Untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} r_b(x_n, x_m) &= \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{m^2+1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{2}{(n^2+1)(m^2+1)} + \frac{1}{(m^2+1)^2} \\ &< \frac{1}{n} + \frac{2}{nm} + \frac{1}{m} < \frac{4}{N} < \frac{4}{4/\varepsilon} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti $\{x_n\}$ barisan Cauchy. ■

Definisi 2.6 (Ruang Perluasan *b*-metrik) [13] Misalkan X himpunan tak kosong dan $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$. Sebuah fungsi $r_\Theta : X \times X \to [0, +\infty)$ disebut perluasan b-metrik jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(A_1). $r_\Theta(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(A_2). $r_\Theta(x, y) = r_\Theta(y, x)$;

(A_3). $r_\Theta(x, z) \leq \Theta(x, z)[r_\Theta(x, y) + r_\Theta(y, z)]$.

Pasangan (X, r_θ) disebut ruang perluasan b-metrik.

Contoh 2.6 Misalkan $X = \{1,2,3\}$, $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$, dan $r_\Theta : X \times X \to [0, +\infty)$ yang didefinisikan sebagai

$$\Theta(x, y) = 2xy,$$

$$r_\Theta(1,1) = r_\Theta(2,2) = r_\Theta(3,3) = 0,$$

$$r_\Theta(1,2) = r_\Theta(2,1) = 50,\ \ r_\Theta(1,3) = r_\Theta(3,1) = 450,\ \ r_\Theta(2,3) = r_\Theta(3,2) = 100,$$

maka (X, r_Θ) ruang perluasan b-metrik.

Akan dibuktikan (X, r_Θ) ruang perluasan b-metrik.

Ambil sebarang $x, y, z \in \{1,2,3\}$.

1. $r_\Theta(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ jelas dari definisi r_Θ.
2. $r_\Theta(x, y) = r_\theta(y, x)$ jelas dari definisi r_Θ.
3. $r_\Theta(1,2) = 50 < \Theta(1,2)[r_\Theta(1,3) + r_\Theta(3,2)] = 4\,[450 + 100] = 2200.$

   $r_\Theta(1,3) = 450 < \Theta(1,3)[r_\Theta(1,2) + r_\Theta(2,3)] = 6\,[50 + 100] = 900.$

   $r_\Theta(2,3) = 100 < \Theta(2,3)[r_\Theta(2,1) + r_\Theta(1,3)] = 12\,[50 + 450] = 6000.$

   Dengan demikian, untuk setiap $x, y, z \in \{1,2,3\}$ diperoleh

$$r_\Theta(x, z) \leq \Theta(x, z)[r_\Theta(x, y) + r_\Theta(y, z)].$$

Jadi, terbukti bahwa (X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik. ■

Contoh 2.7 [2] Misalkan $X = [0, +\infty)$. Definisikan $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$ dan $r_\Theta : X \times X \to [0, +\infty)$ sebagai berikut : $\Theta(x, y) = 1 + x + y$ untuk setiap $x, y \in X$ dan

$$r_\Theta(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Maka (X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik.

Akan dibuktikan (X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik.

$r_\Theta(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ dan $r_\Theta(x, y) = r_\Theta(y, x)$ jelas dari definisi r_Θ. Selanjutnya akan ditunjukan $r_\Theta(x, z) \leq \Theta(x, z)[r_\Theta(x, y) + r_\Theta(y, z)]$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

1. Untuk $x \neq z$, $x = y$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Theta(x, z)[r_\Theta(x, y) + r_\Theta(y, z)] &= (1 + x + z)[0 + (y + z)] \\ &= (1 + x + z)(x + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> x + z \\ &= r_\Theta(x, z). \end{aligned}$$

2. Untuk $x \neq z,\ z = y$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Theta(x, z)[r_\Theta(x, y) + r_\Theta(y, z)] &= (1 + x + z)[(x + y) + 0] \\ &= (1 + x + z)(x + z) \\ &> x + z \\ &= r_\Theta(x, z). \end{aligned}$$

3. Untuk $x \neq y \neq z$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Theta(x, z)[r_\Theta(x, y) + r_\Theta(y, z)] &= (1 + x + z)[(x + y) + (y + z)] \\ &= (1 + x + z)(x + 2y + z) \\ &> x + z \\ &= r_\Theta(x, z). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa (X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik. ■

Definisi 2.7 (Barisan Konvergen dan Cauchy di Ruang Perluasan *b*-Metrik)[13] Misalkan (X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik

a. Barisan $\{x_n\}$ di X disebut konvergen ke x jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $r_\Theta(x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Untuk kasus ini, kita tulis $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.
b. Barisan $\{x_n\}$ di X disebut Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $r_\Theta(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq N$.

Contoh 2.8 Misalkan $X = [0, +\infty)$. Definisikan $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$ dan $r_\Theta : X \times X \to [0, +\infty)$ sebagai berikut : $\Theta(x, y) = 1 + x + y$ untuk setiap $x, y \in X$ dan

$$r_\Theta(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

(X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik.

Barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$ pada (X, r_Θ) merupakan barisan yang konvergen ke 0 dan merupakan barisan Cauchy.

Akan dibuktikan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} r_\Theta(x_n,0) &\leq \Theta(x_n,0)[r_\Theta(x_n,x_{2n})+r_\Theta(x_{2n},0)] \\ &= \left(\frac{1}{n}+0+1\right)\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2n}+0\right)\right] \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{4}{2n}\right) \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Oleh karena $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=0$ maka $\lim_{n\to+\infty} r_\Theta(x_n,0)=0$, sehingga $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Terbukti $\{x_n\}$ konvergen ke 0. ■

Selanjutnya akan dibuktikan $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Perhatikan bahwa untuk setiap n, m berlaku

$$\begin{aligned} r_\Theta(x_n,x_m) &\leq \Theta(x_n,x_m)[r_\Theta(x_n,x_{2n})+r_\Theta(x_{2n},x_m)] \\ &= \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+1\right)\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{m}\right)\right] \\ &= \left(\frac{n+m+nm}{nm}\right)\left(\frac{m+n}{nm}\right). \end{aligned}$$

Oleh karena $\lim_{n,m\to+\infty}\left(\frac{n+m+nm}{nm}\right)\left(\frac{m+n}{nm}\right)=0$ maka $\lim_{n,m\to+\infty} r_\Theta(x_n,x_m)=0$ sehingga $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

Terbukti $\{x_n\}$ barisan Cauchy. ■

Definisi 2.8 (Ruang Perluasan Khusus *b*-Metrik) Misalkan X himpunan tak kosong dan $\theta : X \to [1,+\infty)$. Sebuah fungsi $r_\theta : X \times X \to [0,+\infty)$ disebut perluasan khusus b-metrik jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(A_1). $r_\theta(x,y)=0$ jika dan hanya jika $x=y$;

(A_2) $r_\theta(x,y)= r_\theta(y,x)$;

(A_3) $r_\theta(x,z) \leq \theta(x)\, r_\theta(x,y)+\theta(z)\, r_\theta(y,z)$.

Pasangan (X, r_θ) disebut ruang perluasan khusus b-metrik.

Contoh 2.9 Misalkan $X = \{1,2,3\}$, $\theta : X \to [1, +\infty)$, dan $r_\theta : X \times X \to [0, +\infty)$ yang didefinisikan sebagai

$$\theta(x) = 1 + x,$$
$$r_\theta(1,1) = r_\theta(2,2) = r_\theta(3,3) = 0,$$
$$r_\theta(1,2) = r_\theta(2,1) = 50,\ \ r_\theta(1,3) = r_\theta(3,1) = 450,\ \ r_\theta(2,3) = r_\theta(3,2) = 100,$$

maka (X, r_θ) ruang perluasan khusus b-metrik.

Akan dibuktikan (X, r_θ) ruang perluasan khusus b-metrik.

Ambil sebarang $x, y, z \in \{1,2,3\}$.

1. $r_\theta(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ jelas dari definisi r_θ.
2. $r_\theta(x, y) = r_\theta(y, x)$ jelas dari definisi r_θ.
3. $r_\theta(1,2) = 50 < \theta(1)\, r_\theta(1,3) + \theta(2)\, r_\theta(3,2) = 2(450) + 3(100) = 1200.$

   $r_\theta(1,3) = 450 < \theta(1)\, r_\theta(1,2) + \theta(3)\, r_\theta(2,3) = 2(50) + 4(100) = 500.$

   $r_\theta(2,3) = 100 < \theta(2)\, r_\theta(2,1) + \theta(3)\, r_\theta(1,3) = 3(50) + 4(450) = 1950.$

   Dengan demikian, untuk setiap $x, y, z \in X$ diperoleh

   $$r_\theta(x, z) \le \theta(x)\, r_\theta(x, y) + \theta(y)\ \ r_\theta(y, z).$$

Jadi, terbukti bahwa (X, r_θ) merupakan ruang perluasan khusus b-metrik. ■

Contoh 2.10 Misalkan $X = (0, +\infty)$, $\theta : X \to [1, +\infty)$, dan $r_\theta : X \times X \to [0, +\infty)$ yang didefinisikan sebagai $\theta(x) = x + 2$ dan

$$r_\theta(x, y) = \frac{(x - y)^2}{2}$$

maka (X, r_θ) merupakan ruang perluasan khusus b-metrik.

Akan ditunjukan (X, r_θ) merupakan ruang perluasan khusus b-metrik.

Ambil sebarang $x, y, z \in X$.

1. Misalkan $r_\theta(x, y) = 0$ maka $\frac{(x-y)^2}{2} = 0$. Ini berlaku hanya jika $(x - y)^2 = 0$. Oleh karena itu diperoleh $x - y = 0$. Akibatnya $x = y$.

   Misalkan $x = y$ maka $r_\theta(x, y) = \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{(x-x)^2}{2} = 0$.

2. Berlaku
$$r_\theta(x,y)=\frac{(x-y)^2}{2}=\frac{(y-x)^2}{2}=r_\theta(y,x)$$
3. Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned}&\theta(x)\,r_\theta(x,y)+\theta(z)\;\,r_\theta(y,z)\\ =\;&\frac{x+2}{2}(x-y)^2+\frac{z+2}{2}(y-z)^2\\ \geq\;&(x-y)^2+(y-z)^2\\ \geq\;&\frac{(x-z)^2}{2}\\ =\;&r_\theta(x,y).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa (X,r_θ) merupakan ruang perluasan b-metrik. ■

Definisi 2.9 (Barisan Konvergen dan Cauchy di Ruang Perluasan Khusus *b*-Metrik) Misalkan (X,r_θ) merupakan ruang perluasan khusus b-metrik.

a. Barisan $\{x_n\}$ di X disebut konvergen ke suatu titik $x\in X$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(x_n,x)=0$.
b. Barisan $\{x_n\}$ di X disebut Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n,m\geq N(\varepsilon)$, $r_\theta(x_n,x_m)<\varepsilon$.
c. (X,r_θ) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di X konvergen.

Contoh 2.11 Misalkan $X=(0,+\infty)$, $\theta:X\to[1,+\infty)$, dan $r_\theta:X\times X\to[0,+\infty)$ yang didefinisikan sebagai $\theta(x)=x+2$ dan
$$r_\theta(x,y)=\frac{(x-y)^2}{2}$$
(X,r_θ) merupakan ruang perluasan khusus b-metrik. Barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n=\frac{1}{n}$ pada (X,r_θ) merupakan barisan yang konvergen ke 0 dan merupakan barisan Cauchy.

Akan dibuktikan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.
$$r_\theta(x_n,0)\;\;\leq\theta(x_n)\,r_\theta(x_n,x_{2n})+\theta(0)\,r_\theta(x_{2n},0)$$

$$= \left(\left|\frac{1}{n}\right| + 2\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right)^2}{2}\right) + (|0| + 2)\left(\frac{\left(\frac{1}{2n} - 0\right)^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{4n+1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^2$$

Oleh karena $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = 0$ maka $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(x_n, 0) = 0$ sehingga $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Terbukti $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Selanjutnya akan dibuktikan $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

Perhatikan bahwa untuk setiap n, m berlaku

$$\begin{aligned} r_\theta(x_n, x_m) &\leq \theta(x_n)\, r_\theta(x_n, x_{2n}) + \theta(x_m)\, r_\theta(x_{2n}, x_m) \\ &= \left(\left|\frac{1}{n}\right| + 2\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right)^2}{2}\right) + \left(\left|\frac{1}{m}\right| + 2\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{m}\right)^2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2m}\right)\left(\frac{m-n}{2nm}\right)^2. \end{aligned}$$

Oleh karena $\lim_{n,m\to+\infty}\left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2m}\right)\left(\frac{m-n}{2nm}\right)^2\right) = 0$ maka $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(x_n, x_m) = 0$ sehingga $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

Terbukti $\{x_n\}$ barisan Cauchy. ■

Definisi 2.10 (Fungsi Kontinu) Misalkan (X, r_θ) dan $(Y, \rho_{\theta'})$ merupakan ruang perluasan khusus b-metrik dengan $\theta : X \to [1, +\infty)$ dan $\theta' : Y \to [1, +\infty)$. Fungsi $T : X \to Y$ disebut kontinu di $x_0 \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku:

$$r_\theta(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_{\theta'}(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

2.2 Fungsi Perbandingan dan Teorema Titik Tetap

Pada Subbab 2.2 disajikan definisi dari titik tetap, fungsi kontraktif, dan fungsi perbandingan. Selain itu, disajikan teorema titik tetap yang telah dibuktikan pada penelitian sebelumnya.

Definisi 2.11 (Titik Tetap) [25] Misalkan $X \subseteq Y$ himpunan tak kosong. $x \in X$ disebut titik tetap dari fungsi $T: X \to Y$ jika memenuhi

$$Tx = x.$$

Contoh 2.12 Misalkan $X = [0,1]$ dan $T: X \to \mathbb{R}$. Fungsi $T_1 = x + 1$ tidak mempunyai titik tetap, sedangkan fungsi $T_2 = x^2$ mempunyai dua titik tetap yaitu $x = 0$ dan $x = 1$.

Definisi 2.12 (Fungsi Kontraktif) Misalkan (X, r_Θ) merupakan ruang perluasan b-metrik dengan $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$ adalah suatu fungsi. Fungsi $T: X \to X$ disebut kontraktif di X jika terdapat bilangan riil $\mu \in (0,1)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$r_\Theta(Tx, Ty) \leq \mu\, r_\Theta(x, y).$$

Contoh 2.13 Misalkan $X = [0, +\infty)$. Definisikan $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$, $r_\Theta : X \times X \to [0, +\infty)$, dan $T: X \to X$ sebagai berikut : $\Theta(x, y) = 1 + x + y$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $r_\Theta(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$ dan fungsi $Tx = \frac{1}{2}x$.

Akan ditunjukkan T fungsi kontraktif.

$$r_\Theta(Tx, Ty) = r_\Theta\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(x + y) < \frac{3}{4}(x + y) = \frac{3}{4} r_\Theta(x, y).$$

Terbukti, T merupakan fungsi kontraktif dengan $\mu = \frac{3}{4}$. ■

Definisi 2.14 (Fungsi Perbandingan) [26] Fungsi $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ disebut fungsi perbandingan jika memenuhi

(i) φ naik,

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \varphi^n(t) = 0$ untuk setiap $t \geq 0$.

Jika φ merupakan fungsi perbandingan, maka $\varphi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$ dan $\varphi(0) = 0$.

Contoh 2.14 [27] Misalkan $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \varphi(t) = \frac{t}{t+1}, t \in \mathbb{R}^+$ maka φ merupakan fungsi perbandingan.

Akan dibuktikan φ fungsi perbandingan.

1. $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$ jelas monoton naik, karena $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0$.
2. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{t}{t+1}, \\
\varphi^2(t) &= \varphi(\varphi(t)) = \varphi\left(\frac{t}{t+1}\right) = \frac{\frac{t}{t+1}}{\frac{t}{t+1}+1} = \frac{t}{2t+1}, \\
\varphi^3(t) &= \varphi(\varphi^2(t)) = \varphi\left(\frac{t}{2t+1}\right) = \frac{\frac{t}{2t+1}}{\frac{t}{2t+1}+1} = \frac{t}{3t+1}, \\
&\dots \\
\varphi^n(t) &= \frac{t}{nt+1}.
\end{aligned}
$$

   Akibatnya $\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{t}{nt+1} = 0$.

3. $\varphi(0) = \frac{0}{0+1} = 0$.

Jadi, φ merupakan fungsi perbandingan karena memenuhi ketiga syarat pada definisi. ■

Teorema 2.15 [21] *Misalkan (X, r) ruang b-metrik lengkap dengan konstan b dan $T, S: X \to X$ dua pemetaan di X. Misalkan terdapat konstan $L < \frac{1}{1+b}$ dan fungsi perbandingan φ sedemikian sehingga*

$$br(Tx, Sy) \leq \varphi(max\{br(x, Tx), br(y, Sy), L[r(x, Sy) + r(Tx, y)]\}),$$

berlaku untuk setiap $x, y \in X$. Misalkan salah satu dari fungsi T atau S kontinu, maka T dan S mempunyai titik tetap sekutu.

Contoh 2.15 [21] Misalkan $X = [0,1], r: X \times X \to [0, +\infty), r(x, y) = (x - y)^2$. (X, r) merupakan ruang b-metrik dengan $b = 2$. Misalkan pemetaan

$T, S: X \to X, Tx = \frac{1}{4}x, Sx = \frac{1}{8}x,$ dan fungsi perbandingan $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty), \varphi(t) = \frac{t}{t+1}$.

Jelas (X, r) merupakan ruang b-metrik lengkap, dan S kontinu.

Akan ditunjukan memenuhi pertidaksamaan pada Teorema 14.

Kasus 1. $y = 2x$. Karena $Tx = Sy$, $r(Tx, Sy) = 0$, sehingga terbukti.

Kasus 2. $y > 2x$. Maka $\frac{1}{8}y > \frac{1}{4}x$ dan

$$\begin{aligned} 2r(Tx, Sy) &= 2\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right)^2 \leq \frac{1}{32}y^2 \leq \frac{49}{32 + 49y^2}y^2 = \varphi\left(\frac{49}{32}y^2\right) \\ &= \varphi\big(2r(y, Sy)\big) \\ &= \varphi(max\{2r(x, Tx), 2r(y, Sy), L[r(x, Sy) + r(Tx, y)]\}). \end{aligned}$$

Kasus 3. $y < 2x$. Maka $\frac{1}{8}y < \frac{1}{4}x$ dan

$$\begin{aligned} 2r(Tx, Sy) &= 2\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right)^2 \leq \frac{1}{8}x^2 \leq \frac{9}{8 + 9x^2}x^2 = \varphi\left(\frac{9}{8}x^2\right) \\ &= \varphi\big(2r(x, Tx)\big) \\ &= \varphi(max\{2r(x, Tx), 2r(y, Sy), L[r(x, Sy) + r(Tx, y)]\}). \end{aligned}$$

Jadi, T dan S mempunyai titik tetap sekutu yaitu $x = 0$.

Terbukti. ■

Definisi 2.16 (Perluasan Fungsi Perbandingan) [22] Misalkan X merupakan himpunan dan $\Theta : X \times X \to [1, +\infty)$ merupakan pemetaan. Fungsi $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ disebut perluasan fungsi perbandingan jika ψ memenuhi :

(i) ψ tidak turun,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(t) \prod_{i=1}^{n} \Theta(x_i, x_m) < +\infty$, sebarang barisan $\{x_n\}$ di X, untuk setiap $t > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ dimana ψ^n merupakan iterasi ke-n dari ψ.

Himpunan semua perluasan fungsi perbandingan dinotasikan dengan Ψ_s.

Jika $\psi \in \Psi_s$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < +\infty$, karena $\psi^n(t) \prod_{i=1}^{n} \Theta(x_i, x_m) \geq \psi^n(t)$ untuk setiap $t > 0$ diperoleh $\psi(t) < t$.

Contoh 2.16 [22] Misalkan X, r_Θ merupakan ruang perluasan b-metrik dengan $X = [1, \infty)$ dan $\Theta(x,y) = 1 + \frac{1}{1+\ln(x+y)}$. Definisikan fungsi $\psi(t) = \frac{kt}{2}$. Perhatikan bahwa $1 + \frac{1}{1+\ln(x+y)} \leq 2$, diperoleh

$$\psi^n(t) \prod_{i=1}^{n} \Theta(x_i, x) \leq \frac{k^n t}{2^n} \cdot 2^n = k^n t.$$

Akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) \prod_{i=1}^{n} \Theta(x_i, x) < +\infty$ dan Ψ_s himpunan tak kosong.

Definisi 2.17 [22] Misalkan (X, r_Θ) ruang perluasan b-metrik dan T merupakan pemetaan. T disebut fungsi kontaktif $\alpha - \psi$ jika terdapat dua fungsi $\psi \in \Psi_s$ dan $\alpha: X \times X \to [0, +\infty)$ sedemikian sehingga

$$\alpha(x,y) r_\Theta(Tx, Ty) \leq \psi\big(r_\Theta(x,y)\big)$$

untuk setiap $x, y \in X$. Selain itu, T disebut $\alpha - admissible$ jika $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\alpha(x,y) \geq 1$.

Teorema 2.18 [22] *Misalkan (X, d_Θ) ruang perluasan b-metrik lengkap dan $T: X \to X$ merupakan fungsi kontraktif $\alpha - \psi$ untuk suatu $\psi \in \Psi_s$. Misalkan syarat berikut terpenuhi :*

(1) T $\alpha - admissible$,

(2) Terdapat $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$,

(3) T kontinu,

Maka T memiliki titik tetap.

Selanjutnya misalkan terdapat $z \in X$sedemikian sehingga $\alpha(x,z) \geq 1$ untuk suatu $x \in X$ dengan $Tx = x$ maka titik tetap tersebut tunggal.

Contoh 2.17 [22] Misalkan (X, r_Θ) perluasan ruang b-metrik dengan $X = \{2, 1, -1\}$, $\Theta(x,y) = |x| + |y|$ dan $r_\Theta(x,y)$ sebagai berikut :

$$r_\Theta(2,2) = r_\Theta(1,1) = r_\Theta(-1,-1) = 0,$$

$$r_\Theta(1,2) = r_\Theta(2,1) = \frac{1}{2},$$

$$r_\Theta(1,-1) = r_\Theta(-1,1) = r_\Theta(2,-1) = r_\Theta(-1,2) = \frac{1}{3},$$

Fungsi $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ didefiniskan sebagai:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, \text{jika } (x,y) = (1,1), \\ \dfrac{1}{20}, \text{jika } (x,y) \neq (1,1). \end{cases}$$

Definisikan fungsi T sebagai berikut : $T(1) = 1, T(-1) = 2, T(2) = 1$ dan fungsi $\psi(t) = \frac{1}{8}t$.

Akan ditunjukan T memenuhi Teorema 17.

1. Akan ditunjukan T $\alpha - admissible$.
   $\alpha(x,y) \geq 1$ jika $x = y = 1$ (dari definisi $\alpha(x,y)$), maka $\alpha(Tx,Ty) = \alpha(T1,T1) = \alpha(1,1) = 1$. Jadi, T $\alpha - admissible$.
2. Akan ditunjukan terdapat $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$
   Pilih $x_0 = 1$ diperoleh $\alpha(x_0, Tx_0) = \alpha(1, T1) = \alpha(1,1) = 1 \geq 1$.
3. Akan ditunjukan T kontinu.
   Ambil $x, y \in X = \{2,1,-1\}$. Ambil $\varepsilon > 0$.
   Untuk $x = 2$ maka $N_\varepsilon(T2) = N_\varepsilon(1)$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{4}$ sehingga $N_\varepsilon(1) = \{1\}$. Akibatnya $T^{-1}\big(N_\varepsilon(T1)\big) = T^{-1}(\{1\}) = \{1,2\}$. Oleh karena terdapat $N_\delta(1) \subseteq \{1,2\}$ dan $N_\delta(2) \subseteq \{1,2\}$ diperoleh $T^{-1}(\{1\})$ himpunan buka sehingga T kontinu di $x = 2$.
   Untuk $x = 1$ maka $N_\varepsilon(T1) = N_\varepsilon(1)$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{4}$ sehingga $N_\varepsilon(1) = \{1\}$. Akibatnya $T^{-1}\big(N_\varepsilon(T2)\big) = T^{-1}(\{1\}) = \{1,2\}$. Oleh karena terdapat $N_\delta(1) \subseteq \{1,2\}$ dan $N_\delta(2) \subseteq \{1,2\}$ diperoleh $T^{-1}(\{1\})$ himpunan buka sehingga T kontinu di $x = 1$.
   Untuk $x = -1$ maka $N_\varepsilon(T(-1)) = N_\varepsilon(2)$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{4}$ sehingga $N_\varepsilon(2) = \{2\}$. Akibatnya $T^{-1}\big(N_\varepsilon(T(-1))\big) = T^{-1}(\{2\}) = \{-1\}$. Oleh karena terdapat $N_\delta(-1) \subseteq \{-1\}$ diperoleh $T^{-1}(\{2\})$ himpunan buka sehingga T kontinu di $x = -1$.
   Jadi, T kontinu.
4. Selanjutnya akan ditunjukan T merupakan fungsi kontraktif $\alpha - \psi$.
   Untuk $x = y$ diperoleh $\alpha(x,x)r_\Theta(Tx,Tx) = 0 \leq \psi\big(r_\Theta(x,x)\big) = \psi(0) = 0$ untuk setiap $x \in X$.

Untuk $x = 1$ dan $y = 2$ diperoleh $\alpha(1,2)r_{\Theta}(T1, T2) = \frac{1}{20}r_{\Theta}(1,1) = 0 \leq \psi\big(r_{\Theta}(1,2)\big) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

Untuk $x = 1$ dan $y = -1$ diperoleh $\alpha(1, -1)r_{\Theta}(T1, T - 1) = \frac{1}{20}r_{\Theta}(1,2) = \frac{1}{40} \leq \psi\big(r_{\Theta}(1, -1)\big) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24}$.

Untuk $x = 2$ dan $y = -1$ diperoleh $\alpha(2, -1)r_{\Theta}(T2, T - 1) = \frac{1}{20}r_{\Theta}(1,2) = \frac{1}{40} \leq \psi\big(r_{\Theta}(2, -1)\big) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24}$.

Karena $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ maka T merupakan fungsi kontraktif $\alpha - \psi$.

Jadi, T memenuhi Teorema 2.17. Dengan demikian T memiliki titik tetap yang tunggal yaitu $x = 1$.