Nilai Ketidakteraturan Modular Graf Hasil Operasi Comb Dua Graf Lintasan

Dermawan Lase

H022211008

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TESIS

NILAI KETIDAKTERATURAN MODULAR GRAF HASIL OPERASI COMB DUA GRAF LINTASAN

DERMAWAN LASE

NIM: H022211008

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 10 November 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

Pembimbing Pendamping

Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.
NIP. 196808031992021001

Ketua Program Studi
Magister Matematika

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 19720515 1997 02 1002

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Dermawan Lase

NIM : H022211008

Jurusan : Magister Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa tesis yang telah saya buat dengan judul: **"NILAI KETIDAKTERATURAN MODULAR GRAF HASIL OPERASI COMB DUA GRAF LINTASAN"**, adalah asli (orisinil) atau tidak plagiat (menjiplak) dan belum pernah diterbitkan/dipublikasikan dimanapun dan dalam bentuk apapun.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya tanpa ada paksaan dari pihak manapun. Apabila dikemudian hari terbukti dan dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi dari perbuatan tersebut.

Makassar, 5 Desember 2023

Yang menyatakan

Dermawan Lase

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf memiliki orde n dan fungsi pelabelan sisi $\psi: E \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$. Pelabelan $-\mathrm{k}$ tidak teratur $\psi: E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$ disebut pelabelan $-k$ tidak teratur modular jika untuk setiap $x \in V(G)$ terdapat pemetaan bijektif $\sigma: V(G) \rightarrow Z_n$ dengan $\sigma(x) = \sum_{y \in V} \psi(xy) \pmod n$. Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga graf G mempunyai suatu pelabelan $-k$ tidak teratur modular disebut nilai ketidakteraturan modular graf G yang dinotasikan dengan $ms(G)$. Apabila tidak terdapat pelabelan $-k$ tidak teratur modular pada graf G, maka didefinisikan $ms(G) = \infty$. Dalam jurnal ini, kita menyelidiki graf hasil operasi comb dua graf lintasan $(P_n \lhd P_m)$, pertama kita menemukan nilai ketidakteraturan graf hasil operasi comb dua graf lintasan $(s(P_n \lhd P_m))$, yang merupakan batas bawah nilai ketidakteraturan modular graf hasil operasi comb dua graf lintasan, dan kemudian kita mengkonstruksi sebuah pelabelan tidak teratur modular dan menemukan nilai ketidakteraturan modular graf hasil operasi comb dua graf lintasan $(ms(P_n \lhd P_m))$. Hasil menunjukkan bahwa nilai ketidakteraturan dan nilai ketidakteraturan modular sama.

***Kata kunci**: Graf Lintasan; Pelabelan tidak teratur; Pelabelan tidak teratur modular; Nilai ketidakteraturan modular.*

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph order n and an edge labeling $\psi: E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. Edge k labeling ψ is to be modular irregular $-\mathrm{k}$ labeling if exist a bijective map $\sigma: V \rightarrow Z_n$ with $\sigma(x) = \sum_{y \in V} \psi(xy) \pmod{\mathrm{n}}$. The modular irregularity strength of G $(ms(G))$ is a minimum positive integer k such that G have a modular irregular labeling. If the modular irregularity strength is none, then it is defined $ms(G) = \infty$. In this paper, we investigate the graph of results of two path graph comb product $(\mathrm{P_n} \lhd \mathrm{P_m})$, we first find irregularity strength of the graph of results of two path graph comb product $(s(\mathrm{P_n} \lhd \mathrm{P_m}))$, which is also the lower bound for modular irregularity strength, and then we construct a modular irregular labelling to find exact value of modular irregularity strength of the graph of results of two path graph comb product $(ms(\mathrm{P_n} \lhd \mathrm{P_m}))$. The result shows its irregularity strength and modular irregularity strength are equal.

Keywords*: Path graph; Irregular labeling; Modular irregular labeling; Modular irregularity strength*

Kata Pengantar

Segala puji syukur penulis panjatkan Tuhan atas segala berkat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Nilai Ketidakteraturan Modular Graf Hasil Operasi Comb Dua Graf Lintasan” tepat pada waktunya. Tesis ini ditulis dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar master pada Program Studi Magister Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyelesaian studi dan penulisan tesis ini, penulis banyak memperoleh bantuan baik pengajaran, bimbingan dan arahan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis menyampaikan penghargaan dan terimakasih yang tak terhingga kepada:

1. Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu ditengah kesibukan memberikan masukan dan kritikan selama proses penulisan tesis ini.
2. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing 2 yang dengan sabar memberikan pengarahan dan bimbingan yang membangun selama proses penulisan tesis ini.
3. Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si., Bapak Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS. dan Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji tesis yang memberikan arahan dan masukan yang sangat baik.
4. Orangtua penulis, Ibu I. Jones Lase yang tidak henti-hentinya mendoakan dan memberikan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
5. Saudara penulis, Abang Jones, Kakak Yanti, Abang Syukur dan Adek Benni yang memberikan support secara langsung maupun tidak langsung.
6. Teman-teman kelas penulis S2 Matematika 2021 Ganjil, Uli, Indah, Andi, Ria, Husnul, Afif, Nasrullah.

Terakhir, Penulis berharap bahwa tesis ini dapat berguna bagi siapapun yang membacanya.

Makassar,   November 2023

Penulis

Dermawan Lase

Daftar Isi

Daftar Gambar

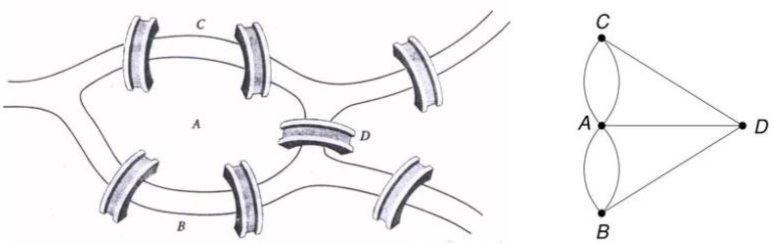
BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian dan manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah dan menguraikan permasalahan secara sederhana sehingga masalah dapat ditemukan solusinya. Menurut catatan sejarah, teori graf pertama kali digunakan dalam menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg pada tahun 1736, yaitu mungkinkah melalui tujuh jembatan tepat satu kali sampai kembali ke tempat awal?

Matematikawan Swiss, Leonhard Euler pada tahun 1736 merupakan orang pertama yang memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan dinyatakan dengan titik yang disebut sebagai simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan garis-garis yang disebut sebagai sisi (*edge*) seperti pada Gambar 1.1.



Gambar 1. 1 Jembatan Konigsberg dan Interepretasinya dalam Graf

Dengan memodelkan dalam graf, Euler menyimpulkan bahwa tidak mungkin seseorang berjalan melewati tepat satu kali setiap jembatan sampai kembali ke tempat awal.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam graf. Pelabelan pada graf dapat berupa pelabelan pada simpul dan pelabelan pada sisi ataupun keduanya. Pelabelan pada suatu graf merupakan fungsi/pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (simpul atau sisi atau keduanya) dengan bilangan bulat positif atau non-negatif. Ada beberapa pelabelan graf yang sudah diketahui yaitu pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan dan pelabelan ajaib.

Seiring perkembangan pengetahuan, perkembangan topik pelabelan graf juga terus berkembang. Sebelumnya, *irregularity strength* yang dinotasikan dengan $s(G)$ sudah sangat familiar dalam topik graf dan terus berkembang sehingga memunculkan parameter baru dalam graf yaitu *modular irregularity strength*.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf berorde $n > 2$. Suatu pelabelan k sisi tidak teratur $\psi: E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$ disebut pelabelan $-k$ tidak teratur modular apabila terdapat fungsi bobot bijektif $\sigma: V(G) \rightarrow Z_n$ yang didefinisikan dengan $\sigma(x) = \sum_{y \in V} \psi(xy)$ $(mod\ n)$ yang merupakan bobot modular simpul x, dimana Z_n adalah himpunan bilangan bulat positif modulo n. Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga graf G memiliki suatu pelabelan k tidak teratur modular disebut nilai ketidakteraturan modular dari graf G dilambangkan dengan $ms(G)$. Jika tidak terdapat pelabelan k tidak teratur modular pada graf G maka didefinisikan $ms(G) = \infty$ (Bača et al., 2020).

Penelitian tentang nilai ketidakteraturan modular sudah dilakukan sebelumnya diuraikan sebagai berikut: Bača et al. pada tahun 2020 meneliti nilai ketidakteraturan modular dari lima jenis graf yaitu graf lintasan (P_n), *graf bintang* ($K_{1,n}$), *triangular graph* (T_n), *cycle graph* (C_n), *gear graph* (G_n). Selanjutnya, Bača et al. pada tahum 2021 menjelaskan nilai ketidaksamaan modular dari graf kipas (*fan graph*) dan graf roda (*wheels graph*) sedangkan Sugeng et al. (2021) menguraikan nilai ketidakteraturan modular *double-star graph* ($S_{k,k}$) dan *friendship graph* (F_n).

Berdasarkan jenis-jenis graf yang telah ditemukan nilai ketidakteraturan modularnya di atas, salah satu jenis graf yang menarik untuk dibahas adalah graf lintasan, graf lintasan dapat dikembangkan dengan menemukan nilai ketidakteraturan modular dari graf hasil operasi comb dua graf lintasan. Berdasarkan hal ini, peneliti termotivasi untuk melakukan penelitian yaitu menemukan nilai ketidakteraturan $(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{G}))$ dan nilai ketidakteraturan modular $(\boldsymbol{ms}(\boldsymbol{G}))$ dari **graf hasil operasi comb dua graf lintasan.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan latarbelakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dari penelitian ini yaitu bagaimana menentukan nilai ketidakteraturan modular dari graf hasil operasi comb dua graf lintasan.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah menemukan nilai ketidakteraturan modular graf hasil operasi comb dua graf lintasan yaitu graf lintasan P_n dan graf lintasan P_m yang dilambangkan dengan $P_n \lhd P_m$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian adalah

1. Untuk menemukan nilai ketidakteraturan graf hasil operasi comb dua graf lintasan.
2. Untuk menemukan nilai ketidakteraturan modular graf hasil operasi comb dua graf lintasan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan referensi kepada pembaca untuk penelitian pada topik graf khususnya ketidakteraturan modular pada suatu graf.
2. Sebagai kontribusi perkembangan ilmu pengetahuan di bidang pelabelan graf.
3. Memotivasi penulis dan pembaca untuk terus melakukan penelitian tentang graf.

BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori dari proposal penelitian ini memuat uraian secara umum tentang teori, pemikiran dan hasil penelitian terdahulu yang berkaitan ketidakteraturan modular. Pembahasan bab ini meliputi, definisi dan terminologi graf, jenis-jenis graf, pelabelan graf dan nilai ketidakteraturan modular ($ms(G)$) graf yang sudah ditemukan.

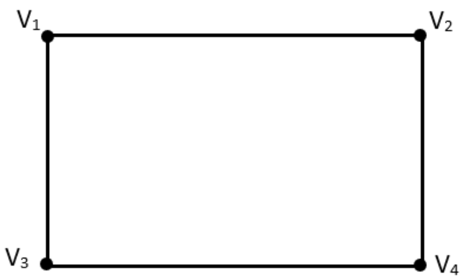
2.1. Definisi dan Terminologi Graf

Konsep dasar graf yang pertama kali dipelopori oleh ahli matematika dari Swiss benama Leonhard Euler terus mengalami perkembangan sehingga disimpulkan menjadi konsep-konsep dasar, teori graf, definisi dan sifat-sifatnya. Singkatnya, teori graf merupakan teori yang menjelaskan mengenai diskrit berupa simpul dan sisi yang dilengkapi dengan sifat dan aturan-aturan tertentu. Beberapa definisi dari graf akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 [10] Suatu graf (tak berarah) G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong berhingga dari elemen yang disebut simpul (*vertex*) dan E adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dari pasangan simpul dalam $V\ x\ V$ yang disebut sisi (*edge*).

Contoh 2.1

Gambar 2.1 menunjukkan sebuah graf $G = (V, E)$ dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$.



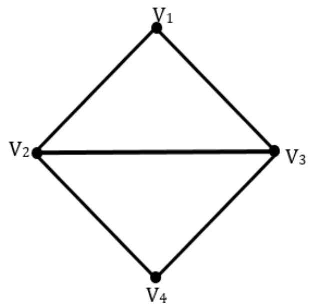
Gambar 2. 1 Graf G

Definisi 2.1.2 [11] Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga (a*djacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, v_1 bertetangga dengan v_2 jika (v_1, v_2) adalah sebuah sisi pada graf G.

Definisi 2.1.3 [11] Untuk sembarang sisi $e = (v_1, v_2)$, maka sisi e dikatakan bersisian (*incident*) dengan simpul v_1 dan simpul v_2.

Contoh 2.2

Pada Gambar 2.2 sisi (v_2, v_3),) bersisian dengan simpul v_2 dan simpul v_3, sisi (v_2, v_4) bersisian dengan simpul v_2 dan simpul v_4, tetapi sisi (v_1, v_2)) tidak bersisian dengan simpul v_4.

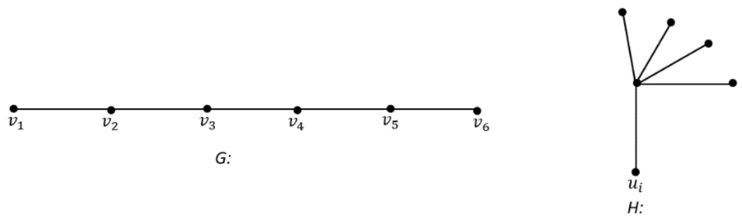


Gambar 2. 2 Graf Sederhana

Definisi 2.1.4 [4] Misalkan G adalah graf dan $v \in V$. Banyaknya sisi yang bersisian di v pada G disebut derajat (*degree*) dari simpul v dan dilambangkan dengan $d(v)$. Sebuah loop di v dihitung dua kali dalam menghitung derajat v.

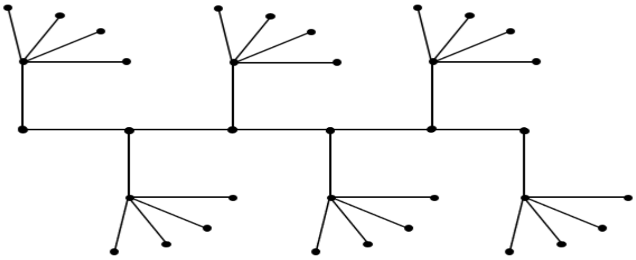
Definisi 2.1.5. [9] Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan u adalah titik di H. Operasi **comb** dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \lhd H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian G dan $|G|$ kopian dari H kemudian melekatkan titik u dari masing-masing graf H kopian ke -i pada titik ke -i dari graf G.

Contoh 2.3



Gambar 2. 3 Graf G dan Graf H

Graf comb antara graf G dan graf H ($G \lhd H$) diberikan pada Gambar 2.4 sebagai berikut.

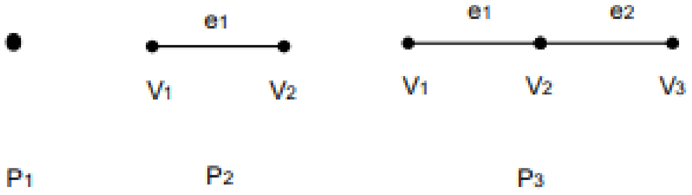


Gambar 2. 4 Graf G ⊲ H

2.2 Jenis-Jenis Graf

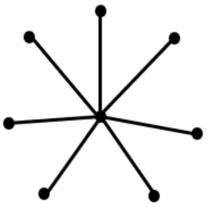
Graf dapat dikelompokkan dalam beberapa jenis, berdasarkan ciri khusus dari masing-masing graf. Beberapa jenis graf akan dijelaskan pada subbab ini, berdasarkan penelitian terdahulu dan graf yang akan digunakan pada penelitian ini merujuk pada referensi [8].

Definisi 2.2.1. Graf lintasan (*path graph*) dinotasikan dengan P_n adalah graf yang mempunyai tepat satu lintasan dengan n simpul dan memiliki $n-1$ sisi.



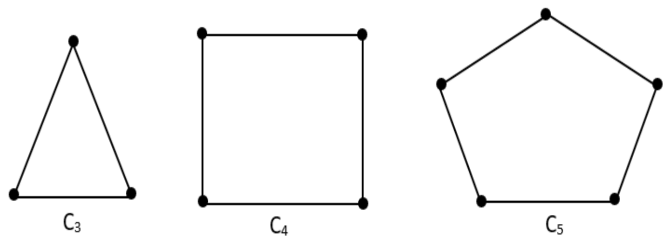
Gambar 2. 5 Graf Lintasan P_1, P_2, P_3

Definisi 2.2.2. Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu simpul berderajat $n-1$ dan $n-1$ simpul berderajat 1. Satu simpul yang berderajat $n-1$ disebut simpul pusat dan $n-1$ simpul yang berderajat satu disebut simpul-simpul luar.



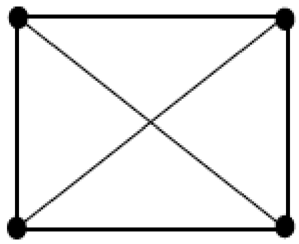
Gambar 2. 6 Graf Bintang S_8

Definisi 2.2.3 [11] Graf sikel (*cycle graph*) merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf sikel dinotasikan dengan C_n, $n \geq 3$.



Gambar 2. 7 Graf Sikel C_3, C_4, C_5

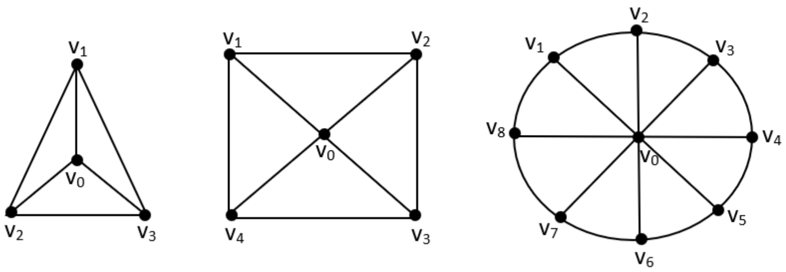
Definisi 2.2.4 [10] Graf lengkap Kn merupakan jenis graf regular yang berorde n dengan semua simpulnya berderajat n−1.



Gambar 2. 8 Graf Lengkap K_4

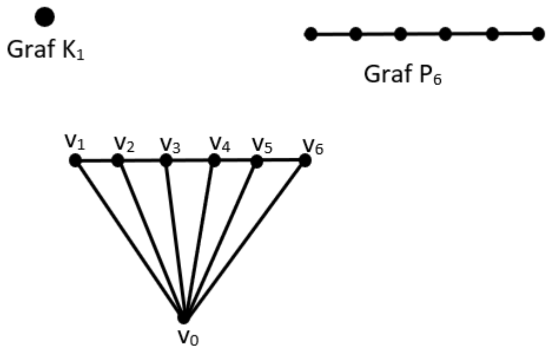
Definisi 2.2.5 [8] Graf roda (*wheel*) adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu simpul pusat x, dengan x bertetangga dengan semua simpul pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan W_n.

Definisi 2.2.5 adalah definisi dengan konsep operasi jumlah antara graf trivial dengan graf siklus. Graf trivial adalah graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sisi sehingga dari operasi jumlah tersebut terbentuk graf roda yakni $W_m = K_1 + C_m$. indeks m pada W_m menunjukkan banyaknya simpul pada siklus.



Gambar 2. 9 Graf Roda W_3, W_4, W_8

Definisi 2.2.5 [8] Graf kipas adalah graf yang dapat diperoleh dengan cara menghilangkan salah satu sisi pada siklus roda. Graf kipas dengan n simpul, $n \geq 3$ dinotasikan sebagai F_n dimana $F_n = P_{n-1} + K_1$. Jika $v_n \in K_1$ dan $v \in P_{n-1}$ maka sisi $v_0 v_i \in E(F_n)$ disebut jari-jari dari F_n.



Gambar 2. 10 Graf Kipas F6

2.3 Bilangan Modulo

Modulo merupakan suatu metode dalam ilmu matematika yang menyatakan nilai sisa dari suatu bilangan bulat, jika bilangan bulat tersebut dibagi dengan bilangan bulat lainnya.

Definisi 2.3.1 [13] Misalkan m bilangan bulat positif dan $a, b \in \mathbb{Z}$. a kongruen dengan b modulo m ($ditulis\ a \equiv b\ (mod\ m)$) apabila m habis membagi $(a - b)$. Jika m tidak habis membagi $(a - b)$, dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \neq b$ $(mod\ m)$).

Contoh 2.4

$21 \equiv 1\ (mod\ 5)$ dibaca “21 kongruen dengan 1 modulo 5” yang artinya 5 habis membagi $21 - 1$.

Definisi 2.3.2 [13] Jika $a \equiv r\ (mod\ m)$ dengan $0 \leq r < m$ maka r disebut residu terkecil dari a modulo m. Untuk kekongruenan modulo m ini, himpunan $\{0,1,2,3, .., (m - 1)\}$ disebut himpunan residu modulo m.

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (simpul atau sisi) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah himpunan simpul maka pelabelan tersebut adalah pelabelan simpul (*vertex labeling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi maka pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domain dari fungsi adalah himpunan simpul dan sisi, maka pelabelan tersebut adalah pelabelan total (*total labeling*).

2.4.1 Pelabelan tidak teratur

Chartrand pada tahun 1988 memperkenalkan pelabelan tidak teratur dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 [6] Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf yang berorde lebih besar atau sama dengan 3. Fungsi $\varphi: E \to \{1,2,3, \dots, k\}$ disebut pelabelan k tidak teratur pada G, jika untuk setiap dua simpul yang berbeda dalam V mempunyai bobot yang berbeda. Bobot simpul $x \in V$ terhadap fungsi φ dinotasikan dengan $\omega t_\varphi(x)$ dengan $\omega t_\varphi(x) = \sum_{y \in V} \varphi(xy)$.

Definisi 2.4.2 [6] Nilai ketidakteraturan dari G, dilambangkan dengan $s(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan $-k$ tidak teratur.

Chartrand et al. pada tahun 1988 juga menjelaskan teorema mengenai batas bawah pada nilai ketidakteraturan pada suatu graf (G) sebagai berikut.

Teorema 2.4.1. [6] Misalkan G merupakan graf yang berorde lebih besar dari 2 maka,

$$s(G) \geq \max\left\{\frac{n_i + i - 1}{i} : 1 \leq i \leq \Delta\right\},$$

dengan n_i menunjukkan banyaknya simpul yang berderajat i dan Δ merupakan derajat maksimum graf G.

2.4.2 Pelabelan tidak teratur modular

Pada tahun 2020, Bača dkk memperkenalkan mengenai pelabelan tidak teratur modular pada graf. Berdasarkan penjelasan tersebut, diperoleh beberapa definisi dan teorema mengenai pelabelan tidak teratur modular.

Definisi 2.4.3 [3] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf ber orde $n > 2$. Pelabelan k tidak teratur $\psi: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ disebut pelabelan k tidak teratur modular jika untuk suatu $x \in V(G)$ terdapat pemetaan bijektif $\sigma: V(G) \rightarrow Z_n$ dengan

$$\sigma(x) = \sum_{y \in V} \psi(xy) \ (mod\ n).$$

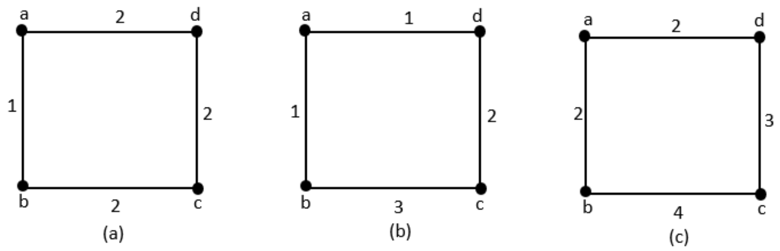
Definisi 2.4.4 [3] Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga graf G mempunyai suatu pelabelan k tidak teratur modular disebut nilai ketidakteraturan modular graf G yang dinotasikan dengan $ms(G)$. Apabila tidak terdapat pelabelan k tidak teratur modular pada graf G, maka didefinisikan $ms(G) = \infty$.

Teorema 2.4.2 [3] Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf yang memiliki order $n > 2$ maka,

$$s(G) \leq ms(G).$$

Teorema 2.4.3 [3] Misalkan G merupakan graf berorde $n \equiv 2\ (mod\ 4)$, maka graf G tidak terdapat suatu pelabelan $-k$ tidak teratur modular pada graf G, $ms(G) = \infty$.

Contoh 2.5



Gambar 2.11 (a). Bukan suatu pelabelan 2 tidak teratur modular, (b). Pelabelan 3 tidak teratur modular, (c). Pelabelan 4 tidak teratur modular

Pelabelan C_4 pada Gambar 2.12 (a) bukan merupakan suatu pelabelan tidak teratur modular karena pemetaan $\sigma: V(G) \rightarrow Z_4$ bukan merupakan pemetaan bijektif karena $\sigma(a) = \sigma(b)$= 3. Pelabelan C_4 pada Gambar 2.12 (b) yaitu $\psi: E(G) \rightarrow \{1,2,3\}$ merupakan suatu pelabelan -3 tidak teratur modular karena terdapat pemetaan bijektif $\sigma: V(G) \rightarrow Z_4$, yaitu $\sigma(a) = 2$, $\sigma(b) = 0$, $\sigma(c) = 1$, $\sigma(d) = 3$. Demikian juga pelabelan C_4 pada Gambar 2.12 (c) yaitu $\psi: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ merupakan suatu pelabelan -4 tidak teratur modular karena terdapat pemetaan bijektif $\sigma: V(G) \rightarrow Z_4$, yaitu $\sigma(a) = 0, \sigma(b) = 2, \sigma(c) = 3, \sigma(d) = 1$.

Berdasarkan Definisi 2.4.4 bahwa nilai ketidakteraturan modular $(ms(G))$ merupakan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan k tidak teratur modular. Berdasarkan pelabelan pada Gambar 2.11 (b) dan Gambar 2.11 (c) diperoleh $k = 3$ dan $k = 4$, karena itu, $\boldsymbol{ms(C_4) < 3}$.

2.5 Nilai ketidakteraturan modular beberapa jenis graf

Bača et al. pada tahun 2020 memberikan nilai ketidakteraturan modular sebagai berikut.

1. Misalkan graf lintasan P_n dengan orde $n \geq 3$.

$$ms(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & if\ n \not\equiv 2(mod4) \\ \infty, & if\ n \equiv 2(mod4), \end{cases}$$

2. Misakan $K_{1,n}$ adalah graf bintang dengan orde $n + 1, n \geq 2$.

$$ms(K_{1,n}) = \begin{cases} n, & if\ n\ \equiv 0,2(mod\ 4) \\ n+1, & if\ n \equiv 3\ (mod\ 4) \\ \infty, & if\ n \equiv 1\ (mod\ 4), \end{cases}$$

3. Misalkan T_n adalah graf triangular dengan orde $2n - 1, n \geq 2$.

$$ms(T_n) = \begin{cases} \frac{n+4}{2}, & n\ genap \\ \frac{n+3}{2}, & n\ ganjil, \end{cases}$$

4. Misalkan C_n adalah graf sikel dengan orde $n, n \geq 3$.

$$ms(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & if\ n\ \equiv 1(mod\ 4) \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, & if\ n \equiv 0,3\ (mod\ 4) \\ \infty, & if\ n \equiv 2\ (mod\ 4), \end{cases}$$

5. Misalkan G_n (*gear graph*) dengan orde $2n$, $n \geq 3$.

$$ms(G_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, & if\ n\ even \\ \infty, & if\ n\ odd, \end{cases}$$

Selanjutnya Bača et al. pada tahun 2021 mendapatkan nilai ketidaksamaan modular dari graf kipas (*fan graph*) sebagai berikut.

Misalkan F_n adalah graf kipas dengan $n + 1$ simpul, $n \geq 2$ genap.

$$ms(F_n) = \begin{cases} 3, & n = 2 \\ 4, & n = 8 \\ \infty, & n = 1 \ (mod\ 4) \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, & lainnya. \end{cases}$$

Kemudian Bača et al. pada tahun 2021 menemukan ketidaksamaan modular dari graf roda (*wheels graphs*) sebagai berikut.

Misalkan W_n adalah graf roda dengan simpul $n + 1$, $n \geq 3$.

$$ms(W_n) = \begin{cases} 3, & n = 3\ dan\ n = 4 \\ 5, & n = 10 \\ \infty, & n = 1 \ (mod\ 4) \\ \frac{n+2}{3}, & lainnya. \end{cases}$$

Kemudian pada tahun 2021, Sugeng et al. menemukan nilai ketidaksamaan modular dari graf bintang ganda (*double-star graph*) dan graf persahabatan (*friendship graph*) sebagai berikut.

Misalkan $S_{k,k}$, $k \geq 1$ merupakan graf bintang ganda.

$$ms(S_{k,k}) = \begin{cases} 2k, & k\ is\ odd \\ \infty, & k\ is\ even, \end{cases}$$

Misalkan F_n merupakan graf persahabatan dengan $n \geq 1$.

$$ms(F_n) = n + 1$$

Tilukay pada tahun 2021 menemukan nilai ketidaksamaan modular dari graf buku segitiga (*triangular book graph*) sebagai berikut.

Misalkan $B_n^{(3)}, n \geq 2$ adalah graf buku segitiga dengan orde $n + 1$ dengan ukuran $2n + 1$.

$$ms(F_n) = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 4, & n = 5 \\ \infty, & n = 0 \ (mod\ 4) \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & lainnya. \end{cases}$$