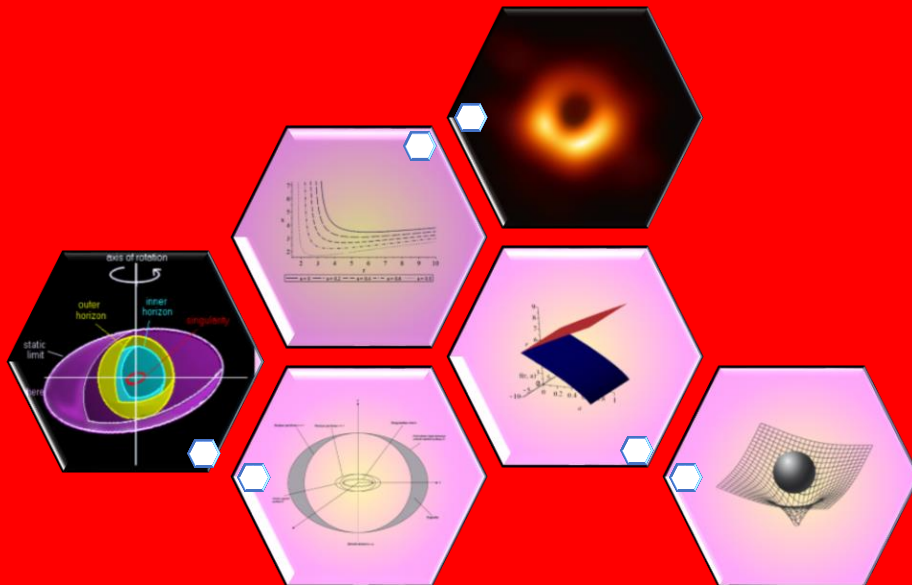


Hasil Penelitian

ASPEK GEODESIK PARTIKEL BERMASA DI RUANG-WAKTU KERR



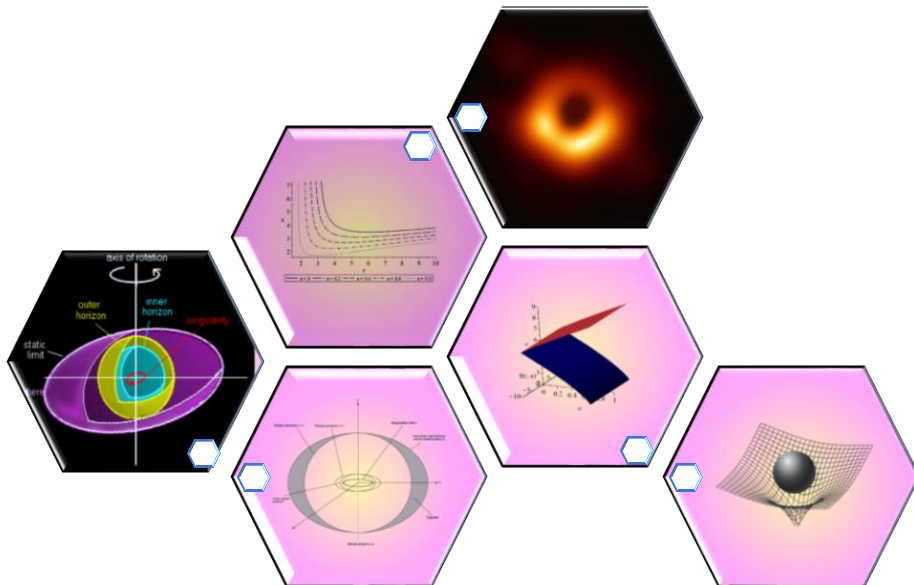
FAQIHAH FAJRIANI. J
H021201047



PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

Hasil Penelitian

ASPEK GEODESIK PARTIKEL BERMASA DI RUANG-WAKTU KERR



FAQIH AH FAJRIANI. J
H021201047



PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

ASPEK GEODESIK PARTIKEL BERMASSA DI RUANG-WAKTU KERR

**FAQIHAH FAJRIANI J
H021201047**



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

ASPEK GEODESIK PARTIKEL BERMASA DI RUANG-WAKTU KERR

FAQIHAN FAJRIANI. J

H021 20 1047

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Fisika

pada

PROGRAM STUDI FISIKA

DEPARTEMEN FISIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI**ASPEK GEODESIK PARTIKEL BERMASA DI RUANG-WAKTU KERR****FAQIHAH FAJRIANI. J****H021 20 1047**

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Program Studi Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Hasanuddin pada **13 Desember 2024** dan dinyatakan telah memenuhi
syarat kelulusan

pada

Program Studi Fisika
Departemen Fisika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:

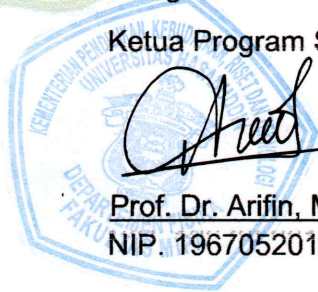
Pembimbing tugas akhir,


Drs. Bansawang BJ, M.Si
NIP. 196312061994121001

Mengetahui:

Ketua Program Studi,


Prof. Dr. Arifin, M.T
NIP. 196705201994031002



PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "**Aspek Geodesik Partikel Bermassa di Ruang-Waktu Kerr**" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Drs. Bansawang BJ, M.Si. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 13 Desember 2024



Faqihah Fajriani. J
H021 20 1047

Ucapan Terima Kasih

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat **Allah SWT**, yang dengan rahmat, hidayah dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Aspek Geodesik Partikel Bermassa di Ruang-Waktu Kerr”**. Salawat dan salam senantiasa tercurah kepada **Nabi Muhammad SAW**, pembawa risalah kebenaran dan ilmu pengetahuan yang menjadi teladan bagi seluruh umat manusia.

Penyusunan skripsi ini tidak akan terselesaikan tanpa dukungan, bimbingan dan kontribusi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa hormat dan terima kasih yang mendalam kepada orang tua tercinta, Ayahanda **Jasman** dan ibunda **Sanatang** atas doa yang tiada henti, dukungan moral yang kuat, serta motivasi tanpa batas yang selalu menjadi penolong utama dalam setiap langkah penulis. Penulis juga berterima kasih kepada kakak tercinta **Syahriani** dan adik tersayang **Dian Ramadhani** yang senantiasa memberikan semangat.

Ungkapan terima kasih penulis sampaikan kepada Bapak **Drs. Bansawang BJ, M.Si** selaku dosen pembimbing yang dengan sabar memberikan waktu, perhatian, dan bimbingan yang mendalam serta berharga selama proses penyusunan skripsi ini. Tidak lupa, penulis menyampaikan apresiasi yang tulus kepada Bapak **Prof. Dr. Tasrief Surungan M.Sc.** dan Ibu **Prof. Dr. Ir. Bidayatul Arminah, M.T.** selaku dosen penguji, atas kritik dan saran konstruktif yang sangat membantu dalam meningkatkan kualitas skripsi ini. Secara khusus, penulis berterima kasih kepada Bapak **Prof. Dr. Tasrief Surungan, M.Sc.** yang telah memberikan motivasi kepada penulis untuk mendalami bidang Fisika Teori dan Komputasi. Arahan dan wawasan yang diberikan selama ini menjadi inspirasi yang sangat berharga dan turut memperkuat tekad penulis dalam memilih fokus penelitian ini.

Rasa terima kasih yang tulus juga penulis sampaikan kepada Bapak **Prof. Dr. rer-nat Wira Bahari Nurdin**, selaku Kepala Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi, atas dukungan fasilitas yang diberikan, serta kepada Bapak **Eko Juarlin, S.Si., M.Si.**, yang telah membantu memfasilitasi penggunaan laptop di laboratorium sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini dengan lancar. Selain itu, penulis berterima kasih kepada Ibu **Prof. Dr. Nurlaela Rauf, M.Sc.** dan Ibu **Dr. Sri Dewi Astuty, M.Si.**, yang selalu mendampingi dalam berbagai kegiatan perlombaan dan memberikan motivasi untuk terus berkembang.

Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada Bapak **Prof. Dr. Arifin, M.T** selaku Ketua Departemen Fisika FMIPA Unhas, serta seluruh **Bapak dan Ibu Dosen Pengajar Departemen Fisika FMIPA Unhas**, yang telah memberikan ilmu berharga. Kepada **Staf Departemen Fisika; Pak Syukur, Ibu Rana, dan Ibu Evi**, penulis haturkan terima atas bantuannya dalam kelancaran proses administrasi selama masa studi.

Dukungan penuh juga datang dari Kakak-kakak **Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi (Kak Ghazali, Kak Safrullah, Kak Ade, Kak Israil, Kak Umniyah, Kak Ifa, dan Kak Fitri)** yang senantiasa memberikan bantuan dan diskusi selama penelitian berlangsung. Kebersamaan yang tak ternilai juga penulis dapatkan dari

rekan-rekan **FTK 2020 (Eka, Uci, Bayu, Stevan, Sahrul, dan Imam)**, yang selalu mendukung dalam studi dan penelitian.

Penulis merasa beruntung dikelilingi sahabat-sahabat terbaik **Dillah, Izzatun, Mol, Fiqa, Winda, Rahel, Selfi, Indri, Emar, Bayu, Aan, Pryandi, Bisman dan Dayat**, yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat dalam menghadapi berbagai tantangan. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada rekan-rekan seperjuangan di **Himafi FMIPA Unhas 2020 (Re20nansi), KKNT 111 Mitigasi Bencana Abrasi Takalar 2 dan Binar Academy**, atas kebersamaan, dukungan, dan motivasi yang tak pernah berhenti.

Sebagai penyemangat tambahan, karya-karya dari **Super Junior 슈퍼주니어**, yang telah memberikan kebahagiaan dan semangat tersendiri bagi penulis di tengah berbagai tantangan yang dihadapi. Ucapan terima kasih ini juga ditunjukkan kepada **Semua Pihak** yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, namun telah memberikan doa, dukungan, dan bantuan yang sangat berarti sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi penyempurnaan di masa mendatang. Semoga segala bantuan, dukungan, dan doa yang telah diberikan mendapatkan balasan terbaik dari Allah SWT. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan menjadi langkah awal untuk studi lebih lanjut di bidang Fisika Teori dan Komputasi. Aamiin.

Penulis

Faqihah Fajriani. J

ABSTRAK

FAQIHAH FAJRIANI. J **Aspek Geodesik Partikel Bermassa di Ruang-Waktu Kerr** (dibimbing oleh Bansawang BJ).

Latar belakang. Lubang hitam Kerr merupakan solusi dari persamaan medan Einstein yang menunjukkan kelengkungan ruang-waktu akibat gravitasi objek masif berotasi. Geodesik digunakan untuk mempelajari lintasan partikel di sekitar lubang hitam. Namun, kajian terkait geodesik partikel bermassa tanpa muatan di bidang ekuator masih terbatas. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan untuk menurunkan persamaan geodesik partikel bermassa di bidang ekuator ruang-waktu Kerr dan memvisualisasikan karakteristik lintasan geodesik partikel di sekitar lubang hitam Kerr melalui analisis grafis. **Metode.** Penulis menurunkan persamaan geodesik menggunakan pendekatan Euler-Lagrange, mempelajari gerak melingkar, dan menganalisis stabilitas orbit partikel bermassa di ekuator. Penulis juga menurunkan persamaan *Innermost Stable Circular Orbit* (ISCO) untuk menentukan batas orbit stabil terdalam di sekitar lubang hitam Kerr. **Hasil.** Penelitian ini menghasilkan persamaan yang menggambarkan lintasan partikel bermassa di ekuator ruang-waktu Kerr, termasuk pengaruh rotasi lubang hitam terhadap energi, momentum sudut, dan stabilitas orbit. serta menunjukkan hubungan antara radius orbit stabil terdalam dan parameter rotasi lubang hitam melalui persamaan *Innermost Stable Circular Orbit* (ISCO). **Kesimpulan.** Rotasi lubang hitam Kerr memengaruhi dinamika partikel bermassa secara signifikan, terutama dalam menentukan batas orbit stabil terdalam.

Kata kunci: Lubang hitam Kerr, Geodesik, Partikel Bermassa, Gerak Melingkar, ISCO

ABSTRACT

FAQIH AH FAJRIANI. *Geodesic Aspects of Massive Particles in Kerr Spacetime* (supervised by Bansawang BJ).

Background. Kerr black holes are solutions to Einstein's field equations that describe the curvature of spacetime caused by the gravity of rotating massive objects. Geodesics are used to study particle trajectories around black holes. However, research on the geodesics of massive particles in the equatorial plane is still limited. **Aim.** This study aims to derive the geodesic equations for massive particles in the equatorial plane of Kerr spacetime and visualize the characteristics of their geodesic trajectories around Kerr black holes through graphical analysis. **Methods.** The study derives the geodesic equations using the Euler-Lagrange approach, investigates circular motion, and analyzes the stability of the massive particle orbit in the equatorial plane. Additionally, the study derives the equation for the Innermost Stable Circular Orbit (ISCO) to determine the boundary of the innermost stable orbit around the Kerr black hole. **Results.** The study derives equations that describe the trajectories of massive particles in the equatorial plane of Kerr spacetime, including the effects of black hole rotation on energy, angular momentum, and orbital stability. It also demonstrates the relationship between the radius of the innermost stable orbit and the black hole's rotational parameter through the ISCO equation. **Conclusion.** The rotation of the Kerr black hole significantly influences the dynamics of massive particles, especially in determining the stability of their orbits.

Keywords: Kerr black hole, Geodesic, Massive particles, Circular motion, ISCO

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	ii
PERNYATAAN PENGAJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	v
UCAPAN TERIMA KASIH	vi
ABSTRAK	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
DAFTAR LAMBANG	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	2
BAB II METRIK KERR DAN STRUKTUR LUBANG HITAM KERR	3
2.1 Metrik Kerr	3
2.2 Struktur Lubang Hitam Kerr	3
BAB III GEODESIK DI RUANG-WAKTU KERR	5
3.1 Persamaan Geodesik	5
3.2 Geodesik dalam Bidang Ekuator	6
3.3 Gerak Melingkar Partikel Bermassa di Ekuator	9
3.4 Stabilitas Orbit Melingkar Partikel Bermassa di Ekuator	11
3.5 Analisis Grafis Lintasan Geodesik	12
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	16
4.1 Kesimpulan	16
4.2 Saran	16
DAFTAR PUSTAKA	17
LAMPIRAN	19

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut	Halaman
Gambar 1. Struktur lubang hitam Kerr	4
Gambar 2. Grafik potensial efektif V_{eff} terhadap radius r	12
Gambar 3. Grafik jarak radial x terhadap radius r	13
Gambar 4. (a) Energi total partikel <i>co-rotating</i> di lubang hitam	13
(b) Energi total <i>counter-rotating</i> di lubang hitam Kerr	13
Gambar 5. (a) Momentum sudut partikel <i>co-rotating</i> di lubang hitam Kerr	14
(b) Momentum sudut partikel <i>counter-rotating</i> di lubang hitam Kerr	14
Gambar 6. Jari-jari koordinat r untuk ISCO <i>co-rotating</i> dan <i>counter-rotating</i>	14

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. Perhitungan Persamaan Geodesik.....	19
B. Perhitungan Geodesik dalam Bidang Ekuator	20
C. Gerak Melingkar Partikel Bermassa di Ekuator	25
D. Persamaan ISCO	29

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Definisi
$g_{\mu\nu}$	Metrik ruang-waktu
ds	Elemen garis dalam metrik ruang-waktu
M	Massa lubang hitam
Δ	Fungsi diskriminan
ρ^2	Fungsi koordinat Kerr
E	Energi total partikel
J	Momentum sudut partikel
V_{eff}	Potensial efektif
a	Momentum sudut per satuan massa lubang hitam atau parameter rotasi.
P_μ	Komponen momentum 4-dimensi dari partikel.
P_t	Komponen momentum energi ($-E$)
P_ϕ	Komponen momentum sudut azimuthal (J)
P_r	Komponen momentum radial ($g_{rr}\dot{r}$)
r	Radius orbit atau koordinat radial
g_{tt}	Komponen metrik terkait koordinat waktu t
$g_{t\phi}$	Komponen metrik silang antara t dan ϕ
g_{rr}	Komponen metrik terkait koordinat radial r
$g_{\theta\theta}$	Komponen metrik terkait koordinat sudut polar θ
$g_{\phi\phi}$	Komponen metrik terkait koordinat sudut azimuthal ϕ
ω	Kecepatan sudut <i>frame-dragging</i>
$\dot{t}$	Laju perubahan koordinat waktu t terhadap parameter afinis
$\dot{\phi}$	Laju perubahan koordinat azimuthal ϕ terhadap parameter afinis
$\dot{r}$	Laju perubahan koordinat radial r terhadap parameter afinis

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Lubang hitam (*black hole*) merupakan salah satu solusi dari persamaan medan gravitasi Einstein dalam Teori Relativitas Umum yang menggambarkan bagaimana ruang-waktu melengkung akibat adanya massa atau energi. Teori ini menunjukkan bahwa benda yang sangat masif, seperti lubang hitam dapat menyebabkan kelengkungan ruang-waktu yang sangat ekstrem, menciptakan sebuah wilayah dengan medan gravitasi yang sangat kuat. Di wilayah ini, tidak ada objek termasuk cahaya yang dapat lolos melewati batas yang dikenal sebagai horizon peristiwa (*event horizon*) (Kunz, 2014).

Di antara berbagai jenis lubang hitam yang diprediksi oleh Relativitas Umum, lubang hitam berotasi atau dikenal sebagai lubang hitam Kerr adalah salah satu yang paling signifikan. Solusi persamaan medan gravitasi Einstein untuk lubang hitam Kerr pertama kali ditemukan oleh Roy Patrick Kerr pada tahun 1963 dan solusi ini kemudian dikenal sebagai metrik Kerr (Matt Visser, 2008; Sunkar E. Gautama, 2018). Metrik ini menggambarkan struktur ruang-waktu di sekitar lubang hitam Kerr yang memiliki beberapa fitur unik seperti keberadaan ergosfer, yaitu sebuah wilayah di luar horizon peristiwa di mana ruang-waktu itu sendiri terseret mengikuti arah rotasi lubang hitam (*frame dragging*). Keberadaan ergosfer ini mempengaruhi pergerakan partikel di sekitar lubang hitam yang menjadikan fenomena ini sangat menarik untuk dipelajari lebih lanjut (Gonzalez Montoya, 2024; Hasanuddin, 2012).

Dalam Relativitas Umum, lintasan yang diikuti oleh partikel atau cahaya di ruang-waktu yang melengkung disebut geodesik. Geodesik adalah lintasan yang ditempuh oleh objek yang hanya dipengaruhi oleh kelengkungan ruang-waktu tanpa adanya gaya eksternal (Moshe Carmeli, 1982). Untuk memahami gerak objek di sekitar lubang hitam, diperlukan analisis geodesik karena memberikan wawasan mengenai bagaimana gravitasi ekstrem di sekitar lubang hitam mempengaruhi pergerakan partikel bermassa maupun foton (McInnes, 2012; Seetharaman et al., 2022).

Penelitian terkait geodesik di ruang-waktu Kerr telah dilakukan dengan berbagai pendekatan, Zhang dan Liu (2019) menyelidiki stabilitas orbit partikel bermuatan dan berotasi di sekitar lubang hitam, namun penelitian ini lebih terfokus pada dinamika partikel bermuatan, sehingga belum menganalisis secara mendalam geodesik partikel bermassa tanpa muatan. Kesden et al. (2010) menganalisis efek gravitasi ekstrem, tetapi hasil penelitiannya tidak secara spesifik meninjau geodesik partikel bermassa di bidang ekuator, yang merupakan aspek penting dalam konteks penelitian ini. Di sisi lain, J. M. Bardeen et al. (1973) merumuskan dasar-dasar mekanika lubang hitam, yang memberikan fondasi penting bagi studi lubang hitam secara umum, tetapi tidak mencakup kajian yang lebih mendalam mengenai geodesik partikel bermassa, khususnya yang berkaitan dengan pergerakan di sekitar ekuator lubang hitam Kerr.

Berdasarkan kajian literatur tersebut, terdapat kesenjangan penelitian dalam analisis geodesik partikel bermassa tanpa muatan di ruang-waktu Kerr, khususnya pada bidang ekuator. Hal ini menunjukkan perlunya penelitian yang lebih spesifik untuk memahami perilaku partikel bermassa dalam konteks gravitasi ekstrem di sekitar lubang hitam Kerr.

Penelitian ini akan menurunkan persamaan geodesik partikel bermassa di ruang-waktu Kerr dengan fokus pada geodesik di bidang ekuator. Proses ini mencakup derivasi persamaan geodesik menggunakan pendekatan Euler-Lagrange, studi gerak melingkar, serta stabilitas orbit partikel bermassa di ekuator. Selain itu, penelitian ini juga akan menurunkan persamaan *Innermost Stable Circular Orbit* (ISCO) untuk menggambarkan batas orbit stabil terdalam di sekitar lubang hitam Kerr. Penurunan dalam penelitian ini didasarkan pada buku *General Relativity* karya Hobson, Efstathiou dan Lasenby, yang memberikan landasan teoretis untuk memahami aspek-aspek geodesik partikel di ruang-waktu Kerr. Dengan demikian, diharapkan penelitian ini dapat memperdalam pemahaman mengenai perilaku partikel bermassa di sekitar lubang hitam Kerr.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menurunkan persamaan geodesik untuk partikel bermassa di ekuator pada lubang hitam Kerr?
2. Bagaimana analisis grafis dapat memvisualisasikan karakteristik lintasan geodesik partikel di sekitar lubang hitam Kerr?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menurunkan persamaan geodesik untuk partikel bermassa di ekuator pada lubang hitam Kerr.
2. Melakukan analisis grafis untuk memvisualisasikan karakteristik lintasan geodesik partikel di sekitar lubang hitam Kerr.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dinamika partikel di sekitar lubang hitam berotasi Kerr.
2. Memperkuat pemahaman tentang sifat gravitasi dan struktur ruang-waktu di sekitar lubang hitam Kerr.

BAB II

METRIK KERR DAN STRUKTUR LUBANG HITAM KERR

2.1 Metrik Kerr

Sebelum membahas metrik Kerr, penting untuk memahami dua konsep fundamental yaitu simetri aksial dan ruang-waktu stasioner. Simetri aksial mengacu pada sifat ruang-waktu yang tidak berubah ketika diputar mengelilingi sumbu tertentu. Dalam konteks lubang hitam berotasi, simetri aksial berarti ruang-waktu hanya bergantung pada radius r dan θ tetapi tidak pada ϕ .

Ruang-waktu stasioner adalah ruang-waktu di mana metrik tidak bergantung pada waktu koordinat t . Metrik tetap tidak berubah seiring berjalannya waktu. Berdasarkan simetri aksial dan stasioner, bentuk elemen garis untuk ruang-waktu stasioner aksial simetri dapat dinyatakan dalam persamaan ini (M. P. Hobson et al., 2006):

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (1)$$

Atau

$$ds^2 = Adt^2 - B(d\phi - \omega dt)^2 - Cdr^2 - Dd\theta^2 \quad (2)$$

Setelah memahami bentuk metrik untuk sistem stasioner aksial simetri, diperkenalkan metrik Kerr yang menggambarkan ruang-waktu disekitar lubang hitam yang berotasi. Metrik Kerr dapat dinyatakan dalam koordinat Boyer-Lindquist sebagai berikut:

$$ds^2 = \frac{-\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2 \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dtd\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2) - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3)$$

Dimana M adalah massa dari lubang hitam dan a adalah momentum sudut per unit massa. Dalam hal ini $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ dan $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ (Seetharaman et al., 2022).

2.2 Struktur Lubang Hitam Kerr

Struktur lubang hitam Kerr lebih kompleks dibandingkan dengan lubang hitam Schwarzschild karena adanya rotasi. Lubang hitam Kerr memiliki dua horizon peristiwa (*event horizon*), *ergosphere* dan singularitas (*singularity*) berbentuk cincin di pusatnya. Singularitas pada metrik kerr terjadi ketika $\rho = 0$ (singularitas intrinsik) dan $\Delta = 0$ (singularitas koordinat).

Dalam koordinat Boyer-Lindquist, metrik Kerr menunjukkan singularitas intrinsik ketika $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$. Agar $\rho = 0$, kedua syarat berikut harus terpenuhi secara bersamaan: $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, menggunakan $r = 0$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka

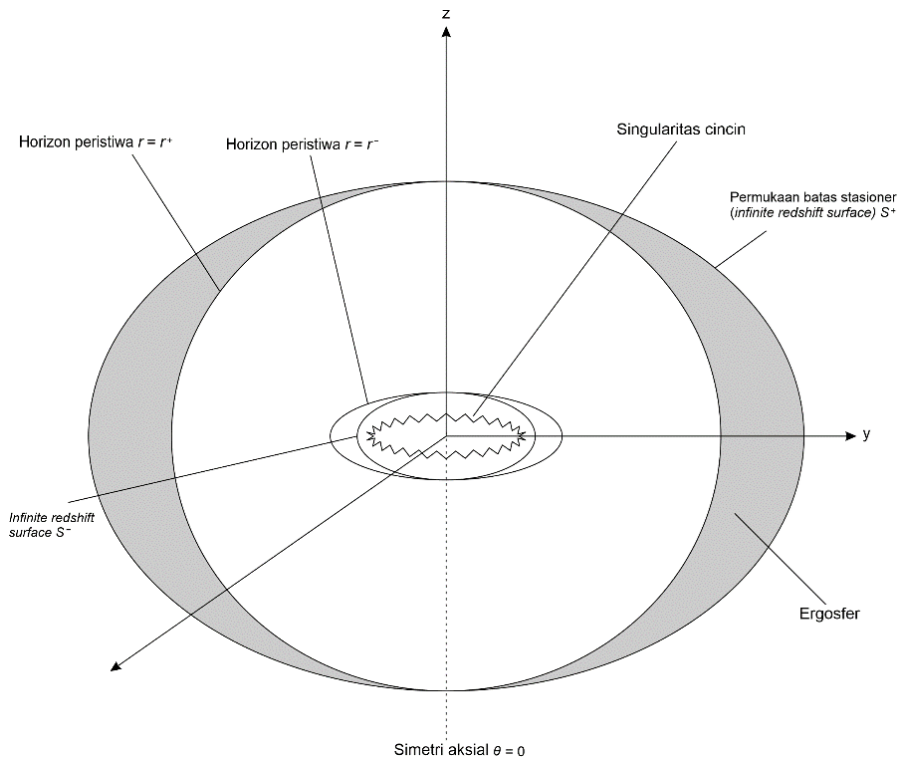
didapatkan singularitas berbentuk cincin dengan jari-jari koordinat a di bidang ekuator.

Singularitas koordinat terjadi ketika $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0$. Persamaan ini memberikan dua solusi untuk r :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4)$$

Ini menunjukkan adanya ada dua horizon peristiwa yaitu horizon peristiwa luar (r_+) dan horizon peristiwa dalam (r_-). Horizon peristiwa adalah batas di sekitar lubang hitam di mana gravitasi sangat kuat bahkan cahaya tidak dapat lolos dari tarikannya (M. P. Hobson et al., 2006).

Ergosphere adalah wilayah pada lubang hitam Kerr dimana ruang-waktu pada daerah tersebut terdistorsi oleh rotasi lubang hitam, sehingga memaksa partikel di dalamnya untuk bergerak seiring dengan rotasi lubang hitam. Batas *ergosphere* ditentukan oleh permukaan statis dan horizon peristiwa luar. Dalam area ini, objek yang masuk masih bisa meloloskan diri jika mendapatkan energi dari rotasi lubang hitam. Namun, jika objek tersebut masuk ke dalam horizon peristiwa, objek tersebut tidak lagi bisa melarikan diri. Fenomena yang terjadi di *ergosphere* ini dikenal sebagai *frame dragging* (Aqsa Brilianza et al., 2020; S. Chandra Sekhar, 1983).



Gambar 1. Struktur lubang hitam Kerr (M. P. Hobson et al., 2006)