

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, W. 2006. *Fundamentals of Chemistry, Mineralogy, Weathering Processes and Laterite Formation*. PT. Vale Inco: Sorowako.
- Ahmad, W. 2009. *Fundamentals of Chemistry, Mineralogy, Weathering Processes, Formation and Exploration*. PT. Vale Inco: Sorowako.
- Bernard, J. (2003). Short note on the depth of investigation of electrical methods. Source: Google Search, July.
- Bargallo, R. (2006). *Finite Element for Electrical Engineering*. Electrical Engineering Departemen, EUETIB-UPC.
- Boldt, J.R., 1967. *The Winning of Nickel: Its Geology, Mining and Extractive Metallurgy*, Van Nostrand Company, INC.
- Cai, J. T., Ruan, B. Y., Zhao, G. Z., & Zhu, G. P. (2007). Two-Dimensional Modeling of Complex Resistivity Using Finite Element Method. *Chinese Journal of Geophysics*, 50(6), 1615-1624.
- Dahlin, T. & Zhou, B., 2004. A Numerical Comparison of 2D Resistivity Imaging With 10 Electrode Array. European Association of Geoscientists & Engineers (EAGE).
- Dahlin, T., dan Zhou, B. 2006. Multiple-gradient array measurements for multichannel 2D resistivity imaging. Near Surface Geophysics. European Association of Geoscientists & Engineers (EAGE).
- Deere, D. U., & Deere, D. W. (1967). The Rock Quality Designation (ROD) Index.
- Fadlilah, M. R., Isnarno, N. F., & Guntoro, D. (2023, July). Pemodelan dan Estimasi Sumberdaya Nikel Laterit Berdasarkan Kandungan Ni dan Fe dengan Menggunakan Metode Kriging di PT Putra Perkasa Abadi, Kecamatan Langgikima, Kabupaten Konawe Utara, Provinsi Sulawesi Tenggara. In *Bandung Conference Series: Mining Engineering* (Vol. 3, No. 2, Pp. 489-499).
- Febryanty, B. Y. W., Yatini, Y., & Wicaksono, M. A. (2023). The Effect of Geochemical Elements on Resistivity Values in Nickel Laterite Profiles (Case Study: Area "YL", Pomalaa District, Kolakaa Regency, Southeast Sulawesi). *Journal of Geology Sriwijaya*, 2(2), 25-38.

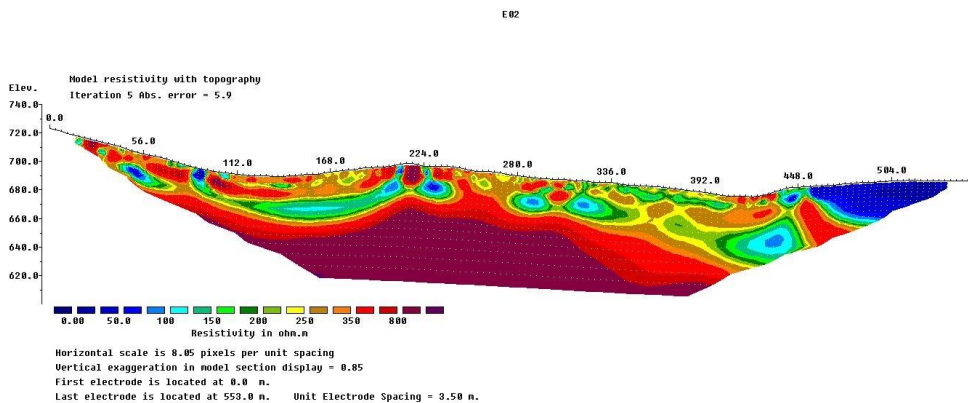
- Fitrian, E. B. (2021). Identifikasi Sebaran Nikel Laterit dan Volume Bijih Nikel Menggunakan Korelasi Data Bor. *Paulus Civil Engineering Journal*, 3(1), 113-119.
- Golightly, J.P., 1979. Geology Of Soroako Nickeliferous Laterite Deposite. Int. Laterite Simp. New Orleans.
- Grandis, Dr. H., 2009, Pengantar Pemodelan Inversi Geofisika, Himpunan Ahli Geofisika (HAGI), Bandung.
- Hasan, M., Shang, Y., Yi, X., Shao, P., & Meng, H. (2023). Determination of rock quality designation (RQD) using a novel geophysical approach: a case study. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 82(3), 86.
- Jarot, J. P. (2022). Fraksinasi Material Boulder Nikel Laterit PT Gag Nikel Daerah Pulau Gag Waigeo Barat Kepulauan, Raja Ampat, Papua Barat. *ReTII*, 446-458.
- Johansson, S., Friborg, J., Dahlin, T., & Sjö Dahl, P. (2005). Long term resistivity and self potential monitoring of embankment dams—Experiences from Hällby and Sädva dams, Sweden.
- Kurniadi, A., Rosana, M. F., & Yuningsih, E. T. (2017). Karakteristik batuan asal pembentukan endapan nikel laterit di daerah madang dan serakaman tengah. *Geoscience Journal*, 2(3), 221-234.
- Lintjewas, L., Setiawan, I., & Al Kausar, A. (2019). Profil endapan nikel laterit di daerah Palangga, provinsi Sulawesi Tenggara. *RISSET Geologi Dan Pertambangan*, 29(1), 91-104.
- Lowrie, William. 2007. *Fundamentals of Geophysics*. USA: Cambridge University Press, p293-320.
- Maulana, A., & Irvan, U. R. (2015). Analisis Pengaruh Tipe Boulder Terhadap Recovery Screening Station Product PT. Vale Indonesia Tbk Soroak. *Jurnal Penelitian Geosains*, 11(1).
- Mustafa, P. S. (2023). Tinjauan Literatur Analisis Uji R Berganda dan Uji Lanjut dalam Statistik Inferensial pada Penelitian Pendidikan Jasmani. *Jurnal Ilmiah Wahana Pendidikan*, 9(5), 571-593.
- Massinai, M.A., Lantu., Latuconsina, H., & Massinai, M.F.I. 2018, Distribution Analysis of Sulphide Mineral (Pyrite) Using Induced Polarization Method in

- Libureng, Bone, South Sulawesi. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Vol. 132, No. 1, p. 012017. IOP Publishing.
- Patiung, O. (2021). Pemetaan Klasifikasi Rock Quality Designation (RQD) Tambang Bawah Tanah "DMLZ" PT. Freeport Indonesia. *Jurnal Teknik AMATA*, 2(1), 14-16.
- Paembonan, A. Y., Nugraha, P., Santoso, N. A., Firdaus, R., Ekawati, G. M., Rahmanda, V., & Amijaya, F. D. P. (2021). Investigasi Air Tanah Berdasarkan Nilai Resistivitas di Dusun Jatisari, Kabupaten Lampung Selatan. *JGE (Jurnal Geofisika Eksplorasi)*, 7(2), 100-110.
- Razak, R., Yunus, R., Hasbi, M. R., & Rajab, M. (2022). Implementasi Tanggung Jawab Sosial Pt Vale Indonesia Dalam Meningkatkan Keberdayaan Dan Kesejahteraan Masyarakat Sekitar Perusahaan. *Jurnal Neo Societal; Vol*, 7(1).
- Rumahorbo, C. G. P., Ilyas, S., Hutahaean, S., Zuhra, C. F., & Situmorang, P. C. (2023). The improvement of the physiological effects of nanoherbal sikkam leaves (*Bischofia javanica*). *system*, 15, 16.
- Simamora, E. A. S., Rizka, R., Parnadi, W. W., & Salam, R. (2022). APLIKASI ELECTRICAL RESISTIVITY TOMOGRAPHY (ERT) UNTUK MENENTUKAN INTERFACE AIR TAWAR DAN AIR ASIN DI PESISIR PULAU TERNATE. *Jurnal Geosaintek*, 8(2), 206-215.
- Sukamto., 1975. Geologi Sulawesi. Departemen Pertambangan dan Energi. Direktorat Jenderal Geologi Dan Sumber Daya Mineral, Pusat Penelitian Dan Pengembangan.
- Syamsuddin, E., Syamsuddin, S., Wahyuni, A., Jumatriani, J., & Illa, I. (2019). Interpretasi Struktur Perlapisan Tanah Menggunakan Metode Geolistrik Resistivitas. *JURNAL GEOCELEBES*, 3(2), 111-115.
- Telford, W.M., Geldart, L.P., dan Sheriff, R.E. (1990) *Applied Geophysics*. Second Edi Cambridge University Press, Cambridge.

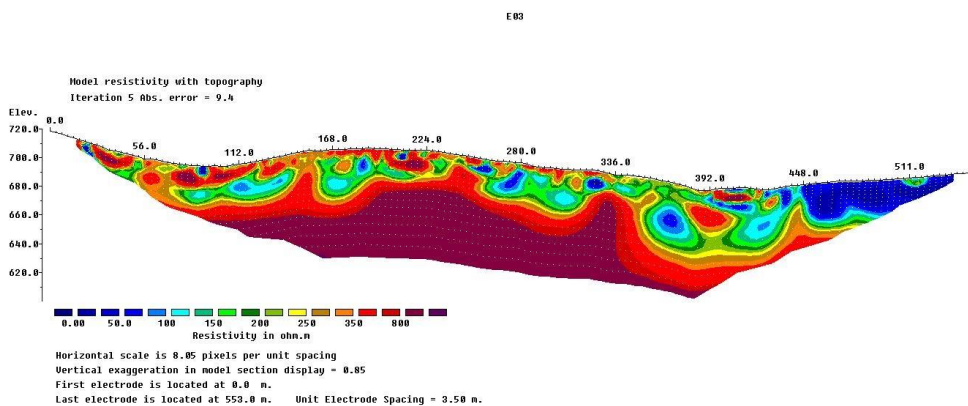
LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil Inversi

1. Lintasan E02

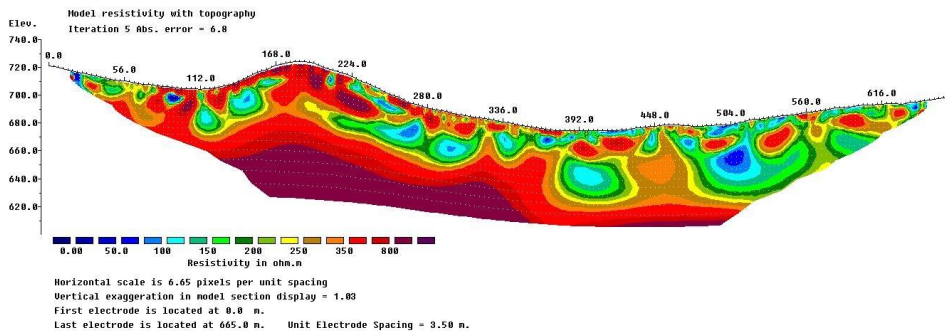


2. Lintasan E03



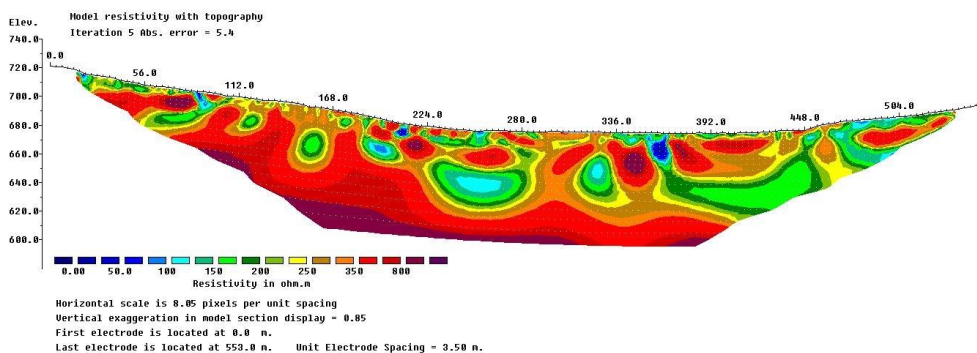
3. Lintasan E05

E05



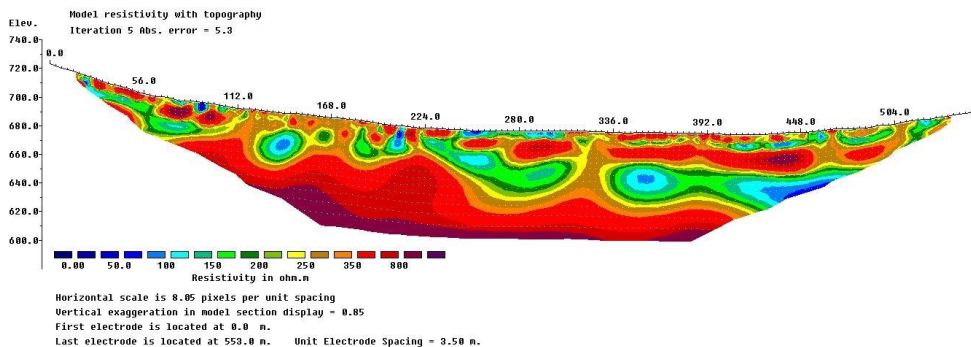
4. Lintasan E07

E07



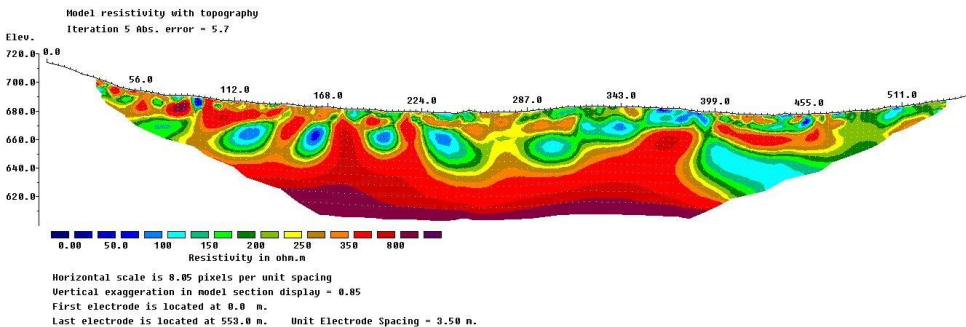
5. Lintasan E08

E08



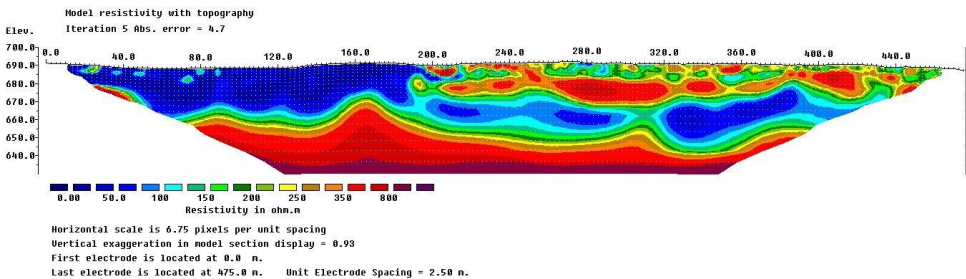
6. Lintasan E09

E09



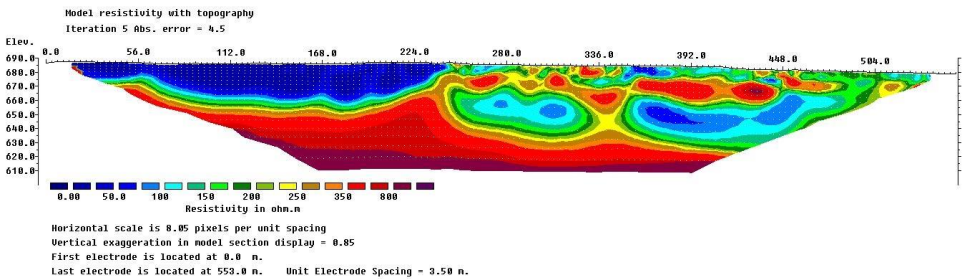
7. Lintasan N01

N01

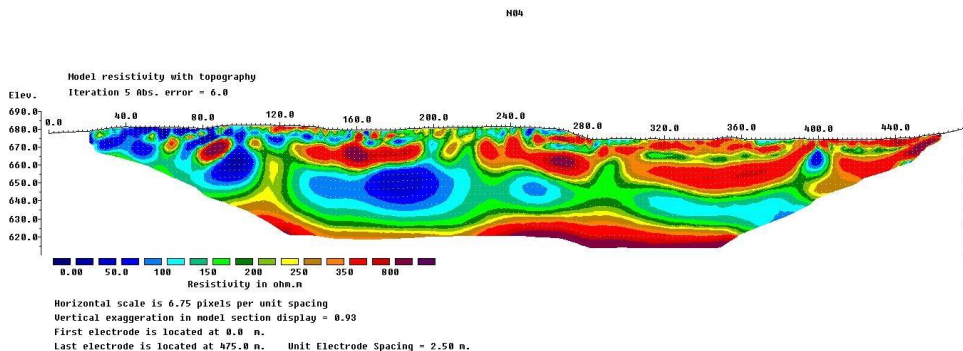


8. Lintasan N02

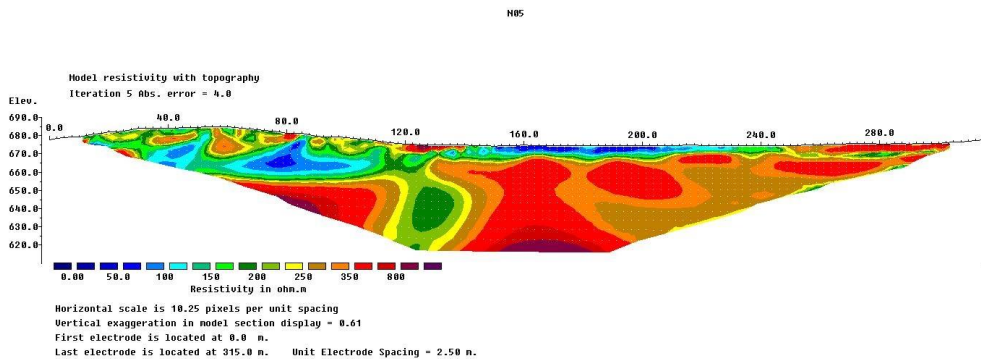
N02



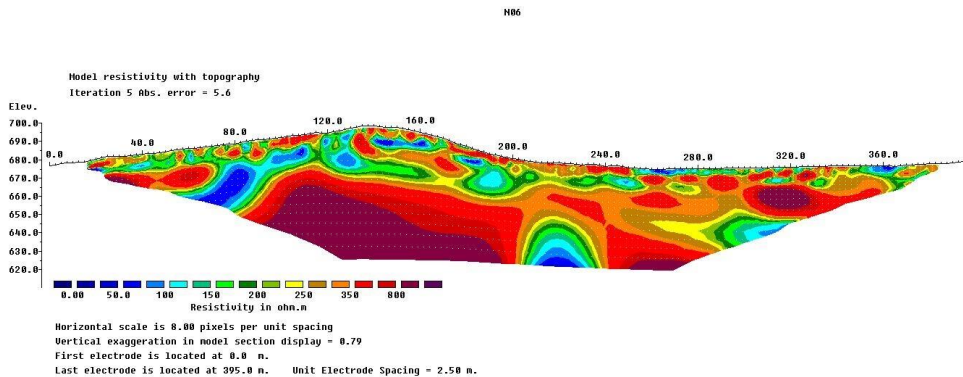
9. Lintasan N04



10. Lintasan N05

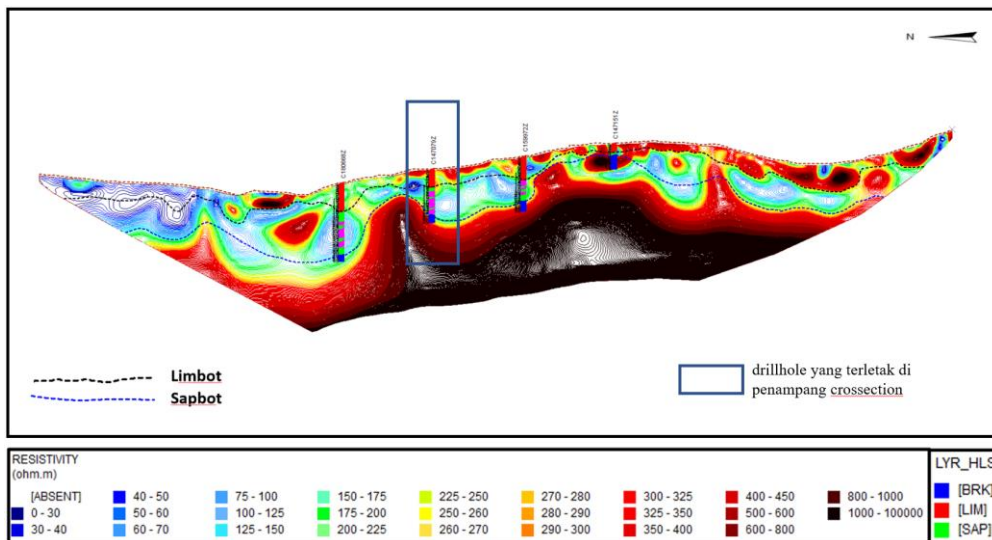


11. Lintasan N06

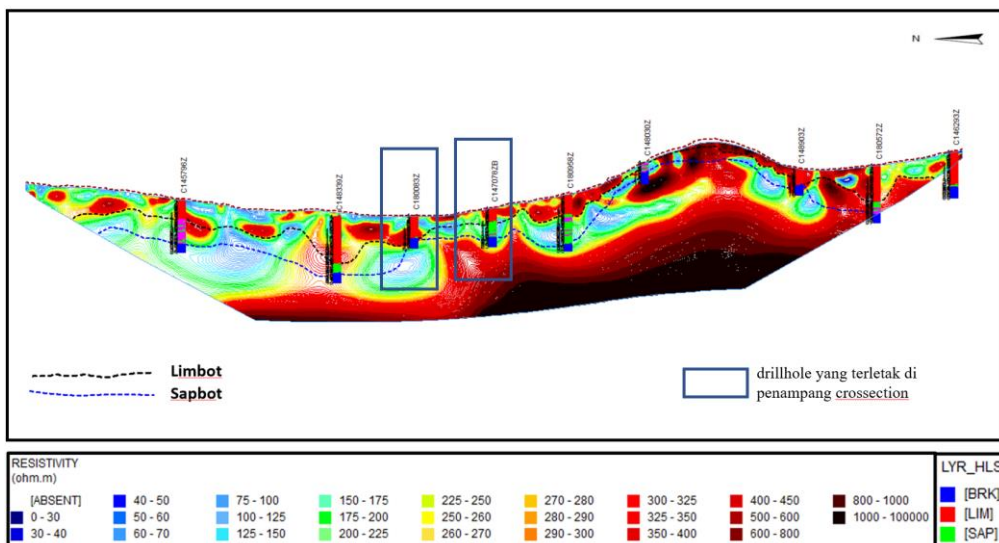


Lampiran 2. Drillhole pada penampang ERT yang tidak digunakan dalam perhitungan RQD dan Resistivitas

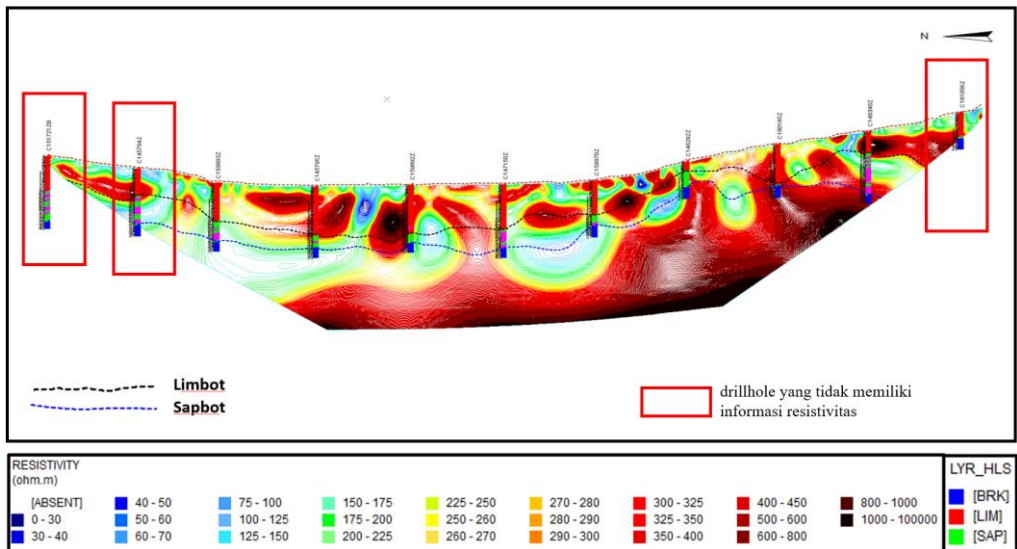
1. Lintasan E03



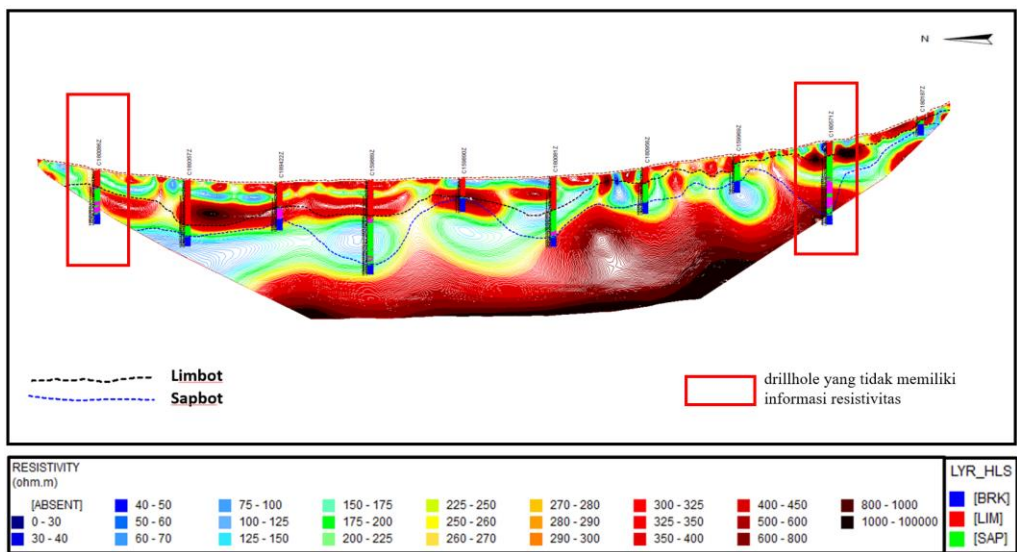
2. Lintasan E05



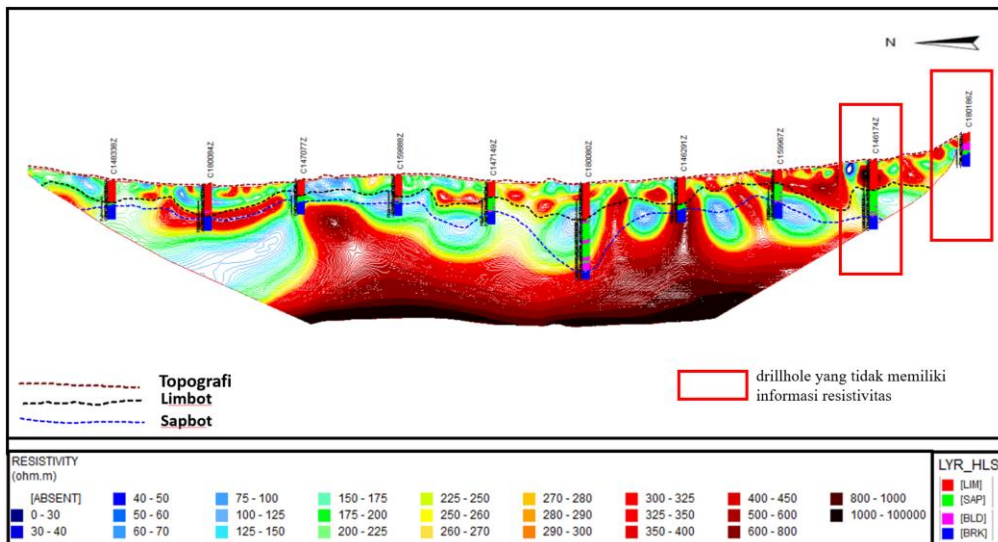
3. Lintasan E07



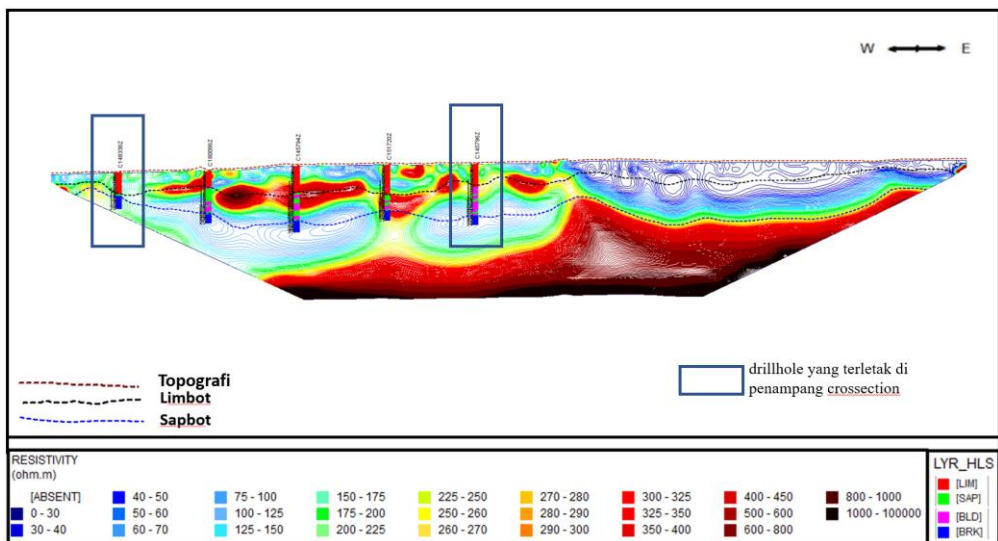
4. Lintasan E08



5. Lintasan E09



6. Lintasan N02



Lampiran 3. Fotocore

C180670Z



C159899Z



C180669Z



C180864Z



C180668Z



C159972Z



C147151Z



C145796Z



C148339Z



C180958Z



C148030Z



C148903Z



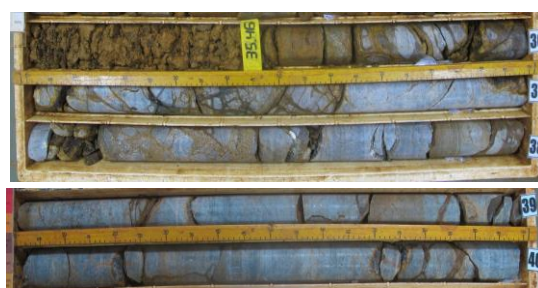
C159893Z



C145795Z



C147150Z



C159970Z



C146292Z



C148340Z



C159892Z



C180185Z



C159890Z



C189357Z



C189422Z



C159889Z



C159969Z



C180187Z



C180956Z



C180081Z



C148338Z



C180084Z



C147077Z



C146291Z



C159967Z



C180080Z



C147149Z



C159888Z



C151154Z



C151721ZB



C151719Z



C180086Z



C145794Z



C151720Z



C368090



C159971Z



C180083Z



C159891Z



C180082Z



C147078ZB



C368091



C147079Z



Lampiran 4. Hasil Perhitungan RQD dan Nilai Resistivitas

Line	Nama Core	Kedalaman (m)	RQD (%)	Resistivitas (Ω m)
e02	C159899Z	23	52.09	245
e02	C159899Z	24	75.00	237
e02	C159899Z	25	72.00	230
e02	C159899Z	26	54.00	222
e02	C180669Z	26	51.00	227
e02	C180669Z	27	96.00	237
e02	C180669Z	28	51.00	245
e02	C180669Z	29	50.00	257
e02	C180669Z	30	49.00	262
e02	C180669Z	31	86.00	275
e02	C180669Z	32	51.00	287
e02	C180669Z	33	70.00	300
e02	C180669Z	34	74.00	312
e02	C180670Z	24	18.95	235
e02	C180670Z	25	47.37	257
e02	C180670Z	26	72.00	302
e02	C180670Z	27	73.00	342
e02	C180864Z	15	62.00	312
e02	C180864Z	16	82.00	307
e02	C180864Z	17	24.00	305
e02	C180864Z	18	72.00	307
e02	C180864Z	19	28.89	317
e02	C180864Z	20	40.00	332
e02	C180864Z	21	71.00	350
e03	C147151Z	8	71.74	270
e03	C147151Z	9	76.00	517
e03	C147151Z	10	81.00	652
e03	C147151Z	11	56.84	657
e03	C147151Z	12	0.00	592
e03	C147151Z	13	78.22	485
e03	C147151Z	14	61.00	355
e03	C159972Z	25	58.18	232
e03	C159972Z	26	52.00	252

e03	C159972Z	27	24.00	305
e03	C159972Z	28	14.44	327
e03	C159972Z	29	79.00	372
e03	C159972Z	30	94.00	422
e03	C180668Z	40	27.27	145
e03	C180668Z	41	38.89	152
e03	C180668Z	42	25.00	165
e03	C180668Z	43	26.00	177
e05	C145796Z	31	50.00	155
e05	C145796Z	32	34.44	155
e05	C145796Z	33	49.78	150
e05	C145796Z	34	30.00	150
e05	C148030Z	8	24.44	152
e05	C148030Z	9	12.00	185
e05	C148030Z	10	65.00	230
e05	C148030Z	11	71.00	302
e05	C148030Z	12	21.67	442
e05	C148030Z	13	34.44	665
e05	C148030Z	14	46.00	880
e05	C148339Z	38	17.46	300
e05	C148339Z	39	40.00	300
e05	C148339Z	40	56.00	270
e05	C148339Z	41	67.00	270
e05	C148339Z	42	75.00	270
e05	C148339Z	43	88.00	300
e05	C148903Z	11	46.00	510
e05	C148903Z	12	76.00	455
e05	C148903Z	13	44.00	392
e05	C148903Z	14	75.00	335
e05	C148903Z	15	100.00	305
e05	C180958Z	33	48.00	157
e05	C180958Z	34	38.89	165
e05	C180958Z	35	15.56	180
e05	C180958Z	36	44.00	190
e07	C145795Z	35	14.00	195
e07	C145795Z	36	39.00	185

e07	C145795Z	37	50.00	177
e07	C145795Z	38	86.00	175
e07	C145795Z	39	78.00	170
e07	C146292Z	15	11.11	335
e07	C146292Z	16	31.76	335
e07	C146292Z	17	0.00	330
e07	C146292Z	18	76.00	327
e07	C146292Z	19	75.00	325
e07	C146292Z	20	72.00	320
e07	C147150Z	36	42.59	210
e07	C147150Z	37	72.00	215
e07	C147150Z	38	74.00	220
e07	C147150Z	39	75.00	220
e07	C147150Z	40	92.00	220
e07	C148340Z	36	49.00	497
e07	C148340Z	37	47.78	527
e07	C148340Z	38	36.00	557
e07	C148340Z	39	66.00	587
e07	C159892Z	33	20.00	232
e07	C159892Z	34	26.00	227
e07	C159892Z	35	73.00	222
e07	C159892Z	36	70.00	220
e07	C159892Z	37	63.00	215
e07	C159893Z	33	0.00	160
e07	C159893Z	34	0.00	160
e07	C159893Z	35	49.00	160
e07	C159893Z	36	0.00	160
e07	C159893Z	37	37.89	160
e07	C159970Z	26	45.00	170
e07	C159970Z	27	61.00	165
e07	C159970Z	28	40.00	160
e07	C159970Z	29	32.61	152
e07	C159970Z	30	50.00	150
e07	C159970Z	31	26.25	150
e07	C180185Z	29	91.00	647
e07	C180185Z	24	83.08	587

e07	C180185Z	25	45.00	607
e07	C180185Z	26	43.00	622
e07	C180185Z	27	55.56	632
e07	C180185Z	28	56.67	640
e08	C159889Z	47	42.00	187
e08	C159889Z	48	57.00	200
e08	C159889Z	49	22.00	207
e08	C159889Z	50	74.00	217
e08	C159889Z	51	67.00	230
e08	C159890Z	17	88.00	405
e08	C159890Z	12	83.58	690
e08	C159890Z	13	77.00	657
e08	C159890Z	14	85.71	597
e08	C159890Z	15	83.16	525
e08	C159890Z	16	76.09	462
e08	C159890Z	18	76.00	355
e08	C159969Z	15	38.89	137
e08	C159969Z	16	82.00	125
e08	C159969Z	17	37.36	112
e08	C159969Z	18	40.91	105
e08	C159969Z	19	26.67	97
e08	C159969Z	20	24.44	95
e08	C180081Z	34	83.15	307
e08	C180081Z	35	36.00	320
e08	C180081Z	36	33.00	332
e08	C180081Z	37	78.00	342
e08	C180081Z	38	87.00	352
e08	C180187Z	6	72.34	255
e08	C180187Z	7	28.00	197
e08	C180187Z	8	84.00	152
e08	C180187Z	9	84.00	135
e08	C180187Z	10	81.00	135
e08	C180956Z	21	65.00	200
e08	C180956Z	22	60.00	205
e08	C180956Z	23	47.00	182
e08	C180956Z	24	91.00	187

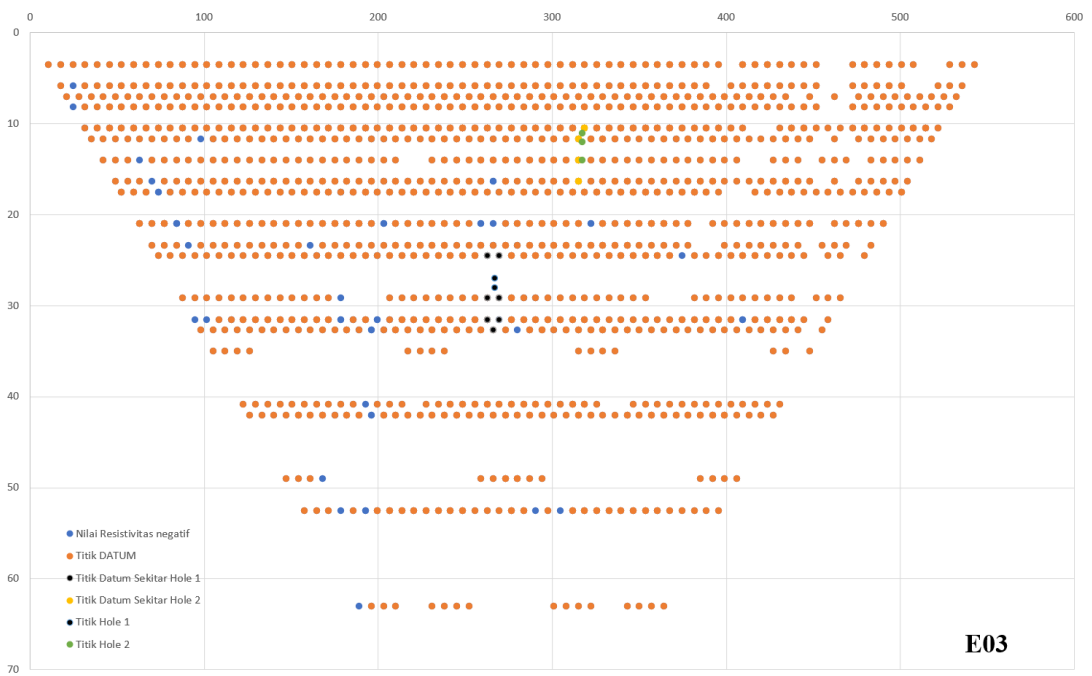
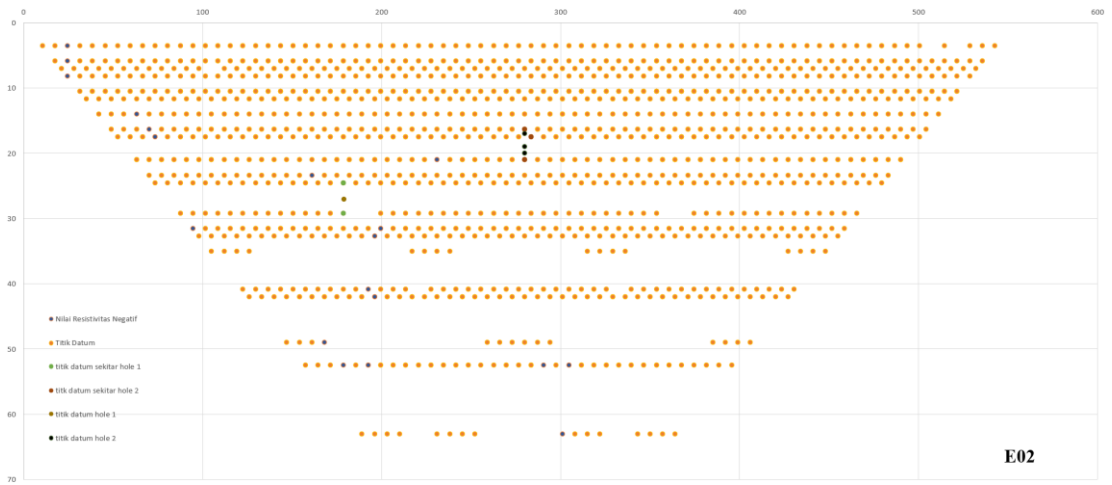
e08	C180956Z	25	100.00	200
e08	C189357Z	32	31.00	152
e08	C189357Z	33	43.33	140
e08	C189357Z	34	77.17	125
e08	C189357Z	35	14.67	110
e08	C189357Z	36	79.00	97
e08	C189422Z	22	75.29	325
e08	C189422Z	23	83.70	305
e08	C189422Z	24	75.00	267
e08	C189422Z	25	42.05	245
e08	C189422Z	26	70.00	222
e09	C146174Z	32	22.22	217
e09	C146174Z	33	73.17	222
e09	C146291Z	18	68.00	627
e09	C146291Z	19	31.00	645
e09	C146291Z	20	65.00	655
e09	C146291Z	21	61.05	667
e09	C146291Z	22	82.00	680
e09	C146291Z	23	75.53	682
e09	C147077Z	13	49.00	217
e09	C147077Z	14	75.00	235
e09	C147077Z	15	71.00	252
e09	C147077Z	16	58.95	267
e09	C147077Z	17	70.00	280
e09	C147077Z	18	70.00	287
e09	C147149Z	17	75.00	230
e09	C147149Z	18	63.33	227
e09	C147149Z	19	34.00	220
e09	C147149Z	20	74.04	215
e09	C147149Z	21	50.00	210
e09	C147149Z	22	72.65	210
e09	C148338Z	15	90.00	210
e09	C148338Z	16	15.00	210
e09	C148338Z	17	60.00	210
e09	C148338Z	18	74.78	210
e09	C148338Z	19	64.00	205

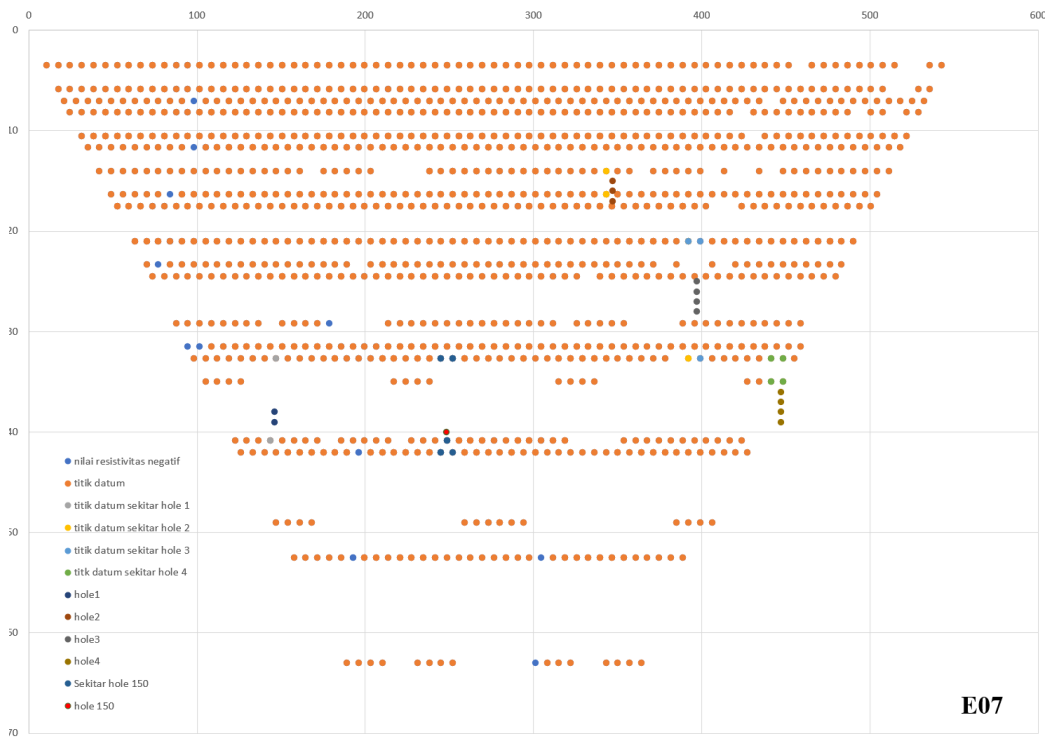
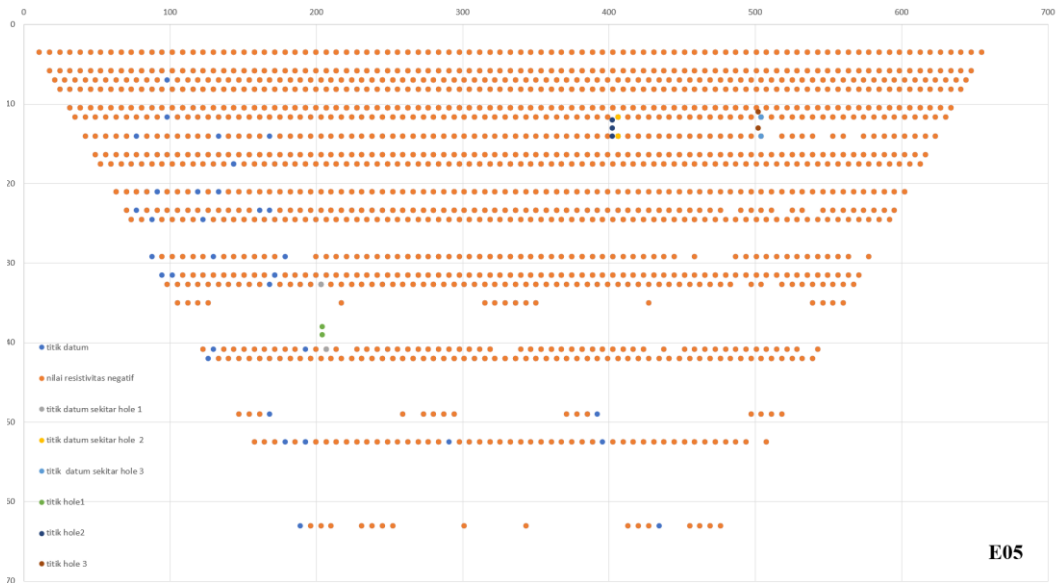
e09	C148338Z	20	90.00	205
e09	C159888Z	16	82.00	120
e09	C159888Z	17	85.00	120
e09	C159888Z	18	24.47	120
e09	C159888Z	19	49.67	125
e09	C159888Z	20	45.51	132
e09	C159888Z	21	47.00	142
e09	C159967Z	19	48.00	100
e09	C159967Z	20	50.00	100
e09	C159967Z	21	88.00	100
e09	C159967Z	22	25.56	105
e09	C159967Z	23	17.05	107
e09	C159967Z	24	49.00	115
e09	C159967Z	25	83.00	122
e09	C180080Z	48	0.00	365
e09	C180080Z	49	26.00	375
e09	C180080Z	50	37.78	390
e09	C180084Z	19	100.00	395
e09	C180084Z	20	87.00	387
e09	C180084Z	21	97.00	367
e09	C180084Z	22	83.00	345
e09	C180084Z	23	70.00	322
e09	C180084Z	24	57.78	297
n01	C151154Z	21	0.00	152
n01	C151154Z	22	81.11	135
n01	C151154Z	23	48.00	117
n01	C151154Z	24	46.11	105
n01	C151154Z	25	85.23	92
n01	C151154Z	26	96.81	85
n01	C151719Z	32	48.42	122
n01	C151719Z	33	90.53	130
n01	C151719Z	34	46.67	137
n01	C151719Z	35	26.67	147
n01	C151719Z	36	80.00	155
n01	C151721ZB	37	10.00	135
n01	C151721ZB	38	42.39	147

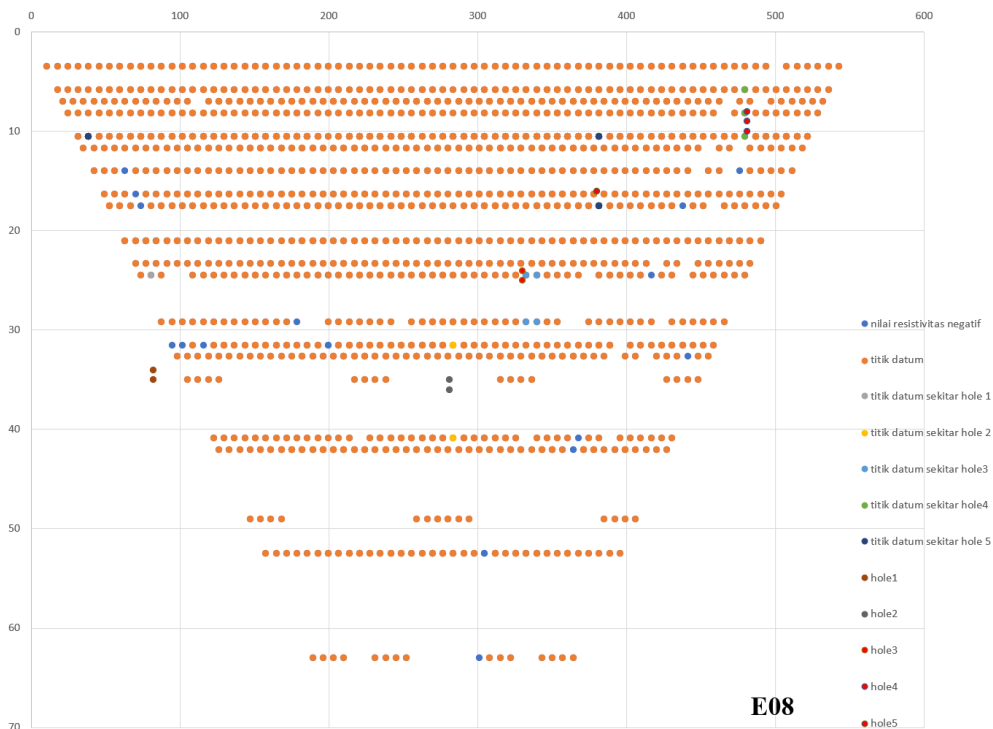
n01	C151721ZB	39	27.47	162
n01	C151721ZB	40	13.00	177
n02	C145794Z	32	20.00	110
n02	C145794Z	33	48.91	102
n02	C145794Z	34	72.22	92
n02	C145794Z	35	92.22	85
n02	C145794Z	36	24.44	80
n02	C145794Z	37	35.56	75
n02	C151720Z	27	29.00	332
n02	C151720Z	28	91.00	315
n02	C151720Z	29	39.00	297
n02	C151720Z	30	91.00	300
n02	C151720Z	31	76.00	300
n02	C180086Z	25	81.11	85
n02	C180086Z	26	48.44	85
n02	C180086Z	27	49.59	85
n02	C180086Z	28	45.59	80
n02	C180086Z	29	77.00	80
n04	C368090	35	48.00	107
n04	C368090	36	70.00	105
n04	C368090	37	41.00	105
n04	C368090	38	39.00	107
n04	C368090	39	49.00	110
n05	C159891Z	32	22.00	297
n05	C159891Z	33	38.00	300
n05	C159891Z	34	77.00	300
n05	C159891Z	35	70.00	295
n05	C159891Z	36	44.00	295
n05	C159971Z	20	0.00	110
n05	C159971Z	21	41.57	120
n05	C159971Z	22	48.44	137
n05	C159971Z	23	13.33	157
n05	C159971Z	24	40.00	182
n05	C180083Z	17	51.00	330
n05	C180083Z	18	23.75	315
n05	C180083Z	19	75.56	305

n05	C180083Z	20	70.00	290
n05	C180083Z	21	64.00	280
n06	C147078ZB	21	78.89	350
n06	C147078ZB	22	22.58	290
n06	C147078ZB	23	23.00	302
n06	C147078ZB	24	88.00	312
n06	C147078ZB	25	72.00	322
n06	C147079Z	27	47.78	290
n06	C147079Z	28	29.00	310
n06	C147079Z	29	43.00	332
n06	C180082Z	32	60.00	272
n06	C180082Z	33	53.00	282
n06	C180082Z	34	58.93	290
n06	C180082Z	35	75.00	305
n06	C180082Z	36	25.00	317
n06	C180082Z	37	30.59	332
n06	C180082Z	38	71.11	347
n06	C180082Z	39	34.43	367
n06	C180082Z	40	40.00	385
n06	C368091	4	74.00	230
n06	C368091	5	94.00	305
n06	C368091	6	74.00	295
n06	C368091	7	51.00	250
n06	C368091	8	54.00	210

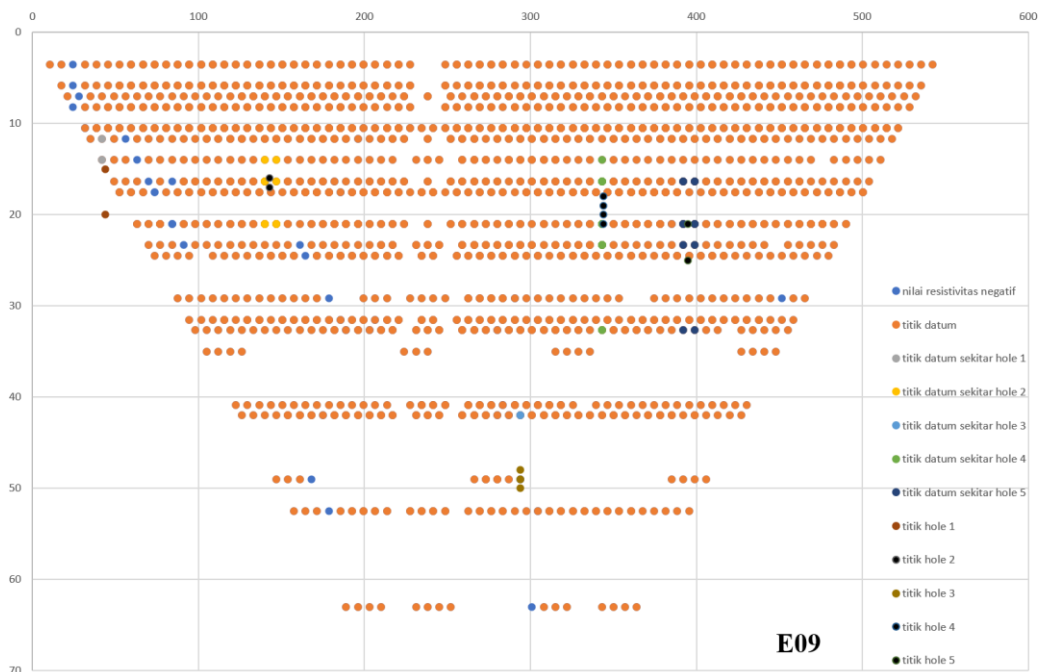
Lampiran 5. Stacking Chart Pada Lintasan ERT



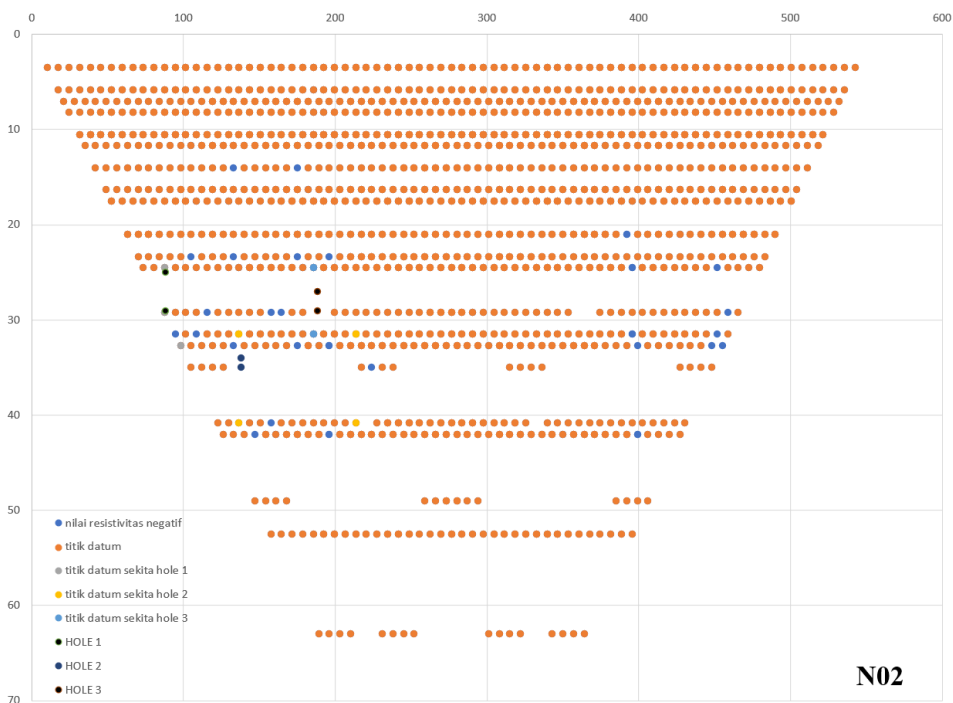
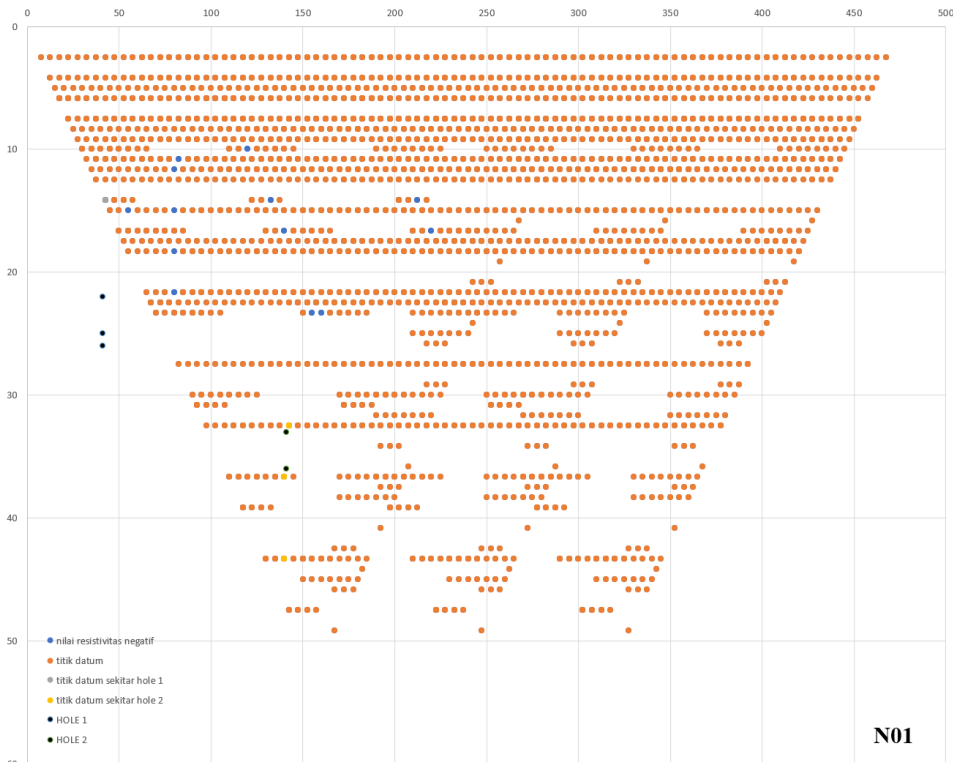


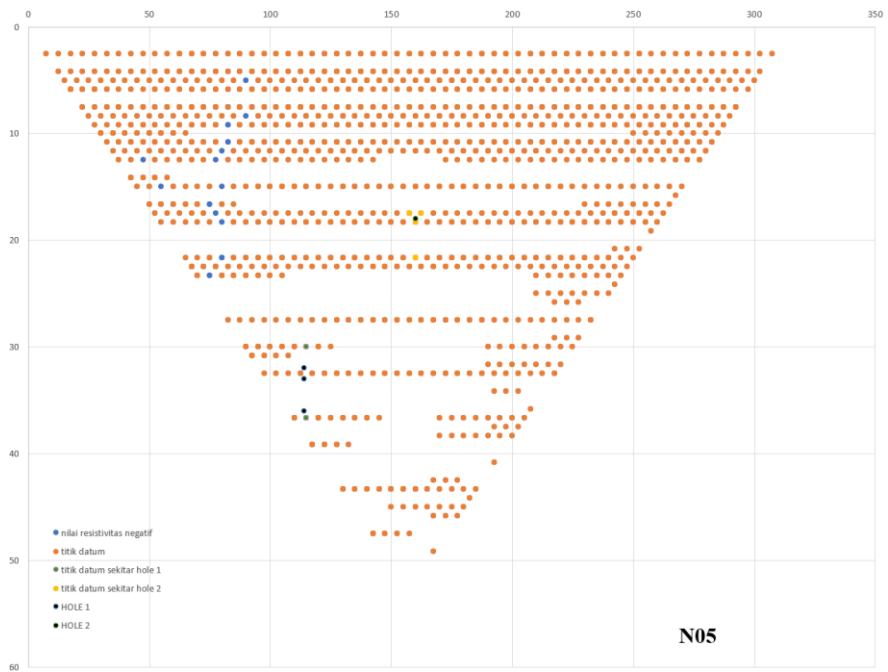
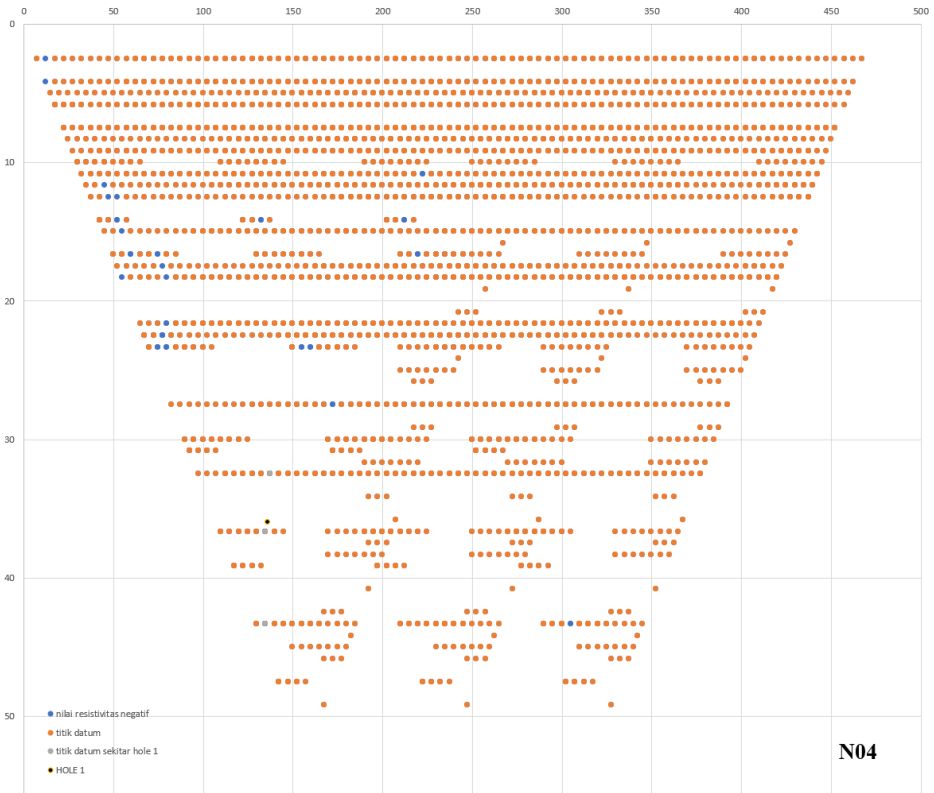


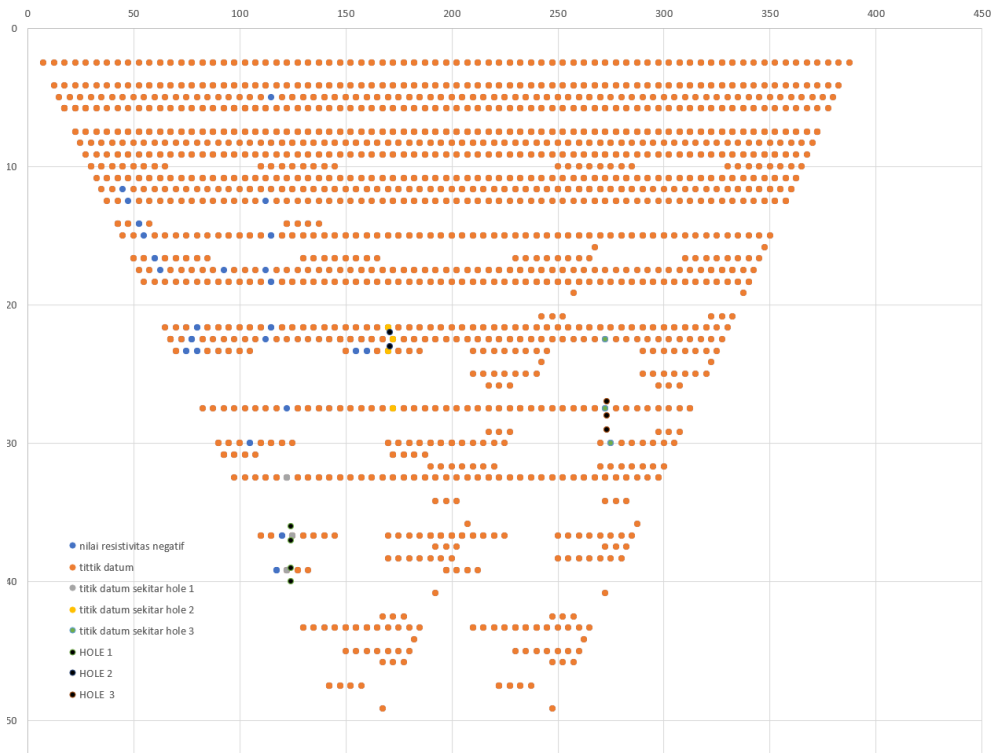
E08



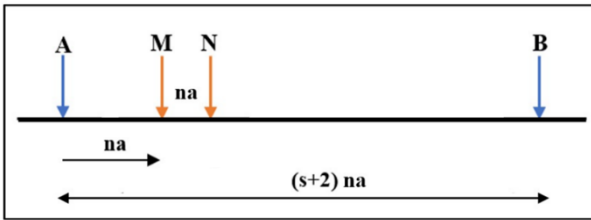
E09







Lampiran 6. Faktor Geometri Konfigurasi Gradient



$$\begin{aligned} r_1 &= AM = na \\ r_2 &= MB = (s+1)na \\ r_3 &= AN = 2na \\ r_4 &= NB = sna \end{aligned}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{1}{na} - \frac{1}{(s+1)na} \right) - \left(\frac{1}{2na} - \frac{1}{sna} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{s}{(s+1)na} \right) - \left(\frac{s-2}{2sna} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\left(\frac{2s^2}{2(s+1)sna} \right) - \left(\frac{s^2 - 2 + s - 2}{2(s+1)sna} \right) \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\frac{2s^2 - (s^2 + s - 2)}{2(s+1)sna} \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \left[\frac{s^2 + s - 2}{2(s+1)sna} \right]^{-1}$$

$$K = 2\pi \frac{2(s+1)sna}{s^2 + s - 2}$$

$$K = \frac{4\pi(s+1)sna}{s^2 + s - 2}$$

Lampiran 7. Rumus Geolistrik

Potensial akibat arus tunggal di dalam bumi

Persamaan Laplace dalam koordinat bola:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) = 0$$

Ditinjau Laplacian dari koordinat bola (Bumi), dimana bumi dalam keadaan statis, sehingga hanya ditinjau fungsi jari-jari, maka sudut θ dan ϕ diabaikan, sehingga rumus diatas menjadi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

Karena $\nabla^2 V = 0$, maka

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

r^2 pindah ke ruas kanan, sehingga:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \cdot r^{-2}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Kemudian di integralkan

$$\int \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \int 0$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = A$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$dV = \frac{A}{r^2} dr$$

Kemudian integralkan lagi, sehingga

$$\int dV = \int \frac{A}{r^2} dr$$

$$V = -\frac{A}{r} + C$$

Jika $r = \infty$, maka $V = 0$:

$$0 = -\frac{A}{\infty} + C$$

$$0 = 0 + C$$

$C = 0$ → ketika syarat batas $V = 0$ dan $r = \infty$, sehingga didapatkan

$$V = -\frac{A}{r}$$

Rumus diatas akan ditinjau pada rapat arus (J), diketahui $J = \frac{I}{A}$ dan luas permukaan (A) adalah $4\pi r^2$. Sehingga:

$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$I = 4\pi r^2 J$$

Diketahui:

$$J = -\sigma \nabla V$$

Maka:

$$I = 4\pi r^2 (-\sigma \nabla V)$$

$$I = -4\pi r^2 \sigma \nabla V$$

Karena V dalam fungsi r sehingga $\nabla V = \frac{dV}{dr} \rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$

$$I = -4\pi r^2 \sigma \frac{A}{r^2}$$

$$I = -4\pi \sigma A$$

$$A = -\frac{I}{4\pi \sigma}$$

$$A = -\frac{I}{4\pi \left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

$$A = -\frac{I\rho}{4\pi}$$

$$V = -\frac{1}{r} \left(-\frac{I\rho}{4\pi} \right)$$

$$V = \left(\frac{I\rho}{4\pi} \right) \frac{1}{r}$$

$$\rho = \frac{4\pi r V}{I}$$

Potensial akibat arus tunggal di permukaan bumi

Udara di atas permukaan dianggap ($\sigma = 0$) maka garis equipotensial membentuk setengah bola ($A = 2\pi r^2$).

$$J = \frac{I}{A}$$

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$I = 2\pi r^2 J$$

$$I = 2\pi r^2 (-\sigma \nabla V)$$

$$I = 2\pi r^2 \left(-\sigma \frac{dV}{dr} \right)$$

$$I = -2\pi r^2 \sigma \frac{A}{r^2}$$

$$I = -2\pi \sigma A$$

$$A = -\frac{I}{2\pi \sigma}$$

$$A = -\frac{I\rho}{2\pi}$$

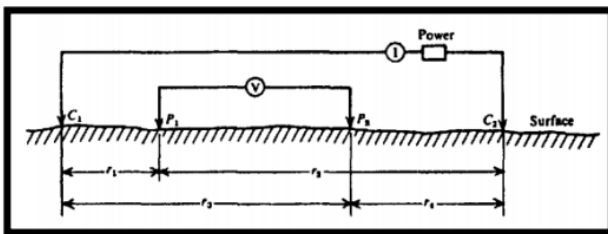
substitusi nilai $A = -\frac{I\rho}{2\pi}$ ke persamaan $V = -\frac{A}{r}$

$$V = -\frac{1}{r} \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right)$$

$$V = \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right) \frac{1}{r}$$

$$\rho = \frac{2\pi r V}{I}$$

Potensial Listrik Yang Dipengaruhi oleh dua elektroda arus listrik



dimana:

$$r_1 = C_1 P_1$$

$$r_2 = C_1 P_2$$

$$r_3 = C_2 P_1$$

$$r_4 = C_2 P_2$$

karena $V = -\frac{A}{r}$ dimana $A = -\frac{I\rho}{2\pi}$

$$V_1 = -\frac{A_1}{r_1}$$

$$V_1 = -\frac{1}{r_1} \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right)$$

$$V_1 = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} \right)$$

$$V_2 = -\frac{A_2}{r_2}$$

$$V_2 = -\frac{1}{r_2} \left(\frac{I\rho}{2\pi} \right)$$

$$V_2 = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_2} \right)$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} \right) + \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{r_2} \right)$$

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_t = V_1 + V_2$$

$$V_t = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} \right) + \left(-\frac{I\rho}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{r_4} \right)$$

$$V_t = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)$$

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)$$

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)$$

Lampiran 8 Pemodelan ke Depan (*Forward modeling*)

Pemodelan ke depan adalah proses untuk memprediksi distribusi potensial listrik pada setiap titik dipermukaan tanah, berdasarkan persamaan yang menggambarkan aliran arus listrik melalui tanah dengan distribusi resistivitas yang tidak homogen. Proses ini penting dalam inversi karena diperlukan untuk menghitung nilai resistivitas semu teoritis/kalkulasi. Nilai ini kemudian dibandingkan dengan nilai terukur dari data lapangan untuk mengevaluasi kesesuaian model terhadap kondisi sebenarnya di bawah permukaan. Metode yang sering digunakan dalam pemodelan kedepan adalah metode *Finite Difference* (FD) dan metode *Finite Element* (FE). *Finite Element* membagi domain menjadi elemen-elemen kecil yang lebih fleksibel dalam bentuk seperti *rectangular* atau *triangular*. Setiap elemen memiliki titik-titik simpul (Nodes), dimana potensial dihitung dan kemudian di interpolasi di seluruh elemen. Metode FE cocok untuk daerah dengan topografi yang kompleks atau batas yang tidak beraturan (Looke, 2004).

Untuk mendapatkan kesesuaian antara model teoritis (respon model) dan data lapangan, dilakukan proses coba-coba (*trial and error*) dengan cara mengubah nilai parameter modelnya. Istilah "*Forward Modeling*" tidak hanya mencakup perhitungan respon model tetapi juga merupakan proses coba-coba secara manual untuk mendapatkan model yang memberikan respon yang cocok dengan data lapangan. Penggunaan *Forward Modeling* dalam kasus ketika terdapat *noise* yang cukup besar lebih efektif digunakan (Grandis, 2009).

- **Dalam metode geolistrik, penerapan *finite element* dalam mencari potensial arus.**

Ketika ada sumber arus (I) yang mengalir keluar atau masuk, maka untuk menghitung distribusi potensial (V) dengan konduktivitas listrik (σ) tidak homogen, maka digunakan persamaan Poisson.

$$\nabla(\sigma \cdot \nabla V) = I$$

Pada kenyataannya arus dialirkan melalui probe yang terbatas (arus dialirkan melalui suatu alat atau antarmuka fisik dengan ukuran dan bentuk tertentu bukan melalui titik yang benar-benar kecil atau tidak berdimensi). Untuk tujuan pemodelan, arus dianggap berasal dari sumber titik. Oleh karena itu, sumber arus dapat di jelaskan oleh fungsi delta Diract (δ) dan arus titik (I) (Coggon, 1971). Jika A merupakan titik sumber arus, maka:

$$\nabla(\sigma \cdot \nabla V) = I\delta(A)$$

Dimana (σ) merupakan konduktivitas dan ∇V ialah perubahan potensial. Maka dengan menerapkan transformasi Fourier Cosinus akan didapatkan nilai potensialnya.

$$V_{(x,y,k)} = \int_0^\infty V_{x,y,z} \text{Cos}(Kz) dz$$

Dengan menggunakan fungsi Bessel dengan pendekatan batas tak hingga, maka variasi potensial listrik pada penampang geolistrik 2D diberikan oleh:

$$F(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 + \frac{1}{2} \sigma k^2 V^2 - I \delta(A) V \right] d\Omega$$

Daerah domain Ω didiskritisasi menjadi beberapa elemen berbentuk segiempat seperti pada gambar. Jumlah node total adalah n , maka integral domain Ω didekomposisi menjadi integral untuk setiap elemen e (Cai dkk., 2007).

$$F(v) = \sum_\Omega \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega + \sum_\Omega \int_e \frac{1}{2} \sigma k^2 V^2 d\Omega - \sum_\Omega \int_e I \delta(A) V d\Omega$$

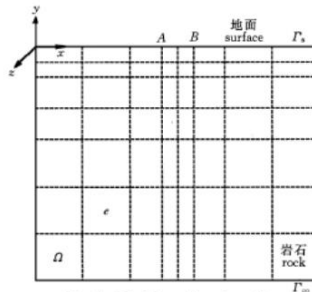


Fig. 1 Division of region Ω

Jika persamaan diatas diselesaikan pada setiap suku masing-masing maka;

1. Suku pertama

$$\sum_\Omega \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega = \sum_\Omega \int_e \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

• Apabila potensial (V) terhadap x diturunkan secara parsial maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} V_i \quad ; n = \text{node} \\ &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right)^T V_e \end{aligned}$$

Dengan $V_e = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T$ dan $\frac{\partial N_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right)^T$, maka

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 = V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T V_e$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right)^T (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

• Apabila potensial (V) terhadap y diturunkan secara parsial maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} V_i \quad ; n = \text{node} \\ &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \right)^T V_e\end{aligned}$$

Dengan $V_e = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T$ dan $\frac{\partial N_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial y} \right)^T$, maka

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 = V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T V_e$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 = (V_1, V_2, V_3, V_4)^T \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial y} \right)^T (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan awal pada suku pertama maka;

$$\begin{aligned}\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega \\ = \int_e \frac{1}{2} \sigma \left[V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T V_e + V_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T V_e \right] dx dy\end{aligned}$$

Jika $\sigma \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T$ merupakan matriks maka $[K_{1e}]$

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T [K_{1e}] V_e$$

Dimana

$$\begin{aligned}K_{1e} &= \int_e \sum_{i=1}^4 \sigma \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \right] dx dy \\ &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta \right\} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^T \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta \\ K_{1e} &= \sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi d\eta\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan matriks $[B]$ atau *shape function* maka terlebih dahulu membuat fungsi uji linear menggunakan persamaan Polinomial Langrange lalu menurunkan fungsi uji tersebut terhadap arah ξ dan η .

Langkah-langkah dalam menyelesaikan pemodelan kedepan menggunakan *finite element* adalah melakukan diskritisasi atau *meshing*, dalam satu domain dibagi menjadi beberapa elemen. Kemudian mencari pola dan bentuk distribusi menggunakan *polynomial* atau perpindahan dan turunannya pada setiap mesh untuk melihat perpindahan dari arah x dan y. Desain mesh yang digunakan untuk

komputasi sangatlah penting. Jumlah node menentukan tingkat resolusi spasial, karena itu pemilihan node memiliki dampak yang signifikan terhadap akurasi.

Arah koordinat horizontal diwakili oleh $\xi(xi)$ dan arah koordinat vertikal diwakili oleh $\eta(eta)$. Setiap node memiliki 2 DOF (*Degree of freedom/derajat kebebasan*) yaitu node dapat mengalami perpindahan kearah x atau vertikal yang dinyatakan dalam (u) dan perpindahan kearah y atau horizontal dinyatakan dalam (v) seperti pada gambar. Dalam pendekatan linear 2D untuk perpindahan node (u dan v) dan shape function (N) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

a. Shape Function (Fungsi Bentuk)

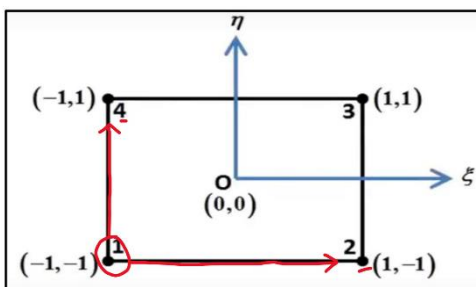
Setiap node memiliki fungsi bentuk yang berbeda-beda, sehingga pada elemen dengan 4 node akan diperoleh 4 shape function juga. Untuk menghitung shape function setiap node dapat digunakan polynomial Langrange 2D (Xiong, 2022):

$$N_k = \frac{\xi - \xi_m}{\xi_k - \xi_m} x \frac{\eta - \eta_m}{\eta_k - \eta_m}$$

Dengan k adalah titik node, dan m adalah titik node yang terhubung dengan node yang dicari.

- **Shape function Node 1**

Pada node 1 memiliki DOF kearah x menuju node 2 dan kearah y menuju node 4



$$N_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} x \frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4}$$

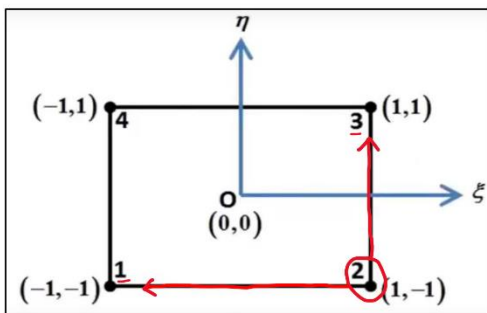
$$N_1 = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} x \frac{\eta - 1}{-1 - 1}$$

$$N_1 = \frac{-(1 - \xi)}{-2} x \frac{-(1 - \eta)}{-2}$$

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$$

• **Shape function Node 2**

Pada node 2 memiliki DOF kearah x menuju node 1 dan kearah y menuju node 3



$$N_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} x \frac{\eta - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3}$$

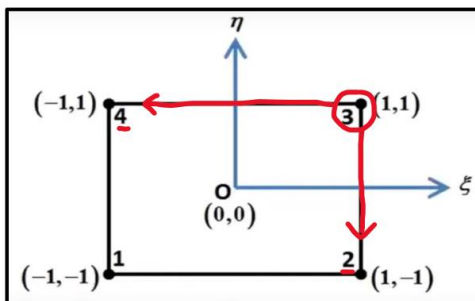
$$N_2 = \frac{\xi - (-1)}{-1 - (-1)} x \frac{\eta - 1}{-1 - 1}$$

$$N_2 = \frac{(1 + \xi)}{2} x \frac{-(1 - \eta)}{-2}$$

$$N_2 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

• **Shape function Node 3**

Pada node 3 memiliki DOF kearah x menuju node 4 dan kearah y menuju node 2



$$N_3 = \frac{(\xi - \xi_4)(\eta - \eta_2)}{(\xi_3 - \xi_4)(\eta_3 - \eta_2)}$$

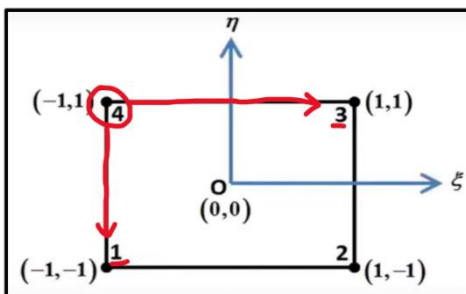
$$N_3 = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} x \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$N_3 = \frac{(1 + \xi)}{2} x \frac{(1 + \eta)}{2}$$

$$N_3 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

• **Shape function Node 4**

Pada node 4 memiliki DOF kearah x menuju node 3 dan kearah y menuju node 1



$$N_4 = \frac{(\xi - \xi_3)(\eta - \eta_1)}{(\xi_4 - \xi_3)(\eta_4 - \eta_1)}$$

$$N_4 = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} x \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$N_4 = \frac{(1 + \xi)}{2} x \frac{(1 + \eta)}{2}$$

$$N_4 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks maka *shape function* pada setiap nodenya yaitu

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Dari shape function dapat dihitung matriks $[B]$ dengan mensubstitusi shape function setiap node.

1. Dalam arah horizontal (ξ)

- Untuk N_1

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1-\eta-\xi+\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0-0-1+\eta) \\ &= \frac{1}{4}(-1+\eta)\end{aligned}$$

- Untuk N_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1-\eta+\xi-\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0-0+1-\eta) \\ &= \frac{1}{4}(1-\eta)\end{aligned}$$

- Untuk N_3

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1+\eta+\xi+\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0+0+1+\eta) \\ &= \frac{1}{4}(1+\eta)\end{aligned}$$

- Untuk N_4

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= \frac{\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1+\eta-\xi-\xi\eta)}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{4}(0+0-1-\eta)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(-1 - \eta)$$

2. Dalam arah vertikal (η)

- Untuk N_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \eta - \xi + \xi\eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{4}(0 - 1 - 0 + \xi) \\ &= \frac{1}{4}(-1 + \xi) \end{aligned}$$

- Untuk N_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \eta + \xi - \xi\eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{4}(0 - 1 + 0 - \xi) \\ &= \frac{1}{4}(-1 - \xi) \end{aligned}$$

- Untuk N_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta + \xi + \xi\eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{4}(0 + 1 + 0 + \xi) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \end{aligned}$$

- Untuk N_4

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \eta - \xi - \xi\eta)}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{4}(0 + 1 - 0 - \xi) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \xi)$$

Substitusi ke dalam matriks $[B]$, sehingga diperoleh matriks $[B]$ sebagai berikut:

$$[B] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (1 + \eta) & 0 & (-1 - \eta) & 0 \\ 0 & (-1 + \xi) & 0 & (-1 - \xi) & 0 & (1 + \xi) & 0 & (1 - \xi) \\ (-1 + \xi) & (-1 + \eta) & (-1 - \xi) & (1 - \eta) & (1 + \xi) & (1 + \eta) & (1 - \xi) & (-1 - \eta) \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks $[B]^T$ ditranspose kan, sehingga diperoleh:

$$[B]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (-1 + \xi) \\ 0 & (-1 + \xi) & (-1 + \eta) \\ (1 - \eta) & 0 & (-1 - \xi) \\ 0 & (-1 - \xi) & (1 - \eta) \\ (1 + \eta) & 0 & (1 + \xi) \\ 0 & (1 + \xi) & (1 + \eta) \\ (-1 - \eta) & 0 & (1 - \xi) \\ 0 & (1 - \xi) & (-1 - \eta) \end{bmatrix}$$

$$[C]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \xi) \\ (-1 + \eta) \\ (-1 - \xi) \\ (1 - \eta) \\ (1 + \xi) \\ (1 + \eta) \\ (1 - \xi) \\ (-1 - \eta) \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan, maka didapatkan matriks K_{1e} .

$$K_{1e} = \sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi d\eta$$

$$K_{1e} = \sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 \\ 0 & (-1 + \xi) \\ (1 - \eta) & 0 \\ 0 & (-1 - \xi) \\ (1 + \eta) & 0 \\ 0 & (1 + \xi) \\ (-1 - \eta) & 0 \\ 0 & (1 - \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (1 + \eta) & 0 & (-1 - \eta) & 0 \\ 0 & (-1 + \xi) & 0 & (-1 - \xi) & 0 & (1 + \xi) & 0 & (1 - \xi) \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

Nilai konduktivitas dalam persamaan di dapatkan dari nilai konduktivitas titik datum untuk mendapatkan nilai pada setiap node nya. Jika mensubstitusikan semua persamaan ke dalam persamaan di suku pertama, maka akan menjadi:

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla V)^2 d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} V_e^T \left(\int_{-x}^x \int_{-y}^y \sigma \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} \end{bmatrix} d\xi d\zeta \right) V_e$$

Perkalian matriks suku pertama ini akan menghasilkan matriks 8x8 yang mewakili luasan area elemen

	u ₁	v ₁	u ₂	v ₂	u ₃	v ₃	u ₄	v ₄	
[K _{1e}]	k ₁₁	k ₁₂	k ₁₃	k ₁₄	k ₁₅	k ₁₆	k ₁₇	k ₁₈	u ₁
	k ₂₁	k ₂₂	k ₂₃	k ₂₄	k ₂₅	k ₂₆	k ₂₇	k ₂₈	v ₁
	k ₃₁	k ₃₂	k ₃₃	k ₃₄	k ₃₅	k ₃₆	k ₃₇	k ₃₈	u ₂
	k ₄₁	k ₄₂	k ₄₃	k ₄₄	k ₄₅	k ₄₆	k ₄₇	k ₄₈	v ₂
	k ₅₁	k ₅₂	k ₅₃	k ₅₄	k ₅₅	k ₅₆	k ₅₇	k ₅₈	u ₃
	k ₆₁	k ₆₂	k ₆₃	k ₆₄	k ₆₅	k ₆₆	k ₆₇	k ₆₈	v ₃
	k ₇₁	k ₇₂	k ₇₃	k ₇₄	k ₇₅	k ₇₆	k ₇₇	k ₇₈	u ₄
	k ₈₁	k ₈₂	k ₈₃	k ₈₄	k ₈₅	k ₈₆	k ₈₇	k ₈₈	v ₄

2. Suku kedua

$$\sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma k^2 V^2 d\Omega = \frac{1}{2} V_e^T \left\{ \int_e \sum_{j=1}^4 N_j \sigma_j (k^2 N^T N) dx dy \right\} V_e = \frac{1}{2} V_e^T K_{e2} V_e$$

$$K_{e2} = \int_e \sum_{j=1}^4 N_j \sigma_j (k^2 N^T N) dx dy$$

$$K_{e2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [C]^T [C] d\xi d\eta$$

K_{e2}

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (-1 + \xi) \\ (-1 + \eta) \\ (-1 - \xi) \\ (1 - \eta) \\ (1 + \xi) \\ (1 + \eta) \\ (1 - \xi) \\ (-1 - \eta) \end{bmatrix} [(-1 + \xi) \quad (-1 + \eta) \quad (-1 - \xi) \quad (1 - \eta) \quad (1 + \xi) \quad (1 + \eta) \quad (1 - \xi) \quad (-1 - \eta)] d\xi d\eta$$

Perkalian matriks suku kedua akan menghasilkan matriks 8x8 yang mewakili luasan area elemen

$$[K_{2e}] = \begin{array}{cccccccc|c} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & \\ \hline k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & u_1 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & v_1 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & u_2 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & v_2 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & u_3 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & v_3 \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & u_4 \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & v_4 \end{array}$$

3. Suku ketiga

$$\sum_{\Omega} \int_e I \delta(A) V d\Omega = \frac{1}{2} I V_A = V^T P$$

Pada persamaan ini dapat menghitung kontribusi batas antar elemen lainnya ketika medan listriknya mengalami perubahan secara signifikan. Pada persamaan ini pula diterapkan kondisi batas (*boundry condition*).

Setelah didapatkan persamaan di setiap suku maka disubstitusikan ke dalam persamaan 4. dengan $F(V) = 0$, maka

$$\begin{aligned} F(V) &= \frac{1}{2} V_e^t K_{1e} V_e + \frac{1}{2} V_e^t K_{2e} V_e - V^T P \\ &= V^T K V - V^T P \\ &= KV - P \end{aligned}$$

Dengan K adalah matriks orde 8x8 yang merupakan penjumlahan dari $(K_{1e} + K_{2e})$, V adalah vektor kolom yang merupakan potensial listrik dari semua titik elemen dalam domain *wave number*. Dengan $F(V) = 0$, maka

$$\begin{aligned} KV &= P \\ V &= K^{-1} P \\ \{V\} &= [K_{1e} + K_{2e}]^{-1} \{P\} \\ \{V\} &= \left[\left(\sigma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi d\eta \right) + \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [C]^T [C] d\xi d\eta \right) \right]^{-1} \{P\} \end{aligned}$$

Persamaan linear ($KV = P$) diselesaikan untuk memperoleh potensial listrik (V) dari setiap elemen dalam domain

