PEMODELAN *ROBUST MIXED GEOGRAPHICALLY AND TEMPORALLY WEIGHTED REGRESSION* DENGAN M-*ESTIMATOR* PADA DATA INDEKS KETAHANAN PANGAN DI SULAWESI SELATAN

NUR AULIA
H051201006

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

PEMODELAN *ROBUST MIXED GEOGRAPHICALLY AND TEMPORALLY WEIGHTED REGRESSION* DENGAN M-*ESTIMATOR* PADA DATA INDEKS KETAHANAN PANGAN DI SULAWESI SELATAN

NUR AULIA
H051201006

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

PEMODELAN *ROBUST MIXED GEOGRAPHICALLY AND TEMPORALLY WEIGHTED REGRESSION* DENGAN M-*ESTIMATOR* PADA DATA INDEKS KETAHANAN PANGAN DI SULAWESI SELATAN

NUR AULIA
H051201006

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Statistika

Program Studi Statistika

pada

PROGRAM STUDI STATISTIKA
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

SKRIPSI

PEMODELAN *ROBUST MIXED GEOGRAPHICALLY AND TEMPORALLY WEIGHTED REGRESSION* DENGAN M-*ESTIMATOR* PADA DATA INDEKS KETAHANAN PANGAN DI SULAWESI SELATAN

yang disusun dan diajukan oleh

NUR AULIA
H051201006

Skripsi,

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Statistika pada 17 Juli 2024
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Statistika
Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing tugas akhir,

Siswanto, S.Si., M.Si
NIP. 19920107 201903 1 012

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MIPA

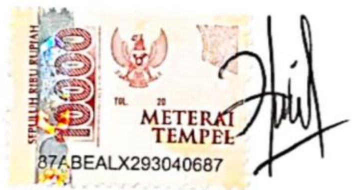
Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.
NIP. 19770808 200501 2 002

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Pemodelan *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* dengan M-*Estimator* pada Data Indeks Ketahanan Pangan di Sulawesi Selatan" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Siswanto, S.Si., M.Si. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 17 Juli 2024



NUR AULIA
NIM H051201006

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penelitian yang saya lakukan dapat terlaksana dengan baik. Saya mengucapkan terima kasih kepada Bapak Siswanto, S.Si., M.Si atas bimbingan, arahan dan dorongan semangat, sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Saya mengucapkan terima kasih juga kepada Bapak Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si. dan Ibu Dra. Nasrah Sirajang, M.Si. selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktu dalam memberikan motivasi serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan tugas akhir ini.

Kepada Pemerintah khususnya Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi (Kemendikbudristek), saya mengucapkan terima kasih atas beasiswa pendidikan yang diberikan selama menempuh program pendidikan sarjana. Ucapan terima kasih juga saya ucapkan kepada pimpinan Universitas Hasanuddin, pimpinan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin, pimpinan Departemen Statistika Universitas Hasanuddin dan para dosen pengajar yang telah memfasilitasi dan memberikan ilmu kepada saya dalam berbagai hal selama menempuh pendidikan sarjana di Departemen Statistika.

Ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada kedua orang tua tercinta yang telah memberikan dukungan penuh, pengorbanan luar biasa, limpahan cinta dan kasih sayang, kesabaran hati, serta dengan ikhlas telah menemani setiap langkah saya dengan doa dan restu mulianya. Penghargaan yang besar juga saya sampaikan kepada adik tercinta yang selalu menghibur dan memberi semangat kepada saya dalam menyelesaikan skripsi ini, serta kepada seluruh keluarga besar terima kasih atas motivasi dan dukungan yang tak ternilai.

Akhirnya, Saya juga mengucapkan terima kasih kepada sahabat-sahabat dari Ciwi-Ciwi Among (Aliah, Nahla, Rahmi, Nadia, Jihan, Lau, Afika, Krisna, Aisyah, Radia, Cynthia, Parida, Pebri, Ayu, Rifdah, Aish, Putri, dan Stansye), Among (Lili, Rais, Fadlan, Bahar, Alif, Fahmi, Yoel, Ryval, Dzaki dan Theo), rekan-rekan seperbimbingan, dan teman-teman Statistika 2020 yang senantiasa telah berproses bersama saya baik dalam suka maupun duka selama perkuliahan dan selama proses penyelesaian tugas akhir ini. Tidak lupa saya juga mengucapkan terima kasih kepada sahabat-sahabat di bangku SMA dan teman-teman Posko 1 KKNT Gel.110 Desa Bonra yang telah memberikan semangat, motivasi dan pengalaman yang sangat berharga.

Makassar, 17 Juli 2024

Nur Aulia

ABSTRAK

Nur Aulia. **Pemodelan *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* dengan M-*Estimator* pada Data Indeks Ketahanan Pangan di Sulawesi Selatan** (dibimbing oleh Siswanto, S.Si., M.Si).

Latar Belakang. *Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (MGTWR) merupakan kombinasi antara model regresi linier global dengan model GTWR yang memperhitungkan unsur lokasi dan waktu. Namun, metode MGTWR ini rentan terhadap pencilan, sehingga dapat mengakibatkan adanya bias dan ketidakakuratan dalam hubungan regresi. Oleh karena itu, pemodelan regresi *robust* dengan M-*Estimator* dikembangkan dan diterapkan pada data Indeks Ketahanan Pangan (IKP) di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022. **Tujuan**. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh model *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (RMGTWR) dengan M-*Estimator* serta faktor-faktor yang secara signifikan memengaruhi IKP di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022. **Metode**. Penelitian ini menggunakan metode RMGTWR dengan M-*Estimator.* **Hasil**. Model RMGTWR dengan M-*Estimator* akan menghasilkan pemodelan sebanyak 120 model yang mewakili setiap lokasi dan waktu. Parameter model RMGTWR terdiri atas parameter global dan parameter lokal. Parameter global memiliki nilai pengaruh yang sama untuk semua lokasi dan waktu, sedangkan parameter lokal memiliki nilai yang berbeda-beda pada setiap lokasi dan waktu. Model RMGTWR dengan M-*Estimator* mampu mengurangi pencilan pada model MGTWR dan dapat menurunkan nilai AIC menjadi 414.9719 serta menghasilkan nilai R^2 sebesar 99.4815%. **Kesimpulan**. Model RMGTWR dengan M-*Estimator* menjadi model terbaik dalam menjelaskan IKP di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022. Faktor-faktor yang memengaruhi IKP di Sulawesi Selatan yaitu rasio komsumsi normatif per kapita terhadap produksi bersih, persentase rumah tangga dengan proporsi pengeluaran untuk pangan lebih dari 65% terhadap total pengeluaran, persentase rumah tangga tanpa akses listrik, persentase rumah tangga tanpa akses ke air bersih, dan persentase balita *stunting*.

Kata Kunci: MGTWR, RMGTWR, M-*Estimator*, Pencilan, Regresi *Robust,* Indeks Ketahanan Pangan

ABSTRACT

Nur Aulia. **Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression Modeling with M-Estimator on Food Security Index in South Sulawesi.** (supervised Siswanto, S.Si., M.Si).

Background. MGTWR stands for Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression. It combines a global linear regression model with a GTWR model that considers location and time. However, MGTWR is susceptible to outliers, leading to bias and inaccuracy. Therefore, robust regression modeling with the M-Estimator was developed and applied to the food security index in South Sulawesi Province in 2018–2022. **Aim.** Obtain the Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression (RMGTWR) model with an M-estimator and factors that significantly affect the food security index in South Sulawesi Province in 2018-2022. **Methods.** This research uses the RMGTWR method with M-Estimator. **Results.** The RMGTWR model with M-Estimator produces 120 models representing each location and time. RMGTWR model parameters consist of global and local parameters. Global parameters have the same influence value for all locations and times, while local parameters vary by location and time. The RMGTWR model with M-Estimator reduces outliers in the MGTWR model, decreases the AIC value to 414.9719, and produces an R^2 value of 99.4815%. **Conclusion.** The RMGTWR model with M-Estimator is the best model for explaining the food security index in South Sulawesi Province in 2018–2022. Factors that influence the food security index in South Sulawesi Province are the ratio of normative consumption per capita to net production, the percentage of households with a proportion of expenditure on food greater than 65% of total spending, the percentage of households without access to electricity, the percentage of households without access to clean water, and the percentage of stunting toddlers.

Keywords: RMGTWR, M-Estimator, Outliers, Robust Regression, Food Security Index

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Nomor urut Halaman

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor Urut Halaman

DAFTAR LAMBANG/SINGKATAN

Lambang/Singkatan	Arti dan Penjelasan
GWR	*Geographically Weighted Regression*
GTWR	*Geographically and Temporally Weighted Regression*
MGTWR	*Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression*
RMGTWR	*Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression*
IKP	Indeks Ketahanan Pangan
CV	*Cross Validation*
RWBP	*Random Walk Bipartite*
$\boldsymbol{W}$	Matriks pembobot
$\boldsymbol{B}$	Matriks pembobot *robust*
h_S	*Bandwidth* spasial
h_T	*Bandwidth* temporal
h_{ST}	*Bandwidth* spasial-temporal
d_{ij}^{ST}	Jarak spasial-temporal
w_{ij}^{ST}	Pembobot spasial-temporal
λ	Parameter jarak spasial
μ	Parameter jarak temporal
τ	Parameter rasio
u_i	Latitude atau garis lintang pada lokasi ke-i
v_i	Longitude atau garis bujur pada lokasi ke-i
$\boldsymbol{\beta_g}$	Parameter global
$\boldsymbol{\beta_l}$	Parameter lokal
ρ	Fungsi objektif
ψ	Fungsi pengaruh

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis spasial merupakan salah satu metode statistika untuk menganalisis data yang berorientasi pada struktur geografis dan memiliki sistem koordinat berupa garis lintang dan bujur (Paramita dkk., 2021). Analisis terhadap data spasial memerlukan perhatian khusus dikarenakan kondisi dari suatu lokasi pengamatan akan berbeda dengan lokasi pengamatan lainnya, sehingga akan memunculkan heterogenitas spasial (Debataraja dkk., 2021). Heterogenitas spasial atau disebut juga dengan keragaman spasial terjadi ketika variabel prediktor yang sama menghasilkan respon yang berbeda di lokasi yang berbeda dalam suatu wilayah penelitian (Caraka dan Yasin, 2017). Oleh karena itu, dibutuhkan pendekatan analisis yang dapat memperhitungkan pengaruh heterogenitas spasial. Salah satu metode analisis yang mampu mengatasi data dengan heterogenitas spasial adalah *Geographically Weighted Regression* (Fotheringham dkk., 2002).

Model *Geographically Weighted Regression* (GWR) merupakan analisis regresi yang memperhitungkan unsur spasial, sehingga parameter-parameternya berlaku hanya di lokasi pengamatan tertentu dan berbeda dari lokasi lainnya (Lee dkk., 2024). Namun, metode GWR dalam analisisnya hanya mempertimbangkan unsur spasial tanpa adanya unsur waktu dalam pemodelannya (Ma dkk., 2018). Menurut Fotheringham dkk. (2015) selain unsur lokasi, waktu juga merupakan dimensi penting yang berkaitan dengan aktivitas sosial dan lingkungan. Banyak variabel yang menarik dalam ilmu kebumian yang diamati tidak hanya dalam ruang, tetapi juga dari waktu ke waktu. Oleh karena itu, model GWR dikembangkan menjadi *Geographically and Temporally Weighted Regression* (GTWR). Penambahan unsur waktu pada GWR akan menghasilkan model yang lebih representatif untuk setiap lokasi dan waktu (Huang dkk., 2010).

Parameter yang dihasilkan oleh model GTWR bersifat lokal untuk setiap lokasi. Namun, pada kenyataannya tidak semua variabel dalam model mempunyai pengaruh secara spasial terhadap respon. Beberapa variabel berpengaruh secara global, sedangkan yang lainnya mempertahankan pengaruh spasialnya. Oleh karena itu, model GTWR kemudian dikembangkan menjadi model *Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (MGTWR) (Djuraidah dkk., 2021). Model MGTWR merupakan kombinasi antara model regresi linier global dengan model GTWR, sehingga dengan model MGTWR akan menghasilkan pendugaan parameter yang sebagian bersifat lokal menurut lokasi dan waktu serta sebagian yang lain bersifat global untuk semua lokasi dan waktu (Nuramaliyah dkk., 2019).

Menurut Asianingrum dkk. (2020), model MGTWR tidak kekar dalam menangani pencilan dan dapat mengakibatkan adanya bias serta ketidakakuratan dalam hubungan regresi. Oleh karena itu, untuk mengatasi adanya pencilan pada model regresi spasial dikembangkan suatu metode regresi *robust* yang dapat menghasilkan estimasi model yang resisten terhadap pencilan (Rahman dan Widodo, 2018). Salah satu metode estimasi pada regresi *robust* yaitu M-*estimator* yang diterapkan dengan tujuan meminimalkan fungsi objektif dari residual (Begashaw dan Yohannes, 2020). Metode estimasi ini memiliki efisiensi yang tinggi terhadap keberadaan pencilan dan merupakan pendekatan paling sederhana baik secara komputasi maupun secara teoritis (Huber dan Ronchetti, 1981). Penggabungan metode *robust* pada model MGTWR kemudian disebut *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* (RMGTWR). Pomodelan ini diharapkan mampu mengatasi keragaman spasial dan temporal yang terjadi serta menghasilkan model yang representatif dan kekar terhadap pengaruh pencilan (Erda dkk., 2018).

Musdalifah dkk. (2023) telah melakukan penelitian mengenai pemodelan RGTWR dengan M-*Estimator* pada penderita pneumonia usia balita di Indonesia. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model RGTWR dengan M-*Estimator* lebih baik dalam menjelaskan penderita pneumonia usia balita di Indonesia. Erda dkk. (2018) juga telah melakukan pemodelan RGTWR dengan M-*Estimator* pada peserta KB aktif di Jawa Timur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model RGTWR dengan M-*Estimator* dapat mengatasi residual model GTWR yang terdeteksi sebagai pencilan. Selain itu, *Robust* M-*Estimator* juga telah diterapkan pada model MGTWR untuk memodelkan persentase penduduk miskin di Pulau Jawa. Hasil penelitian menunjukkan RMGTWR dengan M-*Estimator* mampu mengurangi pencilan dan menjadi model terbaik dalam memodelkan data persentase penduduk miskin di Pulau Jawa (Asianingrum dkk., 2020). Ketiga penelitian tersebut telah berfokus pada bidang kesehatan dan ekonomi, sehingga pada penelitian ini akan dilakukan analisis di bidang lainnya, yaitu pada bidang pangan dan gizi berupa analisis pada Indeks Ketahanan Pangan di Provinsi Sulawesi Selatan.

Indeks ketahanan pangan (IKP) merupakan suatu alat pengukuran yang digunakan untuk mengevaluasi tingkat ketahanan pangan suatu wilayah. Pangan sendiri termasuk salah satu isu krusial di tingkat nasional dan global karena merupakan hak setiap warga negara yang harus dijaga kualitas dan kuantitasnya (Salasa, 2021). Berdasarkan konteks pembangunan daerah, ketahanan pangan menjadi faktor kunci yang berpengaruh besar terhadap pertumbuhan ekonomi, kesejahteraan masyarakat, dan stabilitas sosial. Mengingat pentingnya memenuhi kecukupan pangan suatu daerah, maka mendahulukan pembangunan ketahanan pangan sangat penting sebelum pembangunan di sektor-sektor lainnya. Sulawesi Selatan pada periode 2018 hingga 2022 berhasil meraih predikat sebagai provinsi dengan tingkat ketahanan pangan terbaik. Peringkat IKP provinsi ini dari tahun ke tahun mengalami peningkatan. Pada tahun 2022, Sulawesi Selatan memiliki tingkat ketahanan pangan sebesar 81.38. Angka ini menempati posisi ketiga dibanding provinsi lain yang ada di Indonesia (Badan Pangan Nasional, 2022).

IKP pada tingkat Provinsi Sulawesi Selatan disusun berdasarkan analisis IKP tingkat kabupaten/kota. Kondisi IKP di tingkat kabupaten/kota memiliki nilai yang berbeda di setiap wilayah dan menunjukkan perbedaan dengan kondisi IKP di tingkat provinsi. Faktor-faktor yang memengaruhi kondisi IKP di setiap kabupaten/kota juga akan berbeda tergantung pada karakteristik wilayahnya. Meskipun demikian, terdapat kemungkinan beberapa faktor yang berpengaruh secara global pada semua lokasi pengamatan. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan mengidentifikasi faktor-

faktor yang memengaruhi IKP di setiap kabupaten/kota di Sulawesi Selatan pada tahun 2018-2022 menggunakan *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* dengan M-*Estimator*. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan panduan bagi pemerintah dan masyarakat dalam menjaga serta meningkatkan IKP di wilayah tersebut.

1.2 Batasan Penelitian

Penelitian ini dibatasi pada tujuh variabel yang diduga memengaruhi IKP di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022. Metode penentuan jarak antar lokasi pengamatan menggunakan jarak *euclidean* dan fungsi pembobot yang digunakan adalah pembobot terbaik berdasarkan nilai *Cross Validation* (CV) terkecil.

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh model RMGTWR dengan M-*Estimator* pada IKP di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022.
2. Memperoleh faktor-faktor yang secara signifikan memengaruhi IKP di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022.

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi kepada pihak berkepentingan mengenai faktor yang memengaruhi IKP di Sulawesi Selatan tahun 2018-2022.
2. Menambah dan mengembangkan wawasan terkait metode RMGTWR dengan M-*Estimator*. Penelitian ini dapat menjadi rujukan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Teori

1.5.1 Regresi Linier Berganda

Analisis regresi merupakan metode statistika yang digunakan untuk menganalisis dan memodelkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor (Efendi dkk., 2020). Model regresi linier bertujuan untuk mendapatkan pengaruh antar variabel atau mencari hubungan fungsional dua variabel prediktor atau lebih dengan variabel respon (Ikhsanudin dan Pasaribu, 2023). Model regresi linier secara umum ditulis dalam Persamaan (1).

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \tag{1}$$

Persamaan umum model regresi linier dapat ditulis dalam bentuk matriks pada Persamaan (2).

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$i = 1,2,\dots,n$; $k = 1,2,3,\dots,p$

dengan

n : Jumlah pengamatan
p : Jumlah prediktor
y_i : Nilai observasi variabel respon pada pengamatan ke-i
x_{ik} : Nilai observasi variabel prediktor ke-k pada pengamatan ke-i
β_0 : Nilai intersep model regresi
β_k : Koefisien regresi variabel prediktor ke-k
ε_i : Residual pada pengamatan ke-i dengan asumsi independen, identik, dan berdistribusi normal, dengan *mean* nol dan *variansi* konstan σ^2 (Fotheringham dkk., 2002)

1.5.2 Pengujian Heterogenitas Spasial

Heterogenitas spasial merupakan keadaan yang terjadi apabila suatu variabel prediktor yang sama memberikan respon yang tidak sama pada lokasi yang berbeda dalam satu wilayah penelitian (Caraka dan Yasin, 2017). Sehingga, adanya heterogenitas spasial dapat menghasilkan parameter yang berbeda di tiap lokasi pengamatan. Pengujian heterogenitas spasial dilakukan dengan menggunakan uji *Breusch-Pagan* (BP) dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ (tidak terdapat heterogenitas spasial)
$H_1 : \text{ada } \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ dengan $i \neq j$ (terdapat heterogenitas spasial)

Nilai dari uji BP dihitung menggunakan Persamaan (3).

$$BP = \frac{1}{2}\mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z})^{-\mathbf{1}}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{f} \tag{3}$$

dengan

$$f_i = \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2} - 1\right)$$

e_i^2 adalah residual untuk observasi ke- i dari hasil estimasi regresi dengan menggunakan OLS dan $\boldsymbol{Z}$ merupakan matriks variabel prediktor berukuran $n \times (p + 1)$. Pengambilan keputusan dalam uji BP adalah apabila nilai $BP > \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau nilai $p - value < \alpha$ maka H_0 ditolak yang artinya terjadi heterogenitas spasial (Agustina dkk., 2022).

1.5.3 *Geographically Weighted Regression*

Geographically Weighted Regression (GWR) merupakan salah satu pendekatan titik yang efektif untuk mengatasi data yang memiliki masalah heterogenitas spasial (Amalia dan Sari, 2019). Model GWR merupakan pengembangan dari model regresi linear berganda yang diperoleh dengan memperhitungkan hubungan spasial berupa pemberian bobot pada setiap titik lokasi di mana pengamatan dilakukan (Cellmer dkk., 2020). Oleh karena itu, model ini menghasilkan estimasi parameter yang bersifat lokal untuk setiap titik lokasi pengamatan. Variabel respon y pada model ini diprediksi oleh variabel-variabel prediktor yang koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati (Sihombing dkk., 2023). Model GWR untuk lokasi ke-i ditunjukkan pada Persamaan (4).

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i)x_{ik} + \varepsilon_i \tag{4}$$

$i = 1,2, \dots, n$; dan $k = 1,2, \dots, p$

dengan

y_i : Variabel respon untuk lokasi pengamatan ke-i

$\beta_0(u_i, v_i)$: Intersep pada lokasi pengamatan ke-i

$\beta_k(u_i, v_i)$: Koefisien regresi variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-i

x_{ik} : Variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-i

ε_i : Residual pengamatan pada lokasi ke-i

Pemodelan pada GWR sangat bergantung pada pembobot spasial yang digunakan. Pembobot $\boldsymbol{W}$ merupakan diagonal matriks dari w_j (bobot tiap titik data dengan lokasi ke-j). Menurut Fotheringham dkk (2002), pemilihan pembobot spasial yang digunakan sangat penting karena pembobot dapat menjelaskan besarnya pengaruh ketetanggaan suatu daerah. Pembobot yang terbentuk diperoleh dari fungsi kernel. Terdapat beberapa fungsi kernel yang dapat digunakan untuk pembobotan, antara lain:

1. Fungsi Kernel *Gaussian*

$$w_j(u_i, v_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^2\right] \tag{5}$$

2. Fungsi Kernel *Exponential*

$$w_j(u_i, v_i) = \exp\left[-\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)\right] \tag{6}$$

3. Fungsi Kernel *Bisquare*

$$w_j(u_i, v_i) = \begin{cases} \left(-1\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^2\right)^2, & untuk\ d_{ij} \leq h \\ 0, & untuk\ d_{ij} > h \end{cases} \tag{7}$$

4. Fungsi Kernel *Tricube*

$$w_j(u_i, v_i) = \begin{cases} \left(-1\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^3\right)^3, & untuk\ d_{ij} \leq h \\ 0, & untuk\ d_{ij} > h \end{cases} \tag{8}$$

dengan h merupakan lebar jendela (*bandwidth*) dan d_{ij} adalah jarak antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j berdasarkan titik koordinat. Nilai d_{ij} dihitung dengan menggunakan Persamaan (9).

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - v_i)^2 + \left(u_j - v_j\right)^2} \tag{9}$$

Lebar jendela atau *bandwidth* merupakan ukuran jarak fungsi pembobot yang dapat mengukur sejauh mana pengaruh suatu lokasi dengan lokasi lainnya. Pemilihan *bandwidth* yang optimal dapat dilakukan melalui metode *Cross Validation* (CV). Menurut Fotheringham dkk (2002), untuk memilih *bandwidth* optimal dapat dipilih berdasarkan nilai CV minimum menggunakan Persamaan (10).

$$CV = \sum_{i-1}^{n} [y_i - \hat{y}_{\neq i}(h)]^2 \tag{10}$$

dengan

CV : Nilai *Cross Validation*

y_i : Nilai observasi variabel respon pada lokasi ke-i

$\hat{y}_{\neq i}$: Nilai dugaan dari model GWR tanpa melibatkan lokasi ke-i dalam proses estimasi

1.5.4 *Geographically and Temporally Weighted Regression*

Geographically and Temporally Weighted Regression (GTWR) merupakan pengembangan dari model GWR yang mengakomodasi adanya heterogenitas spasial dan temporal (Huang dkk., 2010). Koefisien regresi dari model ini merupakan fungsi tiga dimensi dari waktu dan unsur spasial, sehingga dapat mempertimbangkan ketidakstasioneran ruang dan waktu secara bersamaan (Yang dkk., 2022). Model GTWR untuk p variabel prediktor dengan variabel respon y_i pada koordinat (u_i, v_i, t_i) tertentu untuk setiap observasi ditunjukkan pada Persamaan (11).

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i, t_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(u_i, v_i, t_i)\, x_{ik} + \varepsilon_i \tag{11}$$

$i = 1,2, \dots, n$; dan $k = 1,2, \dots, p$

dengan:

y_i : Variabel respon untuk lokasi pengamatan ke-i

$\beta_0(u_i, v_i, t_i)$: Intersep pada lokasi pengamatan ke-(u_i, v_i) dan waktu ke-t_i

$\beta_k(u_i, v_i, t_i)$: Koefisien regresi variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-(u_i, v_i) dan waktu ke-t_i

x_{ik} : Variabel prediktor ke-k pada lokasi pengamatan ke-i

ε_i : Residual pengamatan pada lokasi ke-i

Parameter model GTWR $\hat{\beta}_k(u_i, v_i, t_i)$ untuk setiap k variabel pada lokasi ke-i diperoleh dengan menggunakan metode kuadrat terkecil terboboti (*Weighted Least Square*) dengan memberi pembobot berbeda untuk setiap lokasi dan waktu. Pendugaan parameter pada GTWR dituliskan pada Persamaan (12).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i, t_i) = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{Y} \tag{12}$$

dengan

$$\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) = diag(w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in})$$

$W(u_i, v_i, t_i)$ adalah matriks pembobot pada pengamatan (u_i, v_i) dan waktu ke-t_i, sedangkan n adalah jumlah observasi. Elemen diagonal w_{ij} $(1 \leq j \leq n)$ menunjukkan fungsi jarak spasial-temporal (Xu dkk., 2020).

1.5.5 Jarak Spasial-Temporal

Pendefinisian dan pengukuran kedekatan spasial-temporal dalam sistem koordinat merupakan masalah utama dalam penyusunan model GTWR dikarenakan kedekatan titik observasi memiliki dua unsur, yaitu kedekatan spasial dan kedekatan temporal (Conita dan Purwaningsih, 2017). Fungsi jarak spasial-temporal $\left(d_{ij}^{ST}\right)$ dibentuk melalui kombinasi dari fungsi jarak spasial (d_{ij}^{S}) dan fungsi jarak temporal $\left(d_{ij}^{T}\right)$, menggunakan Persamaan (13).

$$\left(d_{ij}^{ST}\right)^2 = \lambda\left(d_{ij}^{S}\right)^2 + \mu\left(d_{ij}^{T}\right)^2 \tag{13}$$

dengan λ dan μ merupakan parameter penyeimbang terhadap pengaruh perbedaan satuan antara lokasi dan waktu pada pengukuran jarak spasial-temporal. Sedangkan, jarak *euclidean* yakni $\left(d_{ij}^{S}\right)^2 = \left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2$, $\left(d_{ij}^{T}\right)^2 = \left(t_i - t_j\right)^2$ dan d_{ij} merupakan jarak antara titik i dan titik j. Sehingga, jarak *euclidean* spasial-temporal pada Persamaan (13) berubah menjadi (Huang dkk., 2010):

$$\left(d_{ij}^{ST}\right)^2 = \lambda\left\{\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2\right\} + \mu\left(t_i - t_j\right)^2 \tag{14}$$

Berdasarkan Persamaan (13), kemudian diperoleh:

$$w_{ij} = \exp\left\{-\left(\frac{\lambda\left[\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2\right] + \mu\left[\left(t_i - t_j\right)^2\right]}{h_{ST}^2}\right)\right\}$$

Misalkan $h_S^2 = \frac{h_{ST}^2}{\lambda}$ dan $h_T^2 = \frac{h_{ST}^2}{\mu}$ maka diperoleh hasil:

$$= \exp\left\{-\left(\frac{\left[\left(u_i-u_j\right)^2+\left(v_i-v_j\right)^2\right]}{h_S^2}\right) + \frac{\left[\left(t_i-t_j\right)^2\right]}{h_T^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{(d_{ij}^{S})^2}{h_S^2} + \frac{(d_{ij}^{T})^2}{h_T^2}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{(d_{ij}^{S})^2}{h_S^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{(d_{ij}^{T})^2}{h_T^2}\right\}$$

$$= w_{ij}^{S} \times w_{ij}^{T} \tag{15}$$

dengan $w_{ij}^{S} = exp\left\{-\frac{(d_{ij}^{S})^2}{h_S^2}\right\}$ dan $w_{ij}^{T} = \exp\left\{-\frac{(d_{ij}^{T})^2}{h_T^2}\right\}$

h_S : *Bandwidth* spasial

h_T : *Bandwidth* temporal

h_{ST} : *Bandwidth* spasial-temporal

Menurut Liu dkk. (2017), misalkan τ merupakan parameter rasio dari $\tau = \frac{\mu}{\lambda}$ dengan $\lambda \neq 0$ maka diperoleh Persamaan (16).

$$\frac{\left(d_{ij}^{ST}\right)^2}{\lambda} = \left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2 + \tau\left(t_i - t_j\right)^2 \tag{16}$$

Parameter τ berfungsi untuk memperbesar atau memperkecil rasio dari jarak temporal terhadap jarak spasial. Parameter ini didapatkan dari kriteria CV minimum melalui iterasi inisialisasi nilai τ awal, pada Persamaan (17).

$$CV(\tau) = \sum_{i=1}^{n} [y_{=i} - \hat{y}_{\neq i}(\tau)]^2 \tag{17}$$

Selanjutnya pendugaan parameter λ dan μ bisa diperoleh dengan metode iteratif berdasarkan hasil penduga τ yang menghasilkan CV minimum (Huang dkk., 2010).

1.5.6 *Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression*

Pada model GTWR diketahui bahwa tidak semua variabel prediktor berpengaruh secara spasial dan temporal. Beberapa variabel prediktor berpengaruh secara global, sedangkan yang lainnya dapat mempertahankan pengaruh spasialnya. Oleh karena itu, menurut Liu dkk. (2017) dapat dilakukan solusi dengan mengombinasikan situasi tersebut dengan campuran pengaruh spasial lokal dan global yang dikenal sebagai model *Mixed Geographically Temporally Weighted Regression* (MGTWR). Model MGTWR yang melibatkan p variabel prediktor dengan pengaruh global dan q variabel prediktor yang memiliki pengaruh lokal, dengan asumsi bahwa intersep model bersifat lokal. Secara matematis, model MGTWR dinyatakan dalam Persamaan (18).

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i, t_i) + \sum_{k=1}^{q} \beta_l(u_i, v_i, t_i)\, x_{ik} + \sum_{k=q+1}^{p} \beta_g\, x_{ik} + \varepsilon_i \tag{18}$$

dengan

y_i	: Variabel respon untuk lokasi ke-i
x_{ik}	: Variabel prediktor ke-k pada pengamatan lokasi ke-i
β_g	: Koefisien regresi global
$\beta_l(u_i, v_i, t_i)$	: Koefisien regresi lokal pada geografis dan waktu lokasi ke-i
p	: Jumlah variabel prediktor dengan pengaruh global
q	: Jumlah variabel prediktor dengan pengaruh lokal
i	: Lokasi untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$
ε_i	: Residual pengamatan pada lokasi ke-i

Pendugaan parameter model MGTWR dilakukan menggunakan metode WLS yaitu dengan memberikan pembobot yang berbeda untuk setiap lokasi pengamatan. Pendugaan parameter MGTWR dapat dinyatakan dalam bentuk matriks pada Persamaan (19).

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{X}_g \boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{19}$$

dengan

$\boldsymbol{X}_g$: Matriks variabel prediktor global

$\boldsymbol{X}_l$: Matriks variabel prediktor lokal

$\boldsymbol{\beta}_g$: Vektor parameter variabel prediktor global

$\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$: Vektor parameter variabel prediktor lokal pada titik pengamatanke-i

Pendugaan parameter model MGTWR sama dengan estimasi pada model MGWR (Fotheringham dkk., 2002), yaitu dengan dua langkah estimasi $\boldsymbol{\beta}_g$ dan $\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$. Pertama, menuliskan model MGTWR dalam bentuk GTWR yang ditunjukkan pada Persamaan (20).

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g = \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{20}$$

Sehingga, pendugaan parameter model MGTWR yang pertama ditunjukkan pada Persamaan (21).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\widetilde{\boldsymbol{Y}} \tag{21}$$

Misalkan $\boldsymbol{x}_{li}^T = (1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iq})$ adalah elemen baris ke-i dari matriks $\boldsymbol{X}_l$. Oleh karena itu, nilai penduga untuk $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ pada (u_i, v_i, t_i) untuk seluruh pengamatan dapat dituliskan pada Persamaan (22).

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{Y}}} = \left(\widehat{\widetilde{\boldsymbol{Y}}}_1, \widehat{\widetilde{\boldsymbol{Y}}}_2, \dots, \widehat{\widetilde{\boldsymbol{Y}}}_n\right) = \boldsymbol{S}_l\widetilde{\boldsymbol{Y}} \tag{22}$$

dengan

$$\boldsymbol{S}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{l1}^T(\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l)^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \\ \boldsymbol{x}_{l2}^T(\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l)^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{ln}^T(\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l)^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \end{bmatrix}$$

Kemudian, substitusikan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)$ kedalam model MGTWR pada Persamaan (19) sehingga diperoleh Persamaan (23).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} \tag{23}$$

Substitusi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g$ kedalam Persamaan (21) maka diperoleh penduga untuk koefisien lokal pada lokasi (u_i, v_i, t_i) adalah:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g\right) \tag{24}$$

Oleh karena itu, nilai penduga respon untuk n lokasi pengamatan yaitu ditunjukkan pada Persamaan (25).

$$\widehat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{Y} \tag{25}$$

dengan

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_l + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)$$

Penduga $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)$ merupakan penduga tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}_g$ dan $\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$ (Yasin dkk., 2015).

1.5.7 *Random Walk Bipartite*

Random Walk Bipartite (RWBP) merupakan metode yang digunakan untuk mendeteksi adanya pencilan pada data spasial menggunakan pendekatan *Random Walk* (jalan acak). Pendekatan ini disusun berdasarkan atribut spasial dan nonspasial pada data. Deteksi pencilan menggunakan RWBP pada setiap tittik dilakukan dengan menghitung jarak antara pengamatan spasial dengan tetangga terdekat melalui dua grafik yang terboboti. Menurut Liu dkk, (2010) RWBP dilakukan dengan langkah-langkah seperti berikut:

1. Pembentukan Dua Grafik Terboboti

Pembentukan grafik terdiri dari tiga tahapan dasar. Pertama, mengelompokkan peubah nonspasial berdasarkan motode penggerombolan *K-Means*. Kemudian, membentuk dua grafik, bagian kiri berisi data spasial dan bagian kanan berisi data nonspasial yang telah digerombolkan sebelumnya. Selanjutnya, menghitung nilai *edge* (nilai pengamatan spasial dan kelompok) berdasarkan peubah nonspasial dan nilai pusat dari kelompok yang terbentuk yang dihitung dengan Persamaan (26).

$$E\langle P_i, C_j\rangle = \frac{1}{e^{\left|Atr(P_i)-Ctr(C_j)\right|^{\alpha}}}, 0 < \alpha \leq 2 \tag{26}$$

dengan

$Atr(P_i)$: Peubah nonspasial ke-i

$Ctr(C_j)$: Nilai pusat (Center) dari kelompok ke-j

α : Nilai konstanta yang diperoleh berdasarkan jangkauan dari nilai peubah nonspasial

2. Menghitung Kemiripan antara Pengamatan Spasial

Perhitungan kemiripan antara pengamatan spasial dilakukan dengan menerapkan metode jalan acak pada dua grafik terboboti. Jalan acak berarti langkah dimulai dari simpul ke-i dan secara iterasi menuju tetangga terdekat dengan peluang tertentu sebesar c untuk kembali ke simpul awal yang dihitung berdasarkan Persamaan (27).

$$\boldsymbol{s}_p = (1-c)\left(I - c\boldsymbol{W}_p\right)^{-1}\boldsymbol{e}_p \tag{27}$$

dengan

$\boldsymbol{s}_p$: Vektor peluang yang menjelaskan skor kemiripan antara titik ke-p dan titik lainnya

c : Konstanta yang bernilai 0.1

$\boldsymbol{W}_p$: Matriks ketetanggaan dari titik ke-p yang telah dinormalisasi

e_p : Nilai edge untuk titik ke-p

3. Menghitung skor kemiripan untuk tiap pasangan pengamatan spasial dengan rumus yang ditunjukkan pada Persamaan (28).

$$Sim\left(p_i, p_j\right) = \frac{\left(\boldsymbol{s}_{pi}, \boldsymbol{s}_{pj}\right)}{\sqrt{\left(\boldsymbol{s}_{pi}, \boldsymbol{s}_{pi}\right)} \times \sqrt{\left(\boldsymbol{s}_{pj}, \boldsymbol{s}_{pj}\right)}} \tag{28}$$

dengan

$\boldsymbol{s}_{pi}$: Vektor peluang yang menjelaskan skor kemiripan antara titik ke-p dan titik lainnya pada lokasi ke-i

$\boldsymbol{s}_{pj}$: Vektor peluang yang menjelaskan skor kemiripan antara titik ke-p dan titik lainnya pada lokasi ke-j

4. Mengidentifikasi pencilan spasial berdasarkan nilai kemiripan dimana nilai kemiripan terkecil akan dideteksi sebagai pencilan.

1.5.8 *Robust Regression* dengan M-*Estimator*

Robust Regression (regresi kekar) merupakan metode regresi yang diterapkan ketika residual tidak berdistribusi normal atau terdapat pencilan yang berpengaruh pada model (Susanti dkk., 2020). Metode *robust regression* digunakan untuk menghasilkan estimasi yang kekar terhadap adanya pencilan (Chen, 2002). Metode ini menggunakan skema pembobotan yang menyebabkan pencilan memiliki dampak yang lebih kecil terhadap estimasi (Begashaw dan Yohannes, 2020). Pencilan yang terdapat pada variabel respon salah satunya dapat diatasi menggunakan M-*Estimator.* Menurut Fox (2002), regresi kekar dengan M-*Estimator* dilakukan dengan meminimumkan fungsi objektif dari residual dengan Persamaan (29).

$$M = \sum_{i=1}^{n} \rho(\varepsilon_i) \tag{29}$$

dengan

M : Nilai penaksir M

ρ : Fungsi objektif

ε_i : Residual pada pengamatan ke-i

Fungsi objektif merupakan fungsi yang digunakan untuk mencari fungsi pembobot pada regresi kekar. Terdapat beberapa fungsi objektif yang dapat digunakan pada regresi kekar, yaitu:

1. Fungsi Objektif *Huber*

$$\rho(\varepsilon_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon_i^{*2} & , \quad |\varepsilon_i^*| \le c \\ c|\varepsilon_i^*| - \frac{1}{2}c^2 , & \quad |\varepsilon_i^*| > c \end{cases}$$

dengan

$$\rho'(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_i^* & , \ |\varepsilon_i^*| \le c \\ c & , \ |\varepsilon_i^*| > c \\ -c & , \ |\varepsilon_i^*| < c \end{cases}$$

dan fungsi pembobot:

$$b_i = \begin{cases} 1 & , \quad |\varepsilon_i^*| \le c \\ \dfrac{c}{|\varepsilon_i^*|} & , \quad |\varepsilon_i^*| > c \end{cases} \tag{30}$$

2. Fungsi objektif *Tukey*

$$\rho(\varepsilon_i) = \begin{cases} \frac{c^2}{6}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_i^*}{c}\right)^2\right]\right\}, & |\varepsilon_i^*| \le c \\ \frac{c^2}{6} \qquad , & |\varepsilon_i^*| > c \end{cases}$$

dengan

$$\rho'(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_i^*\left(1 - \left(\frac{\varepsilon_i^*}{c}\right)^2\right)^2, & |\varepsilon_i^*| \le c \\ 0 \qquad , & |\varepsilon_i^*| > -c \end{cases}$$

dan fungsi pembobot:

$$b_i = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_i^*}{c}\right)^2\right)^2, & |\varepsilon_i^*| \le c \\ 0 \qquad , & |\varepsilon_i^*| > c \end{cases} \tag{31}$$

dengan $\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}}$, $\varepsilon_i = y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j$ dan notasi $\hat{\sigma}$ merupakan skala estimasi robust. Nilai σ diduga dengan

$$\hat{\sigma} = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}$$

Sedangkan konstanta c adalah *tuning constant* yang merupakan konstanta untuk menentukan kekerasan penaksir terhadap pencilan dan efisensi penaksir dalam ketidakadaan pencilan. Konstanta c untuk fungsi pembobot *Huber* bernilai 1.345 dan untuk pembobot *Tukey* bernilai 4.685.

1.5.9 *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression*

Model *Robust Mixed Geographically Temporally Weighted Regression* (RMGTWR) dengan p variabel prediktor global dan q variabel prediktor lokal, serta mengasumsikan bahwa intersep model bersifat lokal. Menurut Fox (2002), pada umumnya regresi kekar dengan M-*Estimator* ini dilakukan dengan memimumkan fungsi objektif (meminumumkan residual ρ) berdasarkan bersamaan (32)

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \tag{32}$$

Sehingga, untuk model RMGTWR yang mengandung pencilan ditunjukkan pada Persamaan (33) dan Persamaan (34).

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g + \rho(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{33}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g = \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \rho(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{34}$$

Pada Persamaan (33) dapat dilihat model RMGTWR terdiri dari dua parameter, yakni parameter lokal dan parameter global. Selanjutnya, proses estimasi akan dilakukan satu persatu dengan parameter lokal dan global sebagai berikut:

Parameter lokal:

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \rho(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{35}$$

Parameter global

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X_g \beta_g} \tag{36}$$

1. Estimasi Parameter Lokal

Estimasi parameter lokal model MGTWR dilakukan dengan menggunakan Persamaan (19) dan Persamaan (36), sehingga akan menghasilkan Persamaan (37).

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{X}_g \boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) - \boldsymbol{X}_g \boldsymbol{\beta}_g$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g \boldsymbol{\beta}_g - \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) \tag{37}$$

Berdasarkan Persamaan (32) dan (37), untuk parameter lokal dapat dijabarkan pada Persamaan (38).

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)\right) \tag{38}$$

Maka jumlah kuadrat residual yang mengandung pencilan ditunjukkan pada Persamaan (39).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \rho \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)\right)^T \rho \left(\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)\right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \rho \boldsymbol{\varepsilon} = \widetilde{\boldsymbol{Y}}^T \rho \widetilde{\boldsymbol{Y}} - 2\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)^T \boldsymbol{X}_l^T \rho \widetilde{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)^T \boldsymbol{X}_l^T \rho \boldsymbol{X}_l \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) \tag{39}$$

Persamaan $\boldsymbol{\varepsilon}^T \rho \boldsymbol{\varepsilon}$ selanjutnya akan diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$ dan hasilnya disamakan dengan nol maka diperoleh penduga $\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)$ yang dapat dilihat pada Persamaan (40).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T \rho \boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{X}_l^T \rho \widetilde{\boldsymbol{Y}} \tag{40}$$

Parameter ρ adalah parameter yang mengandung pencilan maka ρ dapat dicari dengan menganggap $\rho = \psi$ sebagai fungsi pengaruh, sehingga Persamaan (40) dapat diubah menjadi Persamaan (41).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T \rho \boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{X}_l^T \psi \widetilde{\boldsymbol{Y}} \tag{41}$$

Draper dan Smith (1998) memberikan solusi dengan mendefinisikan suatu fungsi pembobot sebagai berikut:

$$b_i = \frac{\psi \varepsilon_i^*}{\varepsilon_i^*} \tag{42}$$

dengan ε_i^* merupakan residual yang distandarisasi terhadap estimasi simpangan baku ($\hat{\sigma}$), maka didapatkan $\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}}$.

$$\hat{\sigma} = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}$$

Oleh karena itu, Persamaan (42) dapat diubah menjadi:

$$b_i = \frac{\psi\left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)}{\hat{\sigma}}\right)}{\left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)}{\hat{\sigma}}\right)}$$

dan

$$\psi\left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)}{\hat{\sigma}}\right) = b_i\left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i)}{\hat{\sigma}}\right) \tag{43}$$

maka diperoleh $\psi = b_i$ dan Persamaan (41) akan berubah menjadi Persamaan (44).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i) = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{Y}} \tag{44}$$

$\boldsymbol{B}$ adalah matriks pembobot pertama yang berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen diagonal berisis pembobot $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$ menggunakan fungsi pembobot *Tukey***.** Selain itu, Persamaan (44) akan diselesaikan dengan menggunakan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS). Pada iterasi ini, nilai b_i akan berubah nilainya disetiap iterasinya, sehingga diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^2, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^m$, dengan m adalah banyaknya iterasi. Oleh karena itu, pada iterasi 1 untuk penduga $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^1$ ditunjukkan pada Persamaan (45).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^1 = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}^0\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}^0\widetilde{\boldsymbol{Y}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^1 = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}^0\boldsymbol{X}_l]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}^0\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^0\right) \tag{45}$$

2. Estimasi Parameter Global

Penduga parameter global diperoleh dengan mensubstitusikan penduga parameter lokal pada Persamaan (22) kedalam model MGTWR pada Persamaan (19) sehingga diperoleh Persamaan (46).

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_i) + \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_l\widetilde{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_l(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g) + \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g \tag{46}$$

Berdasarkan Persamaan (32) dan (46), untuk parameter global dapat dijabarkan pada Persamaan (47).

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g\right) \tag{47}$$

Maka jumlah kuadrat residual yang mengandung pencilan ditunjukkan pada Persamaan (48).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T\rho\boldsymbol{\varepsilon} = \left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g\right)^T \rho\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g\right)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^T\rho\boldsymbol{\varepsilon} = {} & \boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\rho(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - 2\boldsymbol{\beta}_g^T\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\rho(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} \\ & +\boldsymbol{\beta}_g^T\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\rho(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g\end{aligned} \tag{48}$$

Jika Persamaan $\boldsymbol{\varepsilon}^T\rho\boldsymbol{\varepsilon}$ diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_g$ dan hasilnya disamakan dengan nol maka diperoleh penduga $\boldsymbol{\beta}_g$ yang dapat dilihat pada Persamaan (49).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\rho(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\rho(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} \tag{49}$$

Parameter ρ adalah parameter yang mengandung pencilan maka ρ dapat dicari dengan menganggap $\rho = \psi$ sebagai fungsi pengaruh, sehingga Persamaan (49) dapat diubah menjadi Persamaan (50).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\psi(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\psi(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} \tag{50}$$

Draper dan Smith (1998) memberikan solusi dengan mendefinisikan suatu fungsi pembobot sebagai berikut:

$$b_i = \frac{\psi\varepsilon_i^*}{\varepsilon_i^*} \tag{51}$$

dengan ε_i^* merupakan residual yang distandarisasi terhadap estimasi simpangan baku ($\hat{\sigma}$), maka didapatkan $\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}}$.

$$\hat{\sigma} = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}$$

Oleh karena itu, Persamaan (51) dapat diubah menjadi:

$$b_i = \frac{\psi\left(\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g}{\hat{\sigma}}\right)}{\left(\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g}{\hat{\sigma}}\right)}$$

dan

$$\psi\left(\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g}{\hat{\sigma}}\right) = b_i\left(\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\boldsymbol{\beta}_g}{\hat{\sigma}}\right) \tag{52}$$

maka diperoleh $\psi = b_i$ dan Persamaan (50) akan berubah menjadi Persamaan (53).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{Y} \tag{53}$$

$\boldsymbol{B}$ adalah matriks pembobot pertama yang berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen diagonal berisis pembobot $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$ menggunakan fungsi pembobot *Tukey***.** Selain itu, Persamaan (53) akan diselesaikan dengan menggunakan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS). Pada iterasi ini, nilai b_i akan berubah nilainya disetiap iterasinya, sehingga diperoleh diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^2, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m$, dengan m adalah banyaknya iterasi. Oleh karena itu, pada iterasi 1 untuk penduga $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^1$ ditunjukkan pada Persamaan (54).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^1 = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^0)^T \boldsymbol{B}^0 (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^0)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1} \boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^0)^T \boldsymbol{B}^0 (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^0)\boldsymbol{Y} \tag{54}$$

dengan S_l^0 didapat dari matriks berikut dan $\boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)$ merupakan pembobot dari model MGTWR.

$$\boldsymbol{S}_l^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{l1}^T(\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l)^{-1}\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \\ \boldsymbol{x}_{l2}^T(\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l)^{-1}\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{ln}^T(\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i)\boldsymbol{X}_l)^{-1}\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{W}(u_i, v_i, t_i) \end{bmatrix}$$

Pendugaan parameter global dan lokal untuk iterasi m dilakukan dengan Persamaan (55) dan Persamaan (56).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^{m-1})^T \boldsymbol{B}^{m-1} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^{m-1})\boldsymbol{X}_g\right]^{-1} \boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^{m-1})^T \boldsymbol{B}^1 (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^{m-1})\boldsymbol{Y} \tag{55}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^m = [\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{B}^{m-1}\boldsymbol{X}_l]^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{B}^{m-1}\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g \widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^{m-1}\right) \tag{56}$$

Kemudian dihitung kembali pembobot $\boldsymbol{B}^m$, maka pendugaan parameter global dan lokal untuk iterasi selanjutnya yaitu pada Persamaan (57) dan Persamaan (58).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^{m+1} = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^m)^T \boldsymbol{B}^m (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^m)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1} \boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^m)^T \boldsymbol{B}^m (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l^m)\boldsymbol{Y} \tag{57}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^{m+1} = [\boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{B}^m \boldsymbol{X}_l]^{-1} \boldsymbol{X}_l^T \boldsymbol{B}^m \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}_g \widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m\right) \tag{58}$$

Perhitungan diatas akan terus berulang hingga diperoleh penduga yang konvergen yakni ketika selisih nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^{m+1}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g^m$ mendekati 0 dan selisih nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^{m+1}$ dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)^m$ mendekati 0, dengan m adalah banyaknya iterasi (Asianingrum dkk., 2020).

1.5.10 Indeks Ketahanan Pangan

Ketahanan pangan merupakan kondisi terpenuhinya pangan bagi negara sampai dengan perseorangan yang tercermin dari ketersediaan pangan yang cukup baik dalam jumlah maupun mutu, aman, bergizi, merata, dan terjangkau serta tidak bertentangan dengan agama, keyakinan, dan budaya masyarakat untuk dapat hidup aktif, sehat, dan produktif secara berkelanjutan (Senjawati dan Azizah, 2024). Oleh karena itu, ketahanan pangan memiliki peranan yang sangat penting dalam pemenuhan kebutuhan pangan tiap individu dan memiliki hubungan yang erat dengan kehidupan serta kesejahteraan masyarakat (Pujiati dkk., 2020). Menurut

Rhofita (2022) apabila suatu negara memiliki ketahanan pangan yang kuat dan mampu mencukupi kebutuhan pangan nasional maka secara swasembada negara tersebut akan memiliki ketahanan nasional yang kuat. Terdapat suatu indeks penilaian yang dapat mengetahui tingkat ketahanan pangan pada suatu wilayah yang disebut dengan Indeks Ketahanan Pangan (IKP).

Menurut *World Health Organization* (WHO), IKP mencakup berbagai faktor pendukung yang memengaruhi ketahanan pangan, antara lain ketersediaan, keterjangkauan, dan pemanfaatan pangan. Berdasarkan ketiga faktor tersebut, Badan Pangan Nasional menentukan sembilan indikator yang digunakan untuk mengukur ketahanan pangan di suatu wilayah (Azhar dkk., 2023). Indikator yang digunakan pada aspek ketersediaan, yaitu: rasio konsumsi normatif per kapita terhadap produksi bersih. Selanjutnya, indikator aspek keterjangkauan, yaitu: persentase penduduk miskin, persentase rumah tangga dengan proporsi pengeluaran untuk pangan lebih dari 65% terhadap total pengeluaran, dan persentase rumah tangga tanpa akses listrik. Kemudian, untuk indikator pada aspek pemanfaatan pangan, yaitu: rata-rata lama sekolah perempuan di atas 15 tahun, persentase rumah tangga tanpa akses ke air bersih, rasio jumlah penduduk per tenaga kesehatan terhadap tingkat kepadatan penduduk, persentase balita *stunting*, dan angka harapan hidup pada saat lahir.

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang bersumber dari publikasi “Indeks Ketahan Pangan” dan “Peta Ketahanan dan Kerentanan Pangan (FSVA)” yang diterbitkan oleh Badan Pangan Nasional dalam kurung waktu 2018-2022. Unit pengamatan yang digunakan adalah tingkat kabupaten/kota di Sulawesi Selatan yang terdiri dari 24 kabupaten/kota.

2.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas variabel respon Indeks Ketahanan Pangan (IKP) dan tujuh variabel prediktor yang diduga memengaruhi IKP di setiap kabupaten/kota di Provinsi Sulawesi Selatan. Variabel yang digunakan disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Definisi
Y	Indeks Ketahanan Pangan (IKP)	IKP merupakan suatu indeks penilaian untuk mengetahui tingkat ketahanan pangan suatu wilayah
X_1	Rasio konsumsi normatif per kapita terhadap produksi bersih	Rasio konsumsi normatif per kapita terhadap produksi bersih serealia dan umbi-umbian (padi, jagung, ubi kayu, ubi jalar, dan sagu), serta stok beras pemerintah daerah
X_2	Persentase penduduk yang hidup di bawah garis kemiskinan	Penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita perbulan lebih rendah dari garis kemiskinan
X_3	Persentase rumah tangga dengan proporsi pengeluaran untuk pangan lebih dari 65% terhadap total pengeluaran	Rumah tangga dengan proporsi pengeluaran untuk makanan lebih dari 65% dibandingkan dengan total pengeluaran (makanan dan non makanan) rumah tangga
X_4	Persentase rumah tangga tanpa akses listrik	Rumah tangga yang tidak memiliki akses terhadap listrik dari PLN dan/atau non PLN misalnya generator
X_5	Persentase rumah tangga tanpa akses ke air bersih	Rumah tangga yang menggunakan sumber utama air untuk minum berasal dari sumber tak terlindung, air permukaan, air hujan, dan lainnya dengan jarak kurang dari 10 meter ke jamban

Variabel	Keterangan	Definisi
X_6	Angka harapan hidup pada saat lahir	Perkiraan lama hidup rata-rata bayi baru lahir dengan asumsi tidak ada perubahan pola mortalitas sepanjang hidupnya
X_7	Persentase balita dengan tinggi badan di bawah standar (*stunting*)	Anak di bawah lima tahun yang tinggi badannya kurang dari -2 Standar Deviasi (-2 SD) dengan indeks tinggi badan menurut umur (TB/U) dari referensi khusus untuk tinggi badan terhada usia dan jenis kelamin

2.3 Metode Analisis

Metode analisis yang dilakukan dalam penelitian ini adalah *Robust Mixed Geographically and Temporally Weighted Regression* menggunakan M-*Estimator*. Pengolahan data dilakukan dengan *sofware R*. Tahapan analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Melakukan eksplorasi data dengan menggunakan peta sebaran nilai IKP setiap kabupaten/kota.
2. Menghitung nilai *Variance Inflaction Factor* (VIF) untuk mengetahui multikolinearitas pada setiap variabel prediktor.

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

   dengan R_j^2 adalah nilai koefisien determinan antar variabel prediktor.
3. Mengidentifikasi efek heterogenitas spasial menggunakan uji *Breusch-Pagan* berdasarkan Persamaan (2.3). Hipotesis yang digunakan yaitu:

   $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ (tidak terdapat heterogenitas spasial)

   $H_1 :$ ada $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ dengan $i \neq j$ (terdapat heterogenitas spasial)

   Kriteria uji yang digunakan adalah tolak H_0 pada taraf signifikansi α jika nilai $BP > \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau jika $p - value < \alpha$.
4. Menentukan variabel global dan variabel lokal menggunakan selang kepercayaan untuk masing-masing parameter dari model regresi global. Kriteria pemilihan variabel global dilakukan apabila minimal 70% koefisien GTWR berada dalam selang kepercayaan (Pongoh dkk., 2015).
5. Analisis Model MGTWR
   1) Penentuan parameter rasio spasial temporal (τ)
      a. Menentukan nilai bandwidth spasial optimum berdasarkan nilai CV yang minimum.
      b. Menentukan fungsi pembobot dengan mennggunakan pembobot *exponential.*

$$w_j(u_i, v_i) = \exp\left[-\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)\right] \quad dengam\ i, j = 1,2, \dots, n$$

c. Menghitung penduga parameter GTWR.

d. Menghitung $\hat{y}_{\neq i}(\tau) = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i, t_i)$ menggunakan nilai τ dengan tidak memasukkan lokasi amatan ke-i.

e. Meminimumkan nilai *cross validation* berdasarkan τ dengan rumus

$$CV(\tau) = \sum_{i=1}^{n} [y_{=i} - \hat{y}_{\neq i}(\tau)]^2$$

2) Penentuan parameter spasial (λ) dan parameter (μ)

a. Menentukan fungsi pembobot spasial-temporal dengan menggunakan pembobot *exponential.*

b. Menghitung penduga parameter GTWR .

c. Menghitung $\hat{y}_{\neq i}(\lambda) = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i, t_i)$ menggunakan nilai λ dengan tidak memasukkan lokasi amatan ke-i.

d. Meminimumkan nilai *cross validation* berdasarkan λ dengan rumus

$$CV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} [y_{=i} - \hat{y}_{\neq i}(\lambda)]^2$$

3) Penentuan *bandwidh* optimum h_{ST}

a. Menentukan jarak lokasi amatan dan waktu dengan rumus

$$\left(d_{ij}^{ST}\right)^2 = \lambda\left(d_{ij}^{S}\right)^2 + \mu\left(d_{ij}^{T}\right)^2$$

b. Menentukan fungsi pembobot spasial-temporal dengan menggunakan pembobot *exponential.*

c. Menghitung penduga parameter GTWR.

d. Menghitung $\hat{y}_{\neq i}(h_{ST}) = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i, t_i)$ menggunakan nilai h_{ST} dengan tidak memasukkan lokasi amatan ke-i.

e. Meminimumkan nilai *cross validation* berdasarkan h_{ST} dengan rumus

$$CV(h_{ST}) = \sum_{i=1}^{n} [y_{=i} - \hat{y}_{\neq i}(h_{ST})]^2$$

4) Menghitung estimasi parameter global dan lokal model MGTWR.

6. Melakukan deteksi pencilan menggunakan *Boxplot* (diagram kotak garis) dan RW-BP.

7. Analisis RMGTWR dengan M-*Estimator* untuk tiap lokasi dan waktu

1) Menghitung nilai residual $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{y}$

2) Menghitung nilai $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ menggunakan rumus

$$\hat{\sigma} = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}$$

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}}$$

3) Menghitung nilai bobot (b_i) dengan menggunakan fungsi pembobot *Tukey* dengan nilai *tuning constanta* $c = 4.685$.

$$b_i = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_i^*}{c}\right)^2\right)^2, & |\varepsilon_i^*| \le c \\ 0, & |\varepsilon_i^*| > c \end{cases}$$

4) Menghitung penduga parameter yang telah diboboti fungsi pembobot *Tukey.*

5) Ulangi langkah (1) hingga (4) sampai didapat $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{m}}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{t_i})^{\boldsymbol{m}}$ yang konvergen.

8. Pengujian parsial untuk tiap parameter RMGTWR

1) Pengujian signifikansi parameter global dengan hipotesis
$H_0 : \beta_k = 0$ (variabel global x_k tidak signifikan)
$H_1 : \beta_k \neq 0$ (variabel global x_k signifikan)
Menghitung t_g hitung pada setiap amatan dengan rumus:

$$t_g = \frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_g}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\sqrt{g_{kk}}}$$

dengan g_{kk} adalah elemen diagonal ke-k dari matriks $\boldsymbol{GG}^T$

$$\boldsymbol{G} = \left[\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{X}_g\right]^{-1}\boldsymbol{X}_g^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_l)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{Y}}{tr\big((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\big)}$$

Tolak H_0 jika $\left|t_{g_{hit}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2},df}$, dengan $df = \left[\frac{u_1^2}{u_2}\right]$ dan $u_i = tr([(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})^T$ $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})]^i)$, $i = 1,2$.

2) Pengujian signifikansi parameter lokal dengan hipotesis
$H_0 : \beta_l(u_i, v_i, t_i) = 0$ (variabel lokal x_i pada lokasi ke-i tidak signifikan)
$H_1 : \beta_l(u_i, v_i, t_i) \neq 0$ (variabel lokal x_i pada lokasi ke-i signifikan)
Menghitung t_l hitung pada setiap amatan dengan rumus:

$$t_l = \frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_l(u_i, v_i, t_i)}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\sqrt{m_{kk}}}$$

dengan m_{kk} adalah elemen diagonal ke-k dari matriks $\boldsymbol{MM}^T$

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{l}}]^{-1}\boldsymbol{X}_l^T\boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}_g\boldsymbol{G}\big)$$

Tolak H_0 jika $\left|t_{l_{hit}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2},df}$, dengan $df = \left[\frac{u_1^2}{u_2}\right]$ dan $u_i = tr([(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})^T$ $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})]^i)$, $i = 1,2$.

9. Pengujian kebaikan model RMGTWR dengan menghitung nilai R^2 dan nilai *Akaike Information Criteria* (AIC) dengan rumus:

$$R^2 = 1 - \frac{JKG}{JKT} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

$$AIC = 2n\,ln(\hat{\sigma}) + 2n\,ln(\pi) + n\left[\frac{n + tr(S)}{n - 2 - tr(S)}\right]$$

10. Melakukan interpretasi model.