

**OPTIMALISASI RETENSI PERUSAHAAN ASURANSI
DENGAN PENERAPAN SIMULASI MONTE CARLO UNTUK
REASURANSI STOP-LOSS**

SKRIPSI



NAJWAH GOGOT

H081201022

**PROGRAM STUDI ILMU AKTUARIA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MARET 2024**

**OPTIMALISASI RETENSI PERUSAHAAN ASURANSI
DENGAN PENERAPAN SIMULASI MONTE CARLO UNTUK
REASURANSI STOP-LOSS**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Aktuaria pada Program Studi Ilmu Aktuaria Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

NAJWAH GOGOT

H081201022

**PROGRAM STUDI ILMU AKTUARIA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

MARET 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

OPTIMALISASI RETENSI PERUSAHAAN ASURANSI DENGAN PENERAPAN SIMULASI MONTE CARLO UNTUK REASURANSI STOP- LOSS

adalah karya tulisan saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 19 Maret 2024



Najwah Gogot

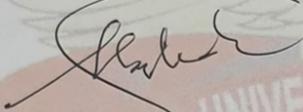
H081201022

**OPTIMALISASI RETENSI PERUSAHAAN ASURANSI
DENGAN PENERAPAN SIMULASI MONTE CARLO UNTUK
REASURANSI STOP-LOSS**

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama


Mauliddin, S.Si., M.Si.

NIP. 198308052015031005


Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si.

NIP. 199301152021074001

Pada 19 Maret 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Najwah Gogot

NIM : H081201022

Program Studi : Ilmu Aktuaria

Judul Skripsi : Optimalisasi Retensi Perusahaan Asuransi dengan Penerapan Simulasi Monte Carlo untuk Reasuransi Stop-Loss

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Aktuaria pada Program Studi Ilmu Aktuaria Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

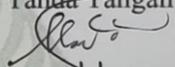
Ketua : Mauliddin, S.Si., M.Si.

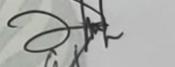
Sekretaris : Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si.

Anggota : Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si.

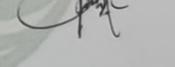
Anggota : Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.

Tanda-Tangan

()

()

()

()

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 19 Maret 2024



HALAMAN PENGESAHAN

**OPTIMALISASI RETENSI PERUSAHAAN ASURANSI DENGAN
PENERAPAN SIMULASI MONTE UNTUK REASURANSI STOP-LOSS**

Disusun dan diajukan oleh

NAJWAH GOGOT

H081201022

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Ilmu Aktuaria Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

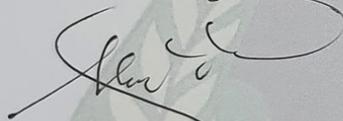
Pada tanggal, 19 Maret 2024

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

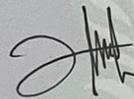
Menyetujui,

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama



Mauliddin, S.Si., M.Si.
NIP. 198308052015031005



Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si.
NIP. 199301152021074001

Kepala Program Studi



Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.
NIP.196412311990032007



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena dengan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Optimalisasi Retensi Perusahaan Asuransi dengan Penerapan Simulasi Monte Carlo untuk Reasuransi *Stop-Loss*”.

Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai tugas akhir untuk memenuhi syarat dalam menyelesaikan Pendidikan strata satu (S1) Sarjana Sains di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Banyak hikmah dan pengalaman berharga yang dapat menjadi pelajaran bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Ayahanda **Gogot Sugiawan**, dan ibunda **Latifah**, sebagai orang tua penulis yang selalu memberikan doa, dukungan, dan kasih sayang yang tak terhingga. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan hingga pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terimakasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku rektor Universitas Hasanuddin Makassar.
2. Bapak **Dr. Eng Amiruddin, M.Si.**, selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta staff yang telah membantu dan mengarahkan penulis dalam berbagai hal dalam urusan akademik maupun administrasi.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
4. Ibu **Prof. Hasmawati, M.Si.**, selaku Ketua Program Studi Ilmu Aktuaria sekaligus Penasehat Akademik dan Pembimbing Utama penulis yang senantiasa membantu dan memberikan arahan selama masa studi penulis

hingga penyusunan skripsi.

5. Bapak **Mauliddin, S.Si., M.Si.**, selaku Pembimbing Utama penulis yang senantiasa membantu dan memberikan arahan selama masa studi penulios hingga penyusunan skripsi.
6. Ibu **Ainun Mawaddah Abdal, S.Si., M.Si.**, selaku Pembimbing Pertama penulis yang senantiasa membantu dan memberikan arahan selama masa studi penulios hingga penyusunan skripsi.
7. Dosen Penguji, Bapak **Edy Saputra Rusdi, S.Si., M.Si.**, dan Bapak **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.**, yang telah meluangkan waktunya sejak seminar proposal hingga sidang skripsi untuk memberikan saran dan masukan dalam proses penulisan skripsi penulis.
8. Bapak/Ibu Dosen Program Studi Ilmu Aktuaria yang telah mendidik dan memberikan ilmunya kepada penulis selama proses perkuliahan. Serta kepada staf dan pegawai Departemen Matematika yang telah membantu dalam proses administrasi.
9. Keluarga dari Ibunda dan Ayahanda yang memberikan doa, dukungan, nasehat dan semangat selama masa perkuliahan hingga selesainya penulisan skripsi.
10. Sahabat “DomRoom” yang selalu memberikan dukungan, doa, dan semangat satu sama lain, selama perkuliahan hingga selesainya penulisan skripsi
11. Seluruh teman-teman program studi Ilmu Aktuaria Angkatan 2020 yang senantiasa memberikan bantuan, semangat dan dukungan selama perkuliahan hingga selesainya penulisan skripsi.
12. Teman-teman perjuangan KKNT BPJS Ketenagakerjaan Kecamatan Ujung Tanah yang senantiasa memberi semangat dan dukungan dalam proses pengabdian masyarakat.
13. Sahabat Penulis, **Annisa Utami Islami** yang telah kebersamai penulis selama masa studi sarjana.
14. Terakhir, Saya ingin berterima kasih kepada diri saya sendiri telah melewati banyak hal dalam proses perkuliahan, penyusunan hingga selesainya skripsi ini.

Penulis menyadari penyusunan skripsi ini jauh dari kata sempurna karena keterbatasan kemampuan dan ilmu pengetahuan yang dimiliki oleh penulis. Oleh karena itu atas kesalahan dan kekurangan dalam penulisan skripsi ini, penulis memohon maaf dan bersedia menerima kritikan dan saran yang membangun.

Akhir kata, penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 26 Februari 2024



Najwah Gogot

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Najwah Gogot
Nim : H081201022
Program Studi : Ilmu Aktuaria
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Optimalisasi Retensi Perusahaan Asuransi dengan Penerapan Simulasi Monte Carlo untuk Reasuransi Stop-Loss

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar

Pada Tanggal 19 Maret 2024

Yang menyatakan



Najwah Gogot

ABSTRAK

Risiko merupakan bagian tak terpisahkan dari kehidupan manusia, dan pengelolaannya menjadi faktor krusial dalam menjaga kelangsungan operasional perusahaan asuransi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengoptimalkan retensi klaim Asuransi Umum Indonesia menggunakan penerapan simulasi Monte Carlo berdasarkan besar klaim bruto dengan memanfaatkan data dari laporan laba rugi komprehensif Asuransi Umum Indonesia dari Januari 2019 hingga Desember 2022. Proses pengumpulan data dilakukan melalui metode dokumentasi dengan mengumpulkan informasi dari situs web resmi Otoritas Jasa Keuangan. Hasil analisis menunjukkan bahwa distribusi kepadatan peluang klaim memiliki kemiripan dengan distribusi normal, dengan adanya skewness positif yang menunjukkan fokus pada nilai klaim yang lebih rendah dan beberapa nilai klaim yang tinggi. Simulasi Monte Carlo digunakan untuk memprediksi klaim bruto dengan iterasi 1000 kali untuk setiap bulan dalam setahun. Hasilnya membantu menentukan nilai retensi klaim optimal untuk nilai toleransi kerugian 1%, 5%, dan 10%, masing-masing adalah Rp1.057.182.000.000, Rp1.600.009.000.000, dan Rp1.882.470.000.000. Penelitian ini memperkuat urgensi perhitungan retensi yang optimal dalam upaya mengelola risiko perusahaan asuransi secara efisien, serta menggarisbawahi keterkaitan yang erat antara perusahaan asuransi dengan reasuransi dalam mengelola risiko secara komprehensif.

Kata Kunci: Risiko, Retensi, Simulasi Monte Carlo

Judul : Optimalisasi Retensi Perusahaan Asuransi dengan Penerapan Simulasi Monte Carlo untuk Reasuransi Stop-Loss
Nama : Najwah Gogot
NIM : H081201022
Program Studi : Ilmu Aktuaria

ABSTRACT

Risk is an inseparable part of human life, and its management is crucial in ensuring the operational continuity of insurance companies. This study aims to optimize the retention of claims in Indonesian General Insurance using Monte Carlo simulation based on gross claim size utilizing data from the comprehensive profit and loss statement of Indonesian General Insurance from January 2019 to December 2022. Data collection was conducted through documentation methods by gathering information from the official website of the Financial Services Authority. The analysis results indicate that the density distribution of claims bears similarity to a normal distribution, with positive skewness indicating a focus on lower claim values and some higher claim values. Monte Carlo simulation is employed to predict gross claims with 1000 iterations for each month over a year. The results assist in determining the optimal retention values for loss tolerances of 1%, 5%, and 10%, which are Rp1,057,182,000,000, Rp1,600,009,000,000, and Rp1,882,470,000,000, respectively. This research underscores the importance of optimal retention calculations in efficiently managing the risks of insurance companies' risks and highlighting the close relationship between insurance companies and reinsurance in comprehensive risk management.

Keywords: *Risk, Retention, Monte Carlo Simulation*

Title : *Optimizing Insurance Company Retention by
Implementing Monte Carlo Simulation for Stop-Loss
Reinsurance*

Name : *Najwah Gogot*

Student ID : *H081201022*

Study Program : *Actuarial Science*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	vi
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR.....	ix
ABSTRAK	x
ABSTRACT	xi
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR NOTASI	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	6
2.1 Asuransi	6
2.1.1 Jenis Asuransi	6
2.2 Reasuransi.....	7
2.3 Distribusi Normal	8
2.4 Penaksiran Maximum Likelihood Estimation	10
2.5 Simulasi Monte Carlo	12
2.6 <i>Value at Risk</i>	12
2.7 Retensi Optimal pada Reasuransi <i>Stop-Loss</i>	13
BAB III METODE PENELITIAN	18
3.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian	18
3.2 Waktu dan Tempat Penelitian.....	18
3.3 Objek Penelitian.....	18

3.4	Jenis dan Sumber Data.....	18
3.5	Metode Pengumpulan Data	19
3.6	Teknik Analisis Data	19
3.7	Alur Kerja	20
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....		21
4.1	Hasil	21
4.2	Pembahasan dan Hasil Analisis Data.....	31
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		33
5.1	Kesimpulan.....	33
5.2	Saran.....	34
DAFTAR PUSTAKA.....		35
LAMPIRAN.....		38

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Tabel Laporan Klaim Asuransi Umum Indonesia	21
Tabel 4.2 Simulasi Monte Carlo pada Data Klaim Asuransi Umum Indonesia	25
Tabel 4.3 Retensi Optimal dan Risiko Reasuransi untuk Nilai Toleransi kerugian 1%.....	30
Tabel 4.4 Retensi Optimal dan Risiko Reasuransi untuk Nilai Toleransi kerugian 5%.....	30
Tabel 4.5 Retensi Optimal dan Risiko Reasuransi untuk Nilai Toleransi kerugian 10%.....	31

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Alur Kerja	20
Gambar 4.1 Grafik Fungsi Padat Peluang Data Klaim Asuransi Umum Indonesia	23
Gambar 4.2 Grafik Fungsi Survival Data Klaim Asuransi Umum Indonesia	24

DAFTAR NOTASI

<u>Notasi</u>	<u>Keterangan</u>
$f(x; \mu, \sigma^2)$: Fungsi kepadatan peluang distribusi normal
$E(X)$: Nilai rata-rata fungsi kepadatan peluang distribusi normal
$Var(X)$: Nilai variansi fungsi kepadatan peluang distribusi normal
$L(\theta)$: Fungsi <i>Likelihood</i>
$l(\mu, \sigma)$: Fungsi log-likelihood
X	: Peubah acak kerugian
$VaR_x(a)$: Nilai terbesar (atau batas) kerugian potensial yang mungkin terjadi dalam suatu periode tertentu dengan tingkat kepercayaan a
X_I	: Risiko yang ditanggung oleh asuradur
X_R	: Risiko yang ditanggung oleh reasuradur
d	: Besaran retensi
$\delta(d)$: Premi reasuransi
ρ	: Nilai dari faktor <i>loading</i>
$E(X_R)$: Nilai harapan dari risiko reasuradur
T	: Total risiko
$VaR_{X_I}(d, a)$: Nilai minimum kerugian perusahaan asuransi pada tingkat kepercayaan a dan nilai retensi d
$VaR_T(d, a)$: Nilai minimum total kerugian perusahaan asuransi pada tingkat kepercayaan a dan nilai retensi d
$VaR_T(d^*, a)$: Total kerugian yang paling minimum
d^*	: Retensi optimal yang meminimumkan nilai $VaR_T(d^*, a)$
$S_{X_I}(x)$: Total kerugian yang paling minimum

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Risiko merupakan sebuah hal yang tidak akan pernah lepas dari kehidupan semua manusia. Risiko melekat pada semua aspek kehidupan dan aktivitas manusia, dari urusan pribadi, organisasi, perusahaan sampai pemerintahan, dari urusan gaya hidup sampai pola penyakit, dari bangun sampai tidur malam dan masih banyak lagi (Arifudin et al., 2020). Risiko dapat didefinisikan sebagai ketidakpastian yang berkaitan dengan hasil suatu kejadian atau tindakan yang dapat memiliki dampak positif atau negatif. Dalam konteks ini, risiko mengacu pada kemungkinan kerugian atau kerusakan yang tidak terduga. Kejadian-kejadian, seperti kecelekaan, bencana alam, penyakit, atau kerusakan properti, dapat menyebabkan dampak finansial yang serius bagi individu, keluarga, atau bisnis.

Risiko ini sering kali tidak dapat dihindari sepenuhnya, tetapi dapat dikelola, dikendalikan, dan bahkan diminimalkan melalui berbagai strategi penanggulangan. Asuransi merupakan upaya antisipasi mengatasi kehidupan di dunia yang penuh dengan ketidakpastian dan penuh risiko (Ridwan, 2016). Asuransi merupakan suatu perjanjian antara dua belah pihak, yaitu perusahaan asuransi dan pihak tertanggung yang disebut dengan nasabah. Perjanjian ini disebut sebagai polis asuransi. Dalam perjanjian ini pembayaran premi dilakukan oleh nasabah untuk mendapatkan perlindungan finansial terhadap risiko tertentu. Melalui asuransi, nasabah atau pemegang polis mendapatkan jaminan bahwa jika risiko yang mereka tanggung terjadi, perusahaan asuransi akan membayar klaim sesuai dengan ketentuan kontrak.

Dalam konteks perusahaan asuransi, risiko adalah elemen sentral yang mempengaruhi keseluruhan operasi bisnis mereka. Perusahaan asuransi memiliki kewajiban untuk membayar klaim kepada nasabah jika risiko yang dijamin terjadi. Oleh karena itu, pengelolaan risiko menjadi inti dari keberhasilan perusahaan asuransi. Perusahaan asuransi perlu memahami dengan baik risiko yang mereka

tanggung, mengukur eksposur risiko dengan tepat, dan mengembangkan strategi pengelolaan risiko yang efektif.

Cara mengelola risiko ini menjadi krusial dalam menjaga keberlanjutan perusahaan asuransi. Salah satu instrumen yang digunakan untuk mengelola risiko ini adalah reasuransi, yaitu suatu mekanisme di mana perusahaan asuransi mentransfer sebagian risiko yang mereka tanggung kepada perusahaan reasuransi. Reasuransi membantu perusahaan asuransi mengurangi eksposur mereka terhadap risiko yang berlebihan dan memastikan bahwa mereka memiliki kapasitas keuangan yang cukup untuk membayar klaim yang diajukan oleh pemegang polis.

Ada dua jenis utama reasuransi, yaitu *treaty* dan fakultatif. Reasuransi *treaty* adalah perjanjian yang umumnya tetap antara perusahaan asuransi dan perusahaan reasuransi. Reasuransi *treaty* dapat dilakukan secara proporsional atau non proporsional. Berdasarkan perjanjian reasuransi ini untuk risiko yang akan dialihkan perusahaan asuransi kepadanya mencakup risiko secara keseluruhan atau sebagian besar portofolio asuransi perusahaan sehingga terdapat kepastian dukungan reasuransi untuk setiap risiko yang ditanggung perusahaan asuransi. Disisi lain, reasuransi fakultatif merupakan perjanjian kasus per kasus di mana perusahaan asuransi memutuskan apakah akan mentransfer risiko tertentu kepada perusahaan reasuransi. Perjanjian reasuransi fakultatif biasanya digunakan untuk menutup risiko-risiko yang belum ditanggung dalam perjanjian reasuransi *treaty*.

Kontrak reasuransi *stop-loss* atau yang disebut juga *excess of loss ratio* adalah kontrak reasuransi non proporsional yang memberikan suatu jaminan kepada pemberi sesi atas kerugian yang melebihi jumlah kerugian yang diperjanjikan untuk jenis kelas tertentu. Seperti yang layaknya terjadi pada jenis kontrak-kontrak reasuransi lainnya, tanggung jawab penanggung ulang juga terbatas pada suatu limit (Ariah, 2008). Jika klaim melebihi retensi, maka perusahaan reasuransi membayar sebagian kerugian tersebut, membantu perusahaan asuransi melindungi diri dari risiko besar. Pada peraturan Otoritas Jasa Keuangan Nomor 14/POJK.05/2015 tentang retensi sendiri dan sukungan reasuransi dalam negeri bahwa perusahaan asuransi wajib memiliki dan menetapkan retensi sendiri. Pentingnya mengestimasi

retensi yang optimal dilakukan untuk mencari keseimbangan antara melindungi diri dari risiko besar dan memaksimalkan keuntungan.

Simulasi Monte Carlo merupakan salah satu instrumen dalam pengelolaan risiko. Monte Carlo adalah teknik simulasi yang dapat digunakan sebagai alat prediksi. Metode Monte Carlo adalah metode analisis numerik yang melibatkan pengambilan sampel eksperimental acak. Model simulasi Monte Carlo adalah suatu bentuk simulasi probabilistik di mana solusi suatu masalah diberikan berdasarkan proses pengacakan, Proses acak ini mencakup distribusi probabilitas variabel data yang dikumpulkan dan probabilitas teoritis distribusi. Angka acak digunakan untuk menggambarkan kejadian acak dan berurutan mengikuti perubahan yang terjadi pada proses simulasi (Hasugian et al., 2022). Dalam konteks perusahaan asuransi, di mana ketidakpastian dan fluktuasi besar klaim merupakan tantangan utama, perusahaan asuransi dapat menggunakan metode ini dalam mengembangkan strategi pengelolaan risiko dan mengurangi potensi kerugian dengan estimasi risiko yang akurat dalam penentuan retensi optimal.

Pemahaman mendalam tentang metode optimasi retensi ini akan memberikan manfaat besar bagi industri asuransi. Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan maka penulis tertarik untuk meneliti terkait optimalisasi retensi perusahaan asuransi dengan judul masalah **“Optimalisasi Retensi Perusahaan Asuransi dengan Penerapan Simulasi Monte Carlo untuk Reasuransi *Stop-Loss*”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana simulasi Monte Carlo dapat membantu dalam menentukan retensi optimal perusahaan asuransi?
2. Berapa retensi optimal perusahaan asuransi dalam konteks reasuransi *stop-loss* menggunakan simulasi Monte Carlo?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan, tujuan penelitian yang dapat dirumuskan adalah:

1. Menghasilkan berbagai skenario klaim melalui simulasi Monte Carlo yang mencakup berbagai kemungkinan hasil
2. Memperoleh nilai retensi optimal perusahaan asuransi dalam konteks reasuransi *stop-loss* menggunakan simulasi Monte Carlo.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi perusahaan asuransi dapat membantu perusahaan dalam pengambilan keputusan yang lebih baik terkait reasuransi dan retensi risiko. Dengan memahami kontribusi retensi yang optimal, mereka dapat mengelola risiko dengan lebih efisien dan mengoptimalkan laba bersih.
2. Bagi perusahaan reasuransi dapat menjadi masukan untuk memahami lebih baik risiko yang dihadapi oleh perusahaan asuransi yang mereka tanggung.
3. Bagi peneliti selanjutnya dapat memanfaatkan penelitian ini sebagai landasan untuk penelitian lebih lanjut atau pengembangan metodologi.

1.5 Batasan Penelitian

Adapun batasan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Penelitian ini terbatas pada data sekunder yang diperoleh dari sumber yang tersedia yaitu data klaim bruto dari laporan laba rugi komprehensif periode tahun 2019-2022 yang dipublikasikan oleh Otoritas Jasa Keuangan (OJK).
2. Penelitian ini menggunakan metode *Value at Risk* (VaR) dan simulasi Monte Carlo dalam mengoptimalkan retensi.
3. Fokus penelitian ini adalah pada asuransi umum, sehingga tidak mencakup asuransi jiwa atau jenis asuransi lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi uraian penjelasan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi uraian penjelasan tentang definisi dan konsep menurut para ahli yang menjadi dasar dari penelitian, meliputi paparan teori.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi uraian penjelasan tentang Pendekatan dan Jenis Penelitian, Waktu dan Tempat Penelitian, Objek Penelitian, Jenis dan Sumber Data, Metode Pengumpulan Data dan Alur Kerja.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi uraian penjelasan tentang hasil penelitian setelah proses penelitian dilakukan. Bagian ini mencakup gambaran umum tentang objek penelitian, hasil analisis data, hasil perhitungan statistik, dan proses pembahasannya.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi uraian penjelasan tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan. Kesimpulan tersebut akan disusun berdasarkan analisis data, tinjauan pustaka, dan pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Asuransi

Asuransi merupakan salah satu bentuk pengalihan risiko. Pertimbangan yang timbul dalam pengambilan keputusan terkait bentuk penanggulangan risiko didasarkan pada apakah risiko yang teridentifikasi akibat ketidakpastian tersebut dapat dicegah, dihindari, ditanggung sendiri atau harus dialihkan kepada pihak lain (Ganie *et al.*, 2023). Berdasarkan Kamus Besar Bahasa Indonesia, asuransi merupakan pertanggungan (perjanjian antara dua pihak, pihak yang satu berkewajiban memberikan jaminan sepenuhnya kepada pembayar iuran apabila terjadi sesuatu yang menimpa pihak pertama atau barang miliknya sesuai dengan perjanjian yang dibuat). Menurut Badrul & Dewi (2022) perusahaan asuransi merupakan lembaga keuangan nonbank yang mempunyai peranan yang tidak jauh berbeda dari bank, yaitu bergerak dalam bidang layanan jasa yang diberikan kepada masyarakat dalam mengatasi risiko yang akan terjadi dimasa yang akan datang. Keberadaan asuransi diharapkan dapat memberikan ketenangan bagi masyarakat terhadap kekhawatiran mereka pada ketidakpastian yang tidak diinginkan dimasa mendatang bagi dirinya ataupun hartanya.

2.1.1 Jenis Asuransi

Dalam Undang - Undang No. 40 Tahun 2014 Tentang Perasuransian, memuat dua macam bentuk asuransi, yaitu:

1. Usaha Asuransi Umum, yang merupakan usaha jasa pertanggungan risiko yang memberikan penggantian kepada tertanggung atau pemegang polis karena kerugian, kerusakan, biaya yang timbul, kehilangan keuntungan, atau tanggung jawab hukum kepada pihak ketiga yang mungkin diderita tertanggung atau pemegang polis karena terjadinya suatu peristiwa yang tidak pasti.
2. Usaha Asuransi Jiwa, merupakan suatu usaha yang menyelenggarakan jasa penanggulangan risiko yang memberikan pembayaran kepada pemegang polis, tertanggung, atau pihak lain yang berhak dalam hal tertanggung meninggal dunia atau tetap hidup, atau pembayaran lain kepada pemegang

polis, tertanggung, atau pihak lain yang berhak pada waktu tertentu yang diatur dalam perjanjian, yang besarnya telah ditetapkan dan/atau didasarkan pada hasil pengelolaan dana.

Kedua jenis asuransi di atas, pada dasarnya bertolak pada prinsip kerja sama dan saling membantu. Asas kerja sama yang dimaksud, dan saling membantu dalam asuransi secara operasional diterjemahkan sebagai perjanjian di antara penanggung (perusahaan asuransi) dan tertanggung (peserta asuransi), yaitu penanggung menerima premi dari tertanggung untuk mendapatkan pertanggungan bila tertanggung mengalami kerugian yang disebabkan oleh peristiwa yang tidak pasti atau penanggung memberikan suatu pembayaran yang didasarkan atas meninggal atau hidupnya seseorang (Ali, 2023).

2.2 Reasuransi

Kata reasuransi berasal dari bahasa Belanda, yaitu *reasantie*. Awalan kata penambahan *re* di depan menunjukkan suatu pengulangan, sehingga reasuransi dapat dikatakan sebagai kegiatan mengasuransikan kembali asuransi yang telah diterima (Parera, 2021). Reasuransi juga dikenal dengan nama *reinsurance* dalam bahasa Inggris, *reversechering* dalam bahasa Belanda, dan *rucherseherung* dalam bahasa Jerman (Adhitama, 2009). Reasuransi dapat dilihat sebagai suatu mekanisme atau suatu proses kerjasama antara dua penanggung atau lebih dalam kegiatan membagi risiko. Pengertian reasuransi ditinjau dari aspek teknis dapat dilihat dari dua pengertian di bawah ini (Safri Ayat, 2000):

- a. Menurut G.F. Michelbacher, reasuransi adalah suatu proses penyertaan asuradur lain dalam suatu perjanjian asuransi antara tertanggung dengan penanggung, dimana penanggung lain tersebut disebut dengan asuradur.
- b. Menurut Cockerell H.A.L, reasuransi adalah suatu sistem yang dipergunakan oleh penanggung untuk memberikan seluruh atau sebagian asuransi yang telah diterimanya kepada penanggung lain yang disebut dengan penanggung selang atau reasuradur.

Berdasarkan dua pengertian di atas, dapat disimpulkan bahwa reasuransi adalah proses atau sistem dimana penanggung asuransi mengalihkan sebagian atau seluruh risiko yang mereka terima kepada penanggung lain yang disebut dengan reasuradur.

Reasuransi memiliki beberapa jenis perlindungan, yaitu fakultatif dan *treaty*. Fakultatif adalah reasuransi yang memiliki keleluasaan memilih reasuransi yang menjadi tanggungannya. Begitu pula pihak perusahaan reasuransi berhak menerima atau menolak bentuk asuransi ulang dari penanggung polis. Sementara itu, reasuransi *treaty* adalah bentuk reasuransi yang dilakukan dengan cara melakukan kesepakatan antara penanggung (*ceding company*) dengan pihak perusahaan reasuransi yang dalam hal ini adalah reasuradur (Parera, 2021).

Reasuransi *treaty* dibagi menjadi dua jenis, yaitu proporsional dan non proporsional. *Stop-Loss* atau *Excess of Loss Ratio* merupakan salah satu kategori reasuransi *treaty*. *Stop-Loss* adalah jenis reasuransi dimana dasar penentuan kewajiban perusahaan asuransi dan perusahaan reasuransi dinyatakan dalam bentuk perbandingan persentase antara pendapatan premi dan klaim (*loss ratio*). *Loss Ratio* merupakan perbandingan antara klaim yang terjadi dengan premi yang diterima dalam jangka waktu tertentu, kewajiban perusahaan reasuransi dalam perjanjian ini adalah jika *loss ratio* perusahaan asuransi telah melebihi *loss ratio* yang telah ditentukan sebelumnya (Amalia, 2022).

2.3 Distribusi Normal

Distribusi normal yang disebut juga dengan kurva lonceng atau distribusi Gaussian, adalah sebuah distribusi probabilitas kontinu (Ross, 2015). Suatu peubah acak X kontinu berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 , memiliki fungsi kepadatan peluang dalam bentuk berikut:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.1)$$

untuk $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Nilai rata-rata fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal dapat dicari dengan mengintegrasikan fungsi $f(x)$ dan dikalikan dengan x , sehingga:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \end{aligned}$$

Dimisalkan $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ maka $dx = \sigma dz$, sehingga

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z) \cdot e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \sigma dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma z \cdot e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \\
 &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \\
 &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \\
 &= \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 \\
 &= \mu - 0 \\
 &= \mu
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dari hasil perhitungan diatas diperoleh nilai rata-rata fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal adalah $E(X) = \mu$.

Nilai variansi fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Var(X) = \sigma^2 \tag{2.3}$$

Dengan:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)]^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \tag{2.4}$$

Dimisalkan $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ maka $dx = \sigma dz$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 E[(x - \mu)]^2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \sigma^2 e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \sigma dz \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \sigma dz
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Menggunakan integral parsial, dimisalkan $u = z \rightarrow du = dz, dv = ze^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \rightarrow v = -e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$, maka nilai variansi dari distribusi normal adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E[(x - \mu)]^2 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(-ze^{-\frac{1}{2}(z)^2} \right)_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[0 + 2 \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \right] \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.4 Penaksiran *Maximum Likelihood Estimation*

Maximum Likelihood Estimation merupakan metode pendugaan yang memaksimalkan fungsi *likelihood*. Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n menunjukkan sampel pada variabel acak X dengan *pdf* dinyatakan dengan $f_X(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$. Fungsi *Likelihood* adalah sebagai berikut (Ross, 2015):

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta) \tag{2.7}$$

Estimasi parameter pada variabel acak X yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 . Dalam hal ini, θ adalah vektor $\theta = (\mu, \sigma)$. Jika X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak pada variabel X , maka fungsi *log-likelihood* dinyatakan sebagai berikut:

$$l(\mu, \sigma) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - n \log \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \tag{2.8}$$

Fungsi *loglikelihood* selanjutnya diturunkan terhadap parameter μ dan σ , maka:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \left(-\frac{1}{\sigma} \right) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \tag{2.10}$$

Parameter ini adalah nilai maksimum yang memaksimumkan fungsi *loglikelihood*. Jika persamaan (2.11) dan (2.12) bernilai nol, maka estimasi parameter μ dan σ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad (2.11)$$

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.12)$$

Dari pernyataan tersebut dapat dilihat bahwa estimator rata-rata \bar{X} adalah estimator tidak bias untuk μ . Selanjutnya, untuk nilai ekspektasi $\hat{\sigma}^2$ adalah sebagai berikut:

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Berikutnya akan diperiksa apakah terdapat bias pada parameter σ^2 . Hasilnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Bias_{\sigma^2} &= E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 \\ &= -\frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Perlu diperhatikan bahwa *Maximum Likelihood* dari σ^2 terbukti memiliki bias. Meskipun ada bias, nilai bias ini cenderung mendekati nol saat ukuran sampel n meningkat. Sehingga ketika ukuran sampel n kecil, estimasi parameter σ^2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.13)$$

2.5 Simulasi Monte Carlo

Simulasi adalah sebuah metode analitik yang bertujuan untuk membuat "imitasi" dari sebuah sistem yang mempunyai sifat acak (Cahyo, 2008). Simulasi Monte Carlo didefinisikan sebagai teknik sampling statistik yang digunakan untuk memperkirakan solusi terhadap masalah-masalah kuantitatif. Dalam simulasi Monte Carlo sebuah model dibangun berdasarkan sistem yang sebenarnya. Metode simulasi Monte Carlo mensimulasikan sistem tersebut berulang kali berdasarkan sistem yang ditinjau (Apri *et al.*, 2019).

Simulasi Monte Carlo adalah sebuah teknik yang digunakan dalam berbagai bidang untuk mengestimasi hasil dari suatu proses atau kejadian dengan menggunakan metode acak. Berikut merupakan tahapan yang dilakukan dalam melakukan penerapan simulasi Monte Carlo.

1. Menetapkan suatu distribusi probabilitas bagi variabel yang penting.
2. Membuat distribusi probabilitas kumulatif bagi setiap variabel.
3. Menetapkan sebuah interval angka acak bagi setiap variabel.
4. Membangkitkan angka acak.
5. Melakukan simulasi untuk serangkaian percobaan.

2.6 Value at Risk

Sebuah studi oleh Di Asih dan Purbowati (2009) mengeksplorasi pengukuran *Value at Risk* (*VaR*) sebagai salah satu bentuk pengukuran risiko yang cukup populer. Hal ini mengingat kesederhanaan dari konsep *VaR* sendiri namun juga memiliki kemampuan implementasi berbagai metodologi statistika yang beragam dan mutakhir. Penggunaan metode *VaR* dapat membantu entitas menghindari kerugian besar yang tidak diinginkan. Dimisalkan X merupakan suatu peubah acak kerugian dan $VaR_x(a)$ didefinisikan sebagai nilai terbesar (atau batas) kerugian potensial yang mungkin terjadi dalam suatu periode tertentu dengan tingkat kepercayaan a , maka $VaR_x(a)$ secara matematis dapat dijelaskan dalam dua bentuk:

$$\begin{aligned} VaR_x(a) &= \inf\{x: P(X > x) \leq a, 0 < a < 1\} \\ &= \inf\{x: P(X \leq x) \geq 1 - a\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.7 Retensi Optimal pada Reasuransi *Stop-Loss*

Dalam perhitungan retensi dalam jenis reasuransi *stop-loss*, penting untuk memahami beberapa aspek terkait risiko yang terlibat dalam perusahaan asuransi yang menggunakan jenis reasuransi ini. Risiko dapat dibagi menjadi dua komponen utama, yaitu risiko yang ditanggung oleh perusahaan asuransi itu sendiri (asuradur) dan risiko yang ditanggung oleh perusahaan reasuransi (reasuradur). Misal X_I sebagai risiko yang ditanggung oleh asuradur, X_R sebagai risiko yang ditanggung oleh reasuradur, dan d sebagai besaran retensi. Hubungan antara risiko asuradur dan risiko reasuradur dapat dijelaskan sebagai berikut (Cai & Tan, 2007):

$$X_I = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d \quad (2.15)$$

dan

$$X_R = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases} = (X - d)_+ \quad (2.16)$$

Menghitung premi reasuransi adalah langkah kritis dalam menjalankan bisnis asuransi yang berkelanjutan dan menguntungkan. Penentuan premi reasuransi yang tepat adalah salah satu faktor utama dalam mengelola risiko dan menjaga stabilitas keuangan perusahaan asuransi. Rumus yang digunakan dalam penentuan premi reasuransi adalah sebagai berikut:

$$\delta(d) = (1 + \rho)E(X_R) \quad (2.17)$$

ρ adalah nilai dari faktor *loading*, *safety loading* adalah faktor yang harus dipertimbangkan dengan serius oleh perusahaan asuransi untuk melindungi diri dari ketidakpastian dan risiko yang mungkin timbul. Nilai harapan dari risiko reasuradur X_R dapat didefinisikan sebagai berikut (Tse, 2009):

$$\begin{aligned} E(X_R) &= E[(X - d)_+] = \int_d^{\infty} (x - d)f(x)dx \\ &= - \int_d^{\infty} (x - d)d(S_X(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} -(x - d) S_X(x) + \int_d^{\infty} S_X(x) dx \\
&= \int_d^{\infty} S_X(x) dx
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Maka premi reasuransi dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\delta(d) = (1 + \rho) \int_d^{\infty} S_X(x) dx \tag{2.19}$$

Penyusunan rumus untuk mengukur total risiko memungkinkan perusahaan asuransi untuk mengidentifikasi dan mengevaluasi sejauh mana risiko yang mereka tanggung sendiri serta bagaimana dampak reasuransi memengaruhi eksposur mereka terhadap risiko. Total risiko (T) ini mencakup dua komponen utama, yaitu risiko yang ditanggung oleh perusahaan asuransi (asuradur) dan dampak dari premi reasuransi yang dibayarkan kepada perusahaan reasuransi (Cai & Tan, 2007). Sehingga, total risiko dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$T = X_I + \delta(d) \tag{2.20}$$

Selanjutnya, dilakukan penerapan metode *Value at Risk* (VaR) dalam optimasi retensi perusahaan asuransi, tahapan ini merupakan langkah progresif dalam menghadapi ketidakpastian risiko. Penggunaan metode VaR bertujuan untuk meminimalkan total kerugian yang mungkin dialami oleh perusahaan asuransi melalui retensi yang optimal. Misalkan X merupakan suatu peubah acak kerugian dan $VaR_x(a)$ didefinisikan sebagai nilai terbesar (atau batas) kerugian potensial yang mungkin terjadi dalam suatu periode tertentu dengan tingkat kepercayaan a , dengan menggunakan persamaan (2.12) maka $VaR_x(a)$ pada tingkat kepercayaan $1 - a$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
VaR_x(a) &= \inf\{x: P(X > x) \leq a, 0 < a < 1\} \\
&= \inf\{x: P(X \leq x) \geq 1 - a\}
\end{aligned}$$

Dari persamaan tersebut, maka $VaR_x(a)$ merupakan nilai x di mana probabilitas kerugian melebihi x kurang dari atau sama dengan tingkat kepercayaan a dan $VaR_x(a)$ adalah nilai x di mana probabilitas kerugian kurang dari atau sama

dengan x lebih besar dari atau sama dengan $1 - a$. Persamaannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(X > VaR_X(a)) &= a \\ VaR_X(a) &= S_X^{-1}(a) \end{aligned} \quad (2.21)$$

dan

$$\begin{aligned} P(X \leq VaR_X(a)) &= 1 - a \\ VaR_X(a) &= F_X^{-1}(a) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nilai minimum kerugian perusahaan asuransi pada tingkat kepercayaan a dan nilai retensi d dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$VaR_{X_I}(d, a) = \inf\{x: P(X_I > x) \leq a\} \quad (2.23)$$

Nilai minimum total kerugian perusahaan asuransi pada tingkat kepercayaan a dan nilai retensi d dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$VaR_T(d, a) = \inf\{x: P(T > x) \leq a\} \quad (2.24)$$

Dari nilai minimum total kerugian perusahaan asuransi, akan diambil nilai VaR_T yang paling minimum, maka total kerugian yang paling minimum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$VaR_T(d^*, a) = \min_{d>0}\{VaR_T(d, a)\} \quad (2.25)$$

Nilai d^* merupakan retensi optimal yang meminimumkan nilai $VaR_T(d^*, a)$. Dengan definisi *Value at Risk*, maka *Value at Risk* total kerugian perusahaan asuransi pada persamaan (2.22) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$VaR_T(d, a) = \inf\{x: P(T > x) \leq a\} = VaR_{X_I}(d, a) + \delta(d) \quad (2.26)$$

Untuk menghitung $VaR_{X_I}(d, a)$ penting untuk mempertimbangkan fungsi survival dari risiko asuradur (X_I), yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{X_I}(x) = P(X_I > x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ S_X(x), & 0 \leq x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases} \quad (2.27)$$

Dengan menggunakan rumus fungsi survival, dapat disimpulkan bahwa (Cai & Tan, 2007),

1. Jika batas $0 < a \leq S_X(d)$ atau $0 < d \leq S_X^{-1}(a)$, maka

$$\begin{aligned} VaR_{X_I}(d, a) &= \inf\{x: P(X_I > x) \leq a\} \\ &= \inf\left\{x: \begin{cases} 1 \leq a, & x < 0 \\ S_X(x) \leq a, & 0 \leq x \leq d \\ 0 \leq a, & x > d \end{cases}\right\} \\ &= \inf(\emptyset \cup \emptyset \cup \{x \geq d\}) \\ &= d \end{aligned}$$

2. Jika $a > S_X(d)$ atau $d > S_X^{-1}(a)$, maka

$$\begin{aligned} VaR_{X_I}(d, a) &= \inf\{x: P(X_I > x) \leq a\} \\ &= \inf\left\{x: \begin{cases} 1 \leq a, & x < 0 \\ S_X(x) \leq a, & 0 \leq x \leq d \\ 0 \leq a, & x > d \end{cases}\right\} \\ &= \inf(\emptyset \cup \{S_X^{-1}(a) \leq x < d\} \cup \{x \geq d\}) \\ &= S_X^{-1}(a) \end{aligned}$$

3. Jika $a > S_X(0)$, maka

$$\begin{aligned} VaR_{X_I}(d, a) &= \inf\{x: P(X_I > x) \leq a\} \\ &= \inf\left\{x: \begin{cases} 1 \leq a, & x < 0 \\ S_X(x) \leq a, & 0 \leq x \leq d \\ 0 \leq a, & x > d \end{cases}\right\} \\ &= \inf(\emptyset \cup \{0 \leq x < d\} \cup \{x \geq d\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa *Value at Risk* asuradur (X_I) adalah sebagai berikut:

$$VaR_{X_I}(d, a) = \begin{cases} d, & 0 < d \leq S_X^{-1}(a) \\ S_X^{-1}(a), & d > S_X^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.28)$$

Berdasarkan persamaan (2.18) dapat disimpulkan bahwa hubungan *Value at Risk* untuk total kerugian (T) dengan *Value at Risk* asuradur (X_I) adalah sebagai berikut:

$$VaR_T(d, a) = VaR_{X_I}(d, a) + \delta(d) \quad (2.29)$$

Menggunakan persamaan (2.28) dan (2.29), *Value at Risk* untuk total kerugian (T) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$VaR_T(d, a) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(a) \\ S_X^{-1}(a) + \delta(d), & d > S_X^{-1}(a) \end{cases} \quad (2.30)$$

Dari persamaan di atas, dapat dilihat bahwa *Value at Risk* untuk total kerugian (T) bergantung pada premi reasuransi ($\delta(d)$). Jika d^* merupakan retensi optimal yang meminimumkan nilai $VaR_T(d^*, a)$ yang dinyatakan pada persamaan (2.25), maka retensi optimal $d^* > 0$ terpenuhi ketika

$$a < \rho^* < S_X(0), \quad \rho^* = \frac{1}{1 + \rho} \quad (2.31)$$

dan

$$S_X^{-1}(a) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta(S_X^{-1}(\rho^*)) \quad (2.32)$$

Retensi optimal d^* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*) \quad (2.33)$$

Sehingga *Value at Risk* dari total kerugian perusahaan asuransi $VaR_T(d^*, a)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$VaR_T(d^*, a) = d^* + \delta(d^*) \quad (2.34)$$

Setelah melakukan perhitungan retensi optimal, maka selanjutnya perusahaan asuransi akan menentukan besar risiko yang akan dialihkan ke pihak reasuradur. Besar risiko yang akan dialihkan ke pihak reasuradur untuk reasuransi *stop-loss* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$X_R = \begin{cases} 0, & X \leq d^* \\ X - d^*, & X > d^* \end{cases} = (X - d^*)_+ \quad (2.35)$$