

**PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HELM**

*HARMONIOUS LABELING ON HELM GRAPH*

**HUSNUL HATIMA**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HELM**

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

HUSNUL HATIMA

H022211006

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2022**

**TESIS**

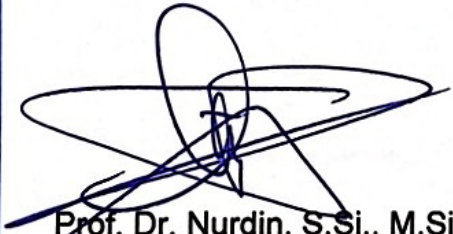
**PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HELM**

**HUSNUL HATIMA**  
**NIM. H022211006**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Magister Program Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 10 Januari 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

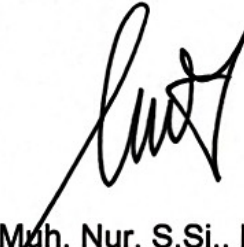
**Menyetujui**

**Pembimbing Utama**



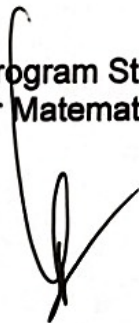
**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 197008072000031002**

**Pembimbing Pendamping**



**Dr. Mth. Nur, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 198505292008121002**

**Ketua Program Studi  
Magister Matematika**



**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**  
**NIP. 19640207 199103 1013**

**Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin**



**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19720515 1997 02 1002**

## PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Pelabelan Harmonis Pada Graf Helm" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.S. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Muh.Nur, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari ini tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal *Daya Matematis* : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika sebagai artikel dengan judul "*Harmonious Labeling On Helm Graph*".

Dengan ini saya limpaikan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 10 Januari 2023



Husnul Hatima  
NIM.H022211006

## UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur yang sebesar-besarnya penulis panjatkan kepada Allah Yang Maha Esa atas segala nikmat hidup, kesehatan, rejeki serta wawasan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang diberi judul “Pelabelan Harmonis Pada Graf Helm”. Tak lupa pula salam dan shalawat kepada baginda Rasulullah Nabiullah Muhammad SAW, sosok yang menjadi suri tauladan bagi penulis dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing utama dan **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing pendamping untuk segala waktu, ilmu, serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si., Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.**, dan **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak dan ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan

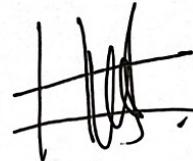
seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.

5. Bapak dan Ibu seluruh staf Departemen Matematika Universitas Hasanuddin atas segala bantuan dalam pengurusan administrasi akademik selama ini.
6. Kedua Orang tua tercinta Ayahanda **H. Abd. Kadir** dan Ibunda **Hj. Hasma** atas segala kasih sayang, doa, dan dukungan kepada penulis.
7. Seluruh teman-teman Program Studi Magister Matematika yang telah berjuang bersama-sama selama ini.
8. Teruntuk semua pihak yang belum sempat penulis tuliskan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuannya selama ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan-kekurangan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima guna perbaikan kedepannya.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak.

Makassar, 10 Januari 2023



Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL TESIS.....	i
HALAMAN PENGESAHAN TESIS .....	ii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....	iii
UCAPAN TERIMA KASIH.....	iv
DAFTAR ISI.....	vi
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	ix
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Tujuan Penelitian.....	2
1.4 Manfaat Penelitian.....	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	3
2.1 Graf.....	3
2.2 Jenis-jenis Graf.....	5
2.3 Pelabelan Graf.....	7
2.4 Pelabelan Harmonis ( <i>Harmonious</i> ).....	8
BAB III METODE PENELITIAN .....	10
3.1 Jenis Penelitian .....	10
3.2 Prosedur Penelitian .....	10
3.3 Diagram Alir Penelitian.....	11
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....	12
4.1 Pelabelan Harmonis pada Graf Helm berorde Ganjil .....	12
4.2 Pelabelan Harmonis pada Graf Helm berorde Genap .....	16
BAB V PENUTUP .....	23
5.1 Kesimpulan.....	23
5.2 Saran .....	23
DAFTAR PUSTAKA.....	24

## ABSTRAK

HUSNUL HATIMA. **Pelabelan Pelabelan Hamonis Pada Graf Helm** (dibimbing oleh Nurdin dan Muh.Nur)

Graf  $G(V, E)$  terdiri dari dua himpunan yaitu titik  $V$  dan sisi  $E$ , dimana  $V$  merupakan himpunan yang tidak boleh kosong. Graf helm diperoleh dari graf lingkaran dengan penambahan sisi pendant dengan notasi  $H_n$ . Suatu graf  $H$  dengan sisi  $q$  dikatakan harmonis jika terdapat fungsi injektif  $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 3n - 1\}$  yang menghasilkan fungsi pelabelan sisi  $g(xy) = (f(x) + f(y)) \pmod{q}$  yang akan menghasilkan label sisi yang berbeda. Pada thesis ini akan dikonstruksikan graf  $H_n$  dengan hasil graf  $H_n$  dengan  $n$  ganjil dan  $n$  genap merupakan graf harmonis. Dimana untuk setiap  $n \geq 3$  untuk graf helm ganjil dan  $n \geq 4$  untuk graf helm genap.

Kata kunci: Graf helm, Pelabelan harmonis, Graf Harmonis, Pelabelan Graf.



## ABSTRACT

HUSNUL HATIMA. **Harmonious Labeling on Helm Graphs** (supervised by Nurdin and Muh.Nur)

Graph  $G(V, E)$  consists of two sets, that is vertices  $V$  and edges  $E$ , which  $V$  are sets that cannot be empty. The helmet graph is obtained from circle graph by adding pendant edges with the notation  $H_n$ . A graph  $H$  with edges  $q$  is harmonious if there is an injective function  $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 3n - 1\}$  that produces edge labeling functions  $g(xy) = (f(x) + f(y)) \pmod{q}$  that different edge labels. In this article, graphs  $H_n$  with  $n$  vertex results will be constructed as  $H_n$  harmonic graphs, when  $n \geq 3$  for odd helm graph and  $n \geq 4$  for even helm graph.

Keywords: Helm graph, Harmonious labeling, Harmonious Graph, Graph Labeling.

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf Trivial dan Graf Tak Kosong.....	3
Gambar 2.2 Contoh Graf .....	4
Gambar 2.3 Graf Lintasan $P_4$ .....	5
Gambar 2.4 Graf Lingkaran $C_8$ .....	6
Gambar 2.5 Graf Tangga Segitiga $LS_4$ .....	6
Gambar 2.6 Graf Bintang $K_{1,7}$ .....	7
Gambar 2.7 Graf helm $H_5$ .....	9
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian .....	11
Gambar 4.1 Graf helm $H_5$ .....	12
Gambar 4.2 Pelabelan titik dan sisi Graf helm $H_5$ .....	16
Gambar 4.3 Graf helm $H_6$ .....	17
Gambar 4.4 Pelabelan titik dan sisi Graf helm $H_6$ .....	22

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler pada tahun 1736. Dalam matematika, penggunaan teori graf masih kurang karena banyak dipakai dalam penyelesaian teka-teki (*puzzle*). Pada abad 19 tepatnya tahun 1852, Francis memperkenalkan dan mengkaji graf empat warna. Pada abad ke 20 penelitian tentang teori graf mengalami kemajuan yang sangat pesat, hal ini di karenakan teori graf mempunyai banyak topik yang dikaji dan diterapkan dalam berbagai bidang ilmu lainnya (Hasmawati, 2020).

Graf digunakan untuk menjelaskan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Penggambaran dari graf bertujuan untuk menyatakan objek sebagai sebuah titik, sedangkan hubungan antara titik dinyatakan dengan garis. Salah satu penelitian yang banyak dikaji adaah pelabelan graf.

Pelabelan graf itu sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack ditahun 1964. Selanjutnya pelabelan graf mulai dikembangkan oleh Stewart (1966), Kotzig Roza (1967) dan terus berkembang hingga sekarang. Beberapa jenis pelabelan graf yang banyak dikembangkan adalah pelabelan gracefull, pelabelan harmonis, pelabelan total tak teratur, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Pelabelan harmonis diperkenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980. Adapun graf yang memiliki pelabelan harmonis juga merupakan graf harmonis (Graham dan Sloane, 1980). Graf harmonis sendiri terbagi menjadi dua yaitu graf harmonis ganjil dan graf harmonis genap.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang pelabelan harmonis pada graf. Beberapa peneltian yang membahas tentang pelabelan harmonis diantaranya P.Jeyanthi pada tahun 2018 menentukan bahwa super subdivium graf merupakan graf harmonis ganjil. Pada tahun 2019 M.Kalaimathi menentukan graf asiklik merupakan graf harmonis. Selanjutnya, pada tahun 2020 Fery Firmansah menentukan graf segi empat ganda merupakan graf harmonis ganjil. Pada tahun 2021 penelitian yang dilakukan oleh Diah Ayu Pujiawati menentukan bahwa graf

bintang merupakan graf harmonis. F Aliwie ditahun 2021 juga menentukan gabungan graf  $m$ -siklus dan  $n$ -jalur merupakan graf harmonis.

Graf helm ( $H_n$ ) merupakan graf yang dibentuk dari graf roda  $W_n$  dengan penambahan  $n$  titik dengan derajat satu yang bertetangga ke setiap titik pada graf roda  $W_n$ .

Penelitian tentang pelabelan harmonis pada graf helm belum dilakukan sehingga penulis tertarik untuk meneliti, dengan judul "Pelabelan Harmonis pada graf Helm  $H_n$ ".

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pelabelan harmonis pada graf helm?
2. Apakah graf helm merupakan graf harmonis?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan pelabelan harmonis pada graf helm.
2. Memverifikasi bahwa graf helm merupakan graf harmonis.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini sebagai bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu dalam bidang teori graf, sehingga kedepannya dapat digunakan sebagai rujukan untuk peneliti lain dalam menentukan pelabelan harmonis pada graf.
2. Menambah pengetahuan penulis tentang graf termasuk pelabelan dan jenis graf.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

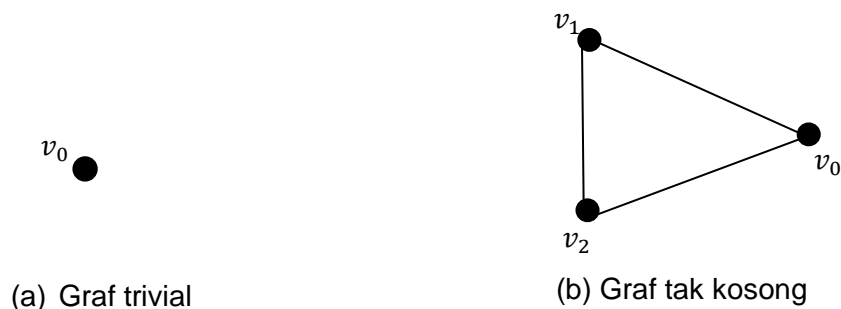
Pada bab ini akan diberikan beberapa penjelasan yang akan digunakan untuk menunjang proses pengerjaan penelitian. Antara lain beberapa definisi, notasi dan istilah dasar dalam teori graf serta pengertian pelabelan graf yang akan digunakan.

#### 2.1 Graf

Teori graf dikenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yaitu Leonhard Euler. Hasmawati (2020) menjelaskan bahwa teori graf merupakan teori yang menjelaskan mengenai hal diskrit berupa titik dan sisi, yang telah dibuktikan kebenarannya menggunakan sifat-sifat dan aturan tertentu.

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tak kosong dari unsur yang disebut titik (*vertex*) dan  $E(G)$  adalah himpunan dari titik-titik  $u, v$  di  $V(G)$  yang disebut sisi (*edge*). Sisi  $\{u, v\}$  pada graf  $G$  akan ditulis  $uv$  (Slamin, 2019). Suatu graf  $G = (V, E)$  terdiri atas  $V$ , suatu himpunan takkosong titik (*vertices*) dan  $E$ , suatu himpunan sisi (*edges*). Tiap sisi memiliki satu atau dua titik yang terhubung dengan sisi tersebut. Titik tersebut disebut titik ujung (*endpoints*). Sisi tersebut juga dikatakan menghubungkan (*connect*) titik ujung tersebut. (Rosen, 2007).

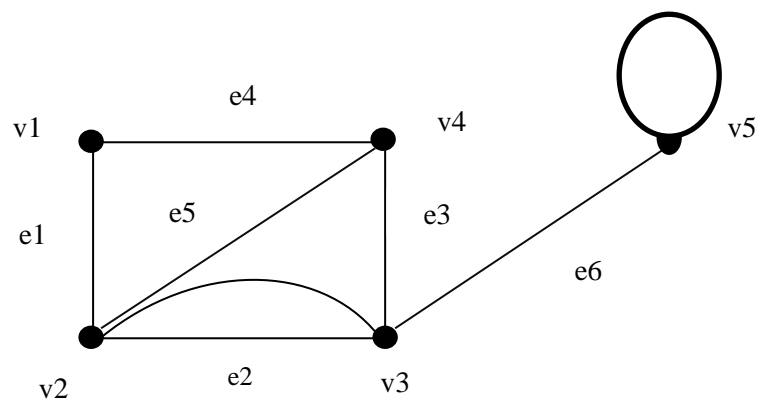
Graf yang tidak mempunyai sisi disebut dengan graf kosong sedangkan graf kosong yang hanya memiliki satu titik disebut graf trivia (Munir, 2010). Graf trivial dan graf tak kosong yang dibangun dari tiga titik dapat dilihat pada gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1 Graf trivial dan graf tak kosong

Suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  dapat ditunjukkan dalam bentuk gambar. Anggota himpunan  $V(G)$  di gambarkan dalam bentuk titik, sedangkan  $E(G)$  di gambarkan dalam bentuk garis(sisi). Orde pada graf  $G$  ditunjukkan dengan simbol  $p$  yang menunjukkan banyaknya anggota dari  $V(G)$  dan ukuran (size) pada graf  $G$  ditunjukkan dengan simbol  $q$  yang merupakan banyaknya anggota dari  $E(G)$  (Hasmawati, 2020).

**Contoh 2.1.1** Misalkan  $V$  merupakan himpunan titik dan  $E$  merupakan himpunan sisi. Maka pada graf  $G = (V, E)$  berikut dimana  $V$  merupakan himpunan titik dan  $E$  adalah himpunan sisi. Berikut merupakan bentuk graf  $G$  dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.2 contoh graf

Himpunan titik pada graf  $G = (V, E)$  adalah  $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4, v_3v_5, v_2v_4$  dengan  $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_1v_4, e_5 = v_2v_4, e_6 = v_3v_5$ . sehingga himpunan sisi pada graf  $G$  adalah  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ .

Gelung (*loop*) pada suatu graf merupakan sisi yang mempunyai titik yang terhubung dengan dirinya sendiri. Dengan kata lain,  $e$  dikatakan *loop* apabila  $e = (vv)$ , sehingga derajat dari titik  $v$  dihitung sebanyak dua. Apabila dua titik dihubungkan lebih dari satu sisi, maka titik tersebut disebut sisi berganda. Dimana graf yang tidak memiliki gelung dan sisi berganda disebut dengan graf sederhana.

**Definisi 2.1.1** Graf sederhana  $G$  merupakan pasangan  $(V(G), E(G))$ , dengan  $V(G)$  merupakan himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang mempunyai anggota yang disebut titik (*vertex*) dan  $E(G)$  merupakan himpunan pasangan-

pasangan tak berurut dan berbeda dari anggota-anggota  $V(G)$  yang disebut sisi (*edge*) (Hasmawati, 2020).

**Definisi 2.1.2** Misalkan dua graf  $H = (V(H), E(H))$  dan  $G = (V(G), E(G))$ . Graf  $H$  disebut subgraf dari  $G$ , jika  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Definisi 2.1.3** Derajat dari suatu titik  $v$  pada graf  $G$  merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik  $v$ . Derajat titik  $v$  pada graf  $G$  dinotasikan dengan  $deg(v)$ . Selanjutnya, derajat minimum dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\delta(G)$  dan derajat maksimum dinotasikan dengan  $\Delta(G)$ . Apabila suatu graf memiliki  $\delta(G) = \Delta(G)$ , maka graf tersebut disebut graf regular (Hasmawati, 2020).

**Definisi 2.1.4** Misalkan  $G$  graf sederhana berorde  $p$  dan berukuran  $q$ . Jumlah derajat titik dalam graf  $G$  adalah dua kali banyaknya sisi atau  $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2q$  (Hasmawati, 2020).

## 2.2 Jenis-jenis Graf

Graf dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan ciri khusus dan sudut pandang pengelompokannya.

### 2.2.1 Graf Lintasan

Lintasan pada graf  $G$  adalah barisan titik dan sisi  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$  dengan  $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dituliskan dengan notasi  $P_n$  apabila berorde  $n$  (Hasmawati, 2020).

Suatu graf  $G$  dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat suatu lintasan  $u - v$  untuk setiap  $u, v \in V(G)$  (jika tidak demikian, graf  $G$  dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (West, 2002).

**Definisi 2.1.4** misalkan  $G$  adalah graf berorde 3 atau lebih. Jika  $G$  memuat dua titik berbeda  $u$  dan  $v$  sedemikian sehingga  $G - u$  dan  $G - v$  terhubung, maka  $G$  itu sendiri adalah terhubung (Hasmawati, 2020).

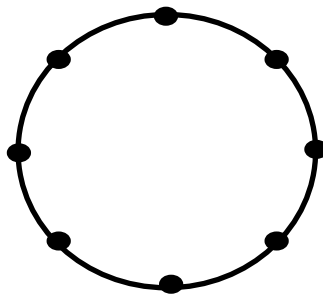


Gambar 2.3 graf lintasan  $P_4$

### 2.2.2 Graf Lingkaran dan graf pohon

Graf lingkaran  $C_n$  merupakan graf lintasan dengan  $n$  titik yang diberi tambahan sisi antara titik awal dan titik akhir sehingga pada graf lingkaran semua titik memiliki derajat 2 (P.Deepa, 2016).

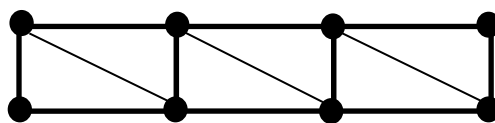
Graf pohon  $T_n$  adalah graf terhubung berorde  $n$  yang tidak memuat siklus. Titik-titik berderajat satu pada pohon disebut daun dan titik-titik berderajat lebih dari satu disebut titik internal (Hasmawati, 2020).



Gambar 2.4 graf lingkaran  $C_8$

### 2.2.3 Graf Tangga Segitiga

Graf tangga segitiga  $LS_n$  merupakan graf yang diperoleh melalui penambahan beberapa unsur  $u_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1$  untuk  $n > 2$  pada graf tangga  $L_n$ , sehingga membentuk graf tangga baru yang disebut graf tangga segitiga  $LS_n$  dengan himpunan titik  $V(LS_n) = \{u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$  dan  $V(LS_n) = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$  (Atmadja, 2014).

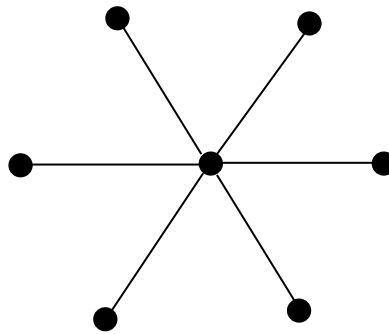


Gambar 2.5 graf tangga segitiga  $LS_4$



### 2.2.4 Graf Bintang

Graf bintang  $K_{1,n}$  adalah graf yang memiliki 1 titik berderajat  $n$  yang disebut titik *central* dan  $n$  titik berderajat 1 yang disebut titik daun. Pohon  $T$  dikatakan *double star* jika terdiri dari dua graf star dengan kedua titik *central* dari graf disebut saling bertetangga. Graf *double star* dinotasikan dengan  $S_{n,m}$ . Kardinalitas titiknya adalah  $p = |V(S_{n,m})| = n + m + 2$  dan kardinalitas sisinya adalah  $q = |E(S_{n,m})| = n + m + 1$  (P.Deepa, 2016).



Gambar 2.6 graf bintang  $K_{1,7}$

### 2.2.5 Graf Helm

Graf helm merupakan graf hasil pengembangan dari graf roda. Graf helm didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari graf roda  $W_n$  dengan menambahkan sisi pendent ke setiap titik pada siklus  $C_n$  di  $W_n$ . Graf helm yang diperoleh dari roda  $W_n$  dinotasikan  $H_n$ . Sisi pendent merupakan sisi yang terkait dengan titik yang berderajat satu (Hasmawati, 2020).

### 2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari titik dan sisi graf ke himpunan bilangan bulat positif. Atau dengan kata lain yaitu fungsi yang memasangkan setiap unsur graf baik sisi maupun titik dengan bilangan bulat positif (Gallian, 2020).

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah suatu graf sederhana. Suatu pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu fungsi  $f$  dari himpunan bagian unsur-unsur dari graf  $G$  ke suatu himpunan bilangan asli. Bilangan asli tersebut disebut label. Daerah asal yang paling sering digunakan yaitu himpunan titik atau  $V$  (pelabelan titik), himpunan sisi atau  $E$  (pelabelan sisi) dan himpunan titik dan sisi atau  $V \cup E$  (pelabelan total) (Bača dkk., 2007).

Bilangan positif yang merupakan nilai pemetaan pada setiap unsur di graf disebut label. Selain itu, juga terdapat istilah bobot yang merupakan jumlah label yang terkait dengan elemen graf yang dinotasikan dengan  $wt$ . Terdapat beberapa pelabelan graf, beberapa diantaranya yaitu pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil dan pelabelan harmonis genap.

## 2.4 Pelabelan Harmonis (*Harmonious*)

Pelabelan harmonis dikenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane sekitar tahun 1980.

**Definisi 2.4.1.** Suatu graf  $H$  berukuran  $q$  dikatakan harmonis jika terdapat fungsi injektif dari titik-titik graf  $H$  sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif dengan modulo  $q$  sehingga dimana setiap sisi  $vw$  yang diberi label sisi  $(f(v) + f(w)) \pmod{q}$  akan menghasilkan label yang berbeda.

Sehingga graf yang memiliki pelabelan harmonis dikatakan juga graf harmonis (Graham dan Sloane, 1980).

Berikut merupakan jenis-jenis pelabelan harmonis (Chartrand dan Zhang, 2005).

### 2.4.1 Pelabelan Harmonis Genap (*Even Harmonious*)

Graf  $H(p, q)$  didefinisikan sebagai sebuah graf sederhana yang memiliki  $p$  titik dan  $q$  sisi. Graf  $H(p, q)$  merupakan graf harmonis genap jika memiliki fungsi injektif  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q\}$  sedemikian sehingga terdapat fungsi bijektif  $f^* : E(G) \rightarrow \{0, 2, 4, \dots, 2q - 2\}$  dengan  $f^*(vw) = f(u) + f(v) \pmod{q}$  untuk setiap  $uv \in E(G)$ .

### 2.4.2 Pelabelan Harmonis Ganjil (*Odd Harmonious*)

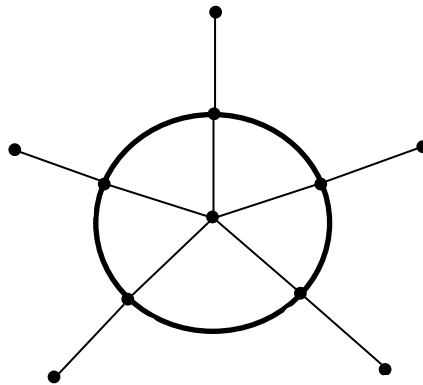
Pelabelan harmonis ganjil pertama kali dikenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Graf  $H$  dengan  $q$  adalah sisi merupakan graf harmonis ganjil jika memiliki fungsi injektif  $f$  yang memetakan setiap elemen  $V(G)$  ke himpunan

bilangan bulat non-negatif yang kurang dari  $2q - 1$  atau  $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2q\}$  sedemikian sehingga terdapat fungsi  $f^* (vw) = f(u) + f(v)$  dengan  $f^* : E(G) \rightarrow \{1,3,5, \dots, 2q - 1\}$  untuk setiap  $uv \in E(G)$ . Salah satu teorema tentang pelabelan harmonis ganjil pada suatu graf adalah sebagai berikut:

Teorema 2.1. (Liang dan Bai,2009)

- a. Jik  $G$  adalah graf harmonis ganjil, maka  $G$  merupakan graf bipartit.
- b. Jika graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi merupakan harmonis ganjil, maka berlaku  $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$

Contoh graf Helm ( $H_5$ ) dengan nilai sisi berbeda. Sehingga graf helm  $H_5$  merupakan graf harmonis.



Gambar 2.7 graf Helm  $H_5$