KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA DINAMIKA KORUPSI DENGAN PEMBERIAN EDUKASI DAN KAMPANYE, PERBAIKAN SISTEM, DAN REPRESIF

OPTIMAL CONTROL OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF CORRUPTION BY PROVIDING EDUCATION AND CAMPAIGNS, IMPROVING THE SYSTEM, AND BEING REPRESSIVE

AMIRA WAHID

H022191004

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2022

KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA DINAMIKA KORUPSI DENGAN PEMBERIAN EDUKASI DAN KAMPANYE, PERBAIKAN SISTEM, DAN REPRESIF

Tesis

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar Magister Sains
Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin

AMIRA WAHID
H022191004

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA DINAMIKA KORUPSI DENGAN PEMBERIAN EDUKASI DAN KAMPANYE, PERBAIKAN SISTEM, DAN REPRESIF

Disusun dan diajukan oleh

AMIRA WAHID
H022191004

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 15 September 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pendamping,
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.	**Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si**
NIP. 19680114 199412 1 001	**NIP. 19800904 200312 2 001**
Ketua Program Studi Magister Matematika,	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin,
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1 013	**NIP. 19720515 199702 1 002**

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Korupsi dengan Pemberian Edukasi dan Kampanye, Perbaikan Sistem,dan Represif" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Dr. Syamsuddin Toaha., M.Sc. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Kasbawati., S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal Proximal : Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika sebagai artikel dengan judul "Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Korupsi dengan Pemberian Edukasi dan Kampanye, Perbaikan Sistem,dan Represif".

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 07 Oktober 2022

METERAI TEMPEL

Amira Wahid

H022191004

UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, kalimat yang tiada hentinya penulis hanturkan kepada-Nya yang membuat hati berderai air mata bahagia karena syukur pada-Nya. Allah subhanahu wata'ala, zat yang maha memberi segalanya, yang menggerakkan hati dan pikiran, serta menggelorakan semangat. Shalawat dan salam senantiasa penulis kirimkan kepada Nabiullah Nabi Muhammad SAW yang mengajarkan dan membimbing manusia ke jalan yang benar, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul berjudul **"Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Korupsi dengan Pemberian Edukasi dan Kampanye, Sistem,dan Represif."**

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika Terapan Departemen Matematika Fakultan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Dalam penyelesaian tesis ini diperlukan proses yang sangat panjang, terlebih lagi dalam suasana Pandemi COVID-19, banyak tantangan dan hambatan mulai dari penyusunan hingga akhirnya tesis ini dapat dirampungkan.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta dan tersayang **Ibunda Rosmiyati., S.Pd. dan Ayahanda Drs.Abd.Wahid Maraling** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang mengalir tiada henti dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Terima kasih atas segala aspek dukungan yang tidak terkira nilainya. Semoga Tuhan memberikan balasan yang lebih baik lagi atas semua pengorbanan kalian.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.,** selaku pembimbing utama dan **Dr. Kasbawati., S.Si., M.Si.,** selaku pembimbing pendamping untuk segala ilmu, nasehat, serta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan.

2. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.,** Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, M.Si.,** dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.,** selaku anggota tim penguji yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam menyusun tesis ini.

3. Bapak/Ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.

4. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan Bapak **Dr. Eng Amirudin, M.Si.,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya, dan seluruh pihak birokrasi atas pengetahuan dan kemudahan-kemudahan yang diberikan, baik dalam bidang akademik maupun bidang kemahasiswaan.

5. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.,** selaku Ketua Program Studi S2 Matematika Terapan yang telah memberikan banyak bantuan selama penulis menjalani pendidikan. Terima kasih juga untuk segenap jajaran Pegawai Akademik Departemen Matematika atas bantuannya dalam pengurursan akademik selama ini.

6. Terima kasih kepada saumi tercinta **Ferial Fadly Nasruddin, S.S., S.Pd** yang telah memberikan dukungan, do'a, dan bersedia menjadi tempat keluh kesah, serta kedua anak penulis **Khansa Humairah Fadly** dan **Khabbab Yusuf Fadly** telah menjadi anak yang kuat, sehat, pintar, dan ceria.

7. Terima kasih kepada keluarga besar penulis yang telah menjadi pemacu bagi penulis untuk terus berusaha dengan lebih giat.

8. Teman-teman seperjuangan **S2 Matematika Terapan 2019**, Pute, Fitri, Syam, Icha, Nola, Noni, Nita, Astri, danUtari, serta adik-adik **S2 Matematika Terapan 2020** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.

Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu. Semoga segala bantuan yang tulus dan ikhlas ditujukan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini bermanfaat untuk adik-adik, kakak-kakak dan semua pihak yang membutuhkan dan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 07 Oktober 2022

Penulis

Amira Wahid

ABSTRAK

AMIRA WAHID. Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Korupsi dengan Pemberian Edukasi dan Kampanye, Perbaikan SIstem, dan Represif (Dibimbing oleh Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. dan Dr. Kasbawati, M. Si.).

Salah satu masalah yang menarik untuk dikaji melalui pendekatan model matematika yaitu perilaku korupsi yang mengancam kehidupan masyarakat. Sektor pelayanan publik merupakan salah satu contoh lahan basah terkait korupsi birokrasi. Selain itu, adapula korupsi yang lebih besar karena mencakup pembuatan kebijakan politik. Pengembangan model dalam artikel ini dilakukan berdasarkan model matematika korupsi yang telah dikembangkan oleh (Fantaye dan Birhanu, 2021) dengan membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptible* (S), *exposed* (E), *corrupt* (C), *jailed* (J) dan *honest* (H). Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis titik kesetimbangan pada model matematika dinamika korupsi serta memberikan penerapan kontrol optimal pada dinamika korupsi melalui strategi yang telah diusung oleh KPK yaitu edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif diharapkan mampu menangani kasus korupsi secara efektif. Dari hasil analisis model diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan tanpa korupsi dan titik kesetimbangan adanya korupsi. Titik kesetimbangan tersebut akan stabil jika memenuhi syarat yang ditetapkan oleh aturan *Routh-Hurwitz*. Berdasarkan hasil simulasi numerik, menunjukkan bahwa peran KPK dalam memberantas korupsi dengan edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif memberikan hasil yang efektif.

Kata kunci*:* *Model dinamika korupsi, titik kesetimbangan, kontrol optimal.*

ABSTRACT

AMIRA WAHID. Optimal Control of The Mathematical Model of The Dynamics of Corruption by Providing Education and Campaigns, Improving The System and Being Repressive (supervised by Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M. Sc. and Dr. Kasbawati, M. Si.).

One of the interesting problems to be studied through a mathematical model approach is the behavior of corruption that threatens people's lives. The public service sector is one example of a wetland related to bureaucratic corruption. In addition, there is also greater corruption because it includes political policy making. The model development in this article is based on the mathematical model of corruption that has been developed by (Fantaye and Birhanu, 2021) by dividing the population into five compartments, namely *susceptible* (S), *exposed* (E), *corrupt* (C), *jailed* (J) and *honest* (H). This study aims to analyze the equilibrium point in the mathematical model of the dynamics of corruption and provide optimal control implementation on the dynamics of corruption through the strategies that have been promoted by the KPK, namely education and campaigning, system improvement, and repressive strategies that are expected to be able to handle corruption cases effectively. From the analyze of the model, two equilibrium points are obtained, namely the equilibrium point without corruption and the equilibrium point for corruption. The equilibrium point will be stable if it fulfills the conditions set by the *Routh-Hurwitz* rule. Based on the results of numerical simulations, it shows that the role of the KPK in eradicating corruption through education and campaigns, system improvements, and repressive strategies provides effective results.

Keywords: *Corruption dynamics model, equilibrium point, optimal control.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Makna**
Λ	Lambda
μ	Mu
β	Beta
θ	Theta
γ	Gamma
ω	Omega
τ	Tau
ζ	Zeta

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pemodelan matematika adalah kontruksi pengetahuan yang didesain berdasarkan kejadian pada kehidupan nyata. Pemodelan matematika dapat dikatakan tiruan dari kejadian nyata yang tidak lepas dari asumsi serta penyederhanaan sehingga diperoleh hasil, dapat berbentuk grafik, simbol-simbol matematika, simulasi, atau eksperimen (Toaha, 2013).

Salah satu masalah yang menarik untuk dikaji melalui pendekatan model matematika yaitu perilaku korupsi yang dapat memberikan ancaman terhadap kehidupan masayarakat. Korupsi di Indonesia sudah seperti penyakit yang akut. Berbagai pengobatan sudah diberikan, akan tetapi penyakit tersebut tak juga sembuh. Gejala perilaku korupsi sudah menyebar dan menjangkiti hampir di seluruh lini kehidupan, termasuk birokrasi pemerintah dan juga politik.

Sektor pelayanan publik merupakan salah satu contoh dari korupsi birokrasi. Sektor tersebut dijadikan lahan basah oleh oknum yang tidak bertanggungjawab. Sehingga bukan hal yang mengherankan jika kasus-kasus seperti pungutan liar, gratifikasi, dan sejenisnya sering kali kita temukan di lapangan. Akibatnya, birokrasi di Indonesia tidak mampu berjalan efektif dan efisien. Birokrasi pada akhirnya dijadikan pelayan oleh para penguasa serta orang-orang yang memiliki kepentingan di dalamnya (Fatkhuri, 2017).

Selain itu, ditemukan pula jenis korupsi yang lebih besar yaitu mencakup pembuatan kebijakan politik. Pada korupsi politik, kejahatan dapat berupa penyalahgunaan sumber daya dan penentuan keputusan. Jenis korupsi tersebut terjadi jika pemegang kekuasaan menyalahgunakan kedudukannya, Undang-undang dan regulasi diabaikan serta tidak dilaksanakan berdasarkan prosedur yang berlaku, atau bisa jadi dibuat sedemikian rupa untuk mewujudkan kepentingan mereka (Amundsen, 1999).

Pada penelitian sebelumnya telah dimodelkan masalah yang berkaitan dengan dinamika korupsi ini. Sebagai contoh model matematika dinamika korupsi yang dikembangkan oleh (Lemecha, 2018) dengan pemberian kesadaran dan konseling di penjara oleh antikorupsi. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Nathan, 2019) yang membagi kompartemen korupsi menjadi dua kelas yaitu kelas korupsi biasa dan korupsi politik. Penelitian lain juga dilakukan oleh (Danford, 2020) yang mempertimbangkan kesadaran yang diciptakan oleh antikorupsi dan konseling di penjara serta merumuskan dan menganalisis model matematika dinamika korupsi dengan adanya tindakan pengendalian. Pada tahun yang sama (Alemneh, 2020) menemukan bahwa pengendalian terpadu harus diambil untuk memerangi korupsi. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Fantaye dan Birhanu, 2021) yang mempertimbangkan pengaruh sosial pada individu yang jujur serta memberikan pengendalian berupa strategi pencegahan dan hukuman dalam memberantas korupsi.

Dalam memberantas korupsi dibutuhkan kekompakan dalam menentukan langkah apa saja yang diperlukan. Jika memiliki kesamaan pemikiran, maka langkah yang diambil dalam memberantas korupsi menjadi tepat, lebih terarah, serta dapat berjalan dengan efektif. Berdasakan hal tersebut, maka dalam penelitian ini dikaji penerapan kontrol optimal pada dinamika korupsi melalui strategi yang telah diusung oleh KPK yaitu edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif. Serta pengembangan model dalam penelitian ini dilakukan berdasarkan model matematika korupsi yang telah dikembangkan oleh (Fantaye dan Birhanu, 2021) dengan membagi populasi menjadi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptible* (S), *exposed* (E), *corrupt* (C), *jailed* (J) dan *honest* (H) dan akan dituangkan dalam bentuk tesis yang berjudul

” Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Korupsi dengan Pemberian Edukasi dan Kampanye, Perbaikan Sistem, dan Represif.”

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya maka diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengembangkan model matematika dinamika korupsi dengan mempertimbangkan faktor edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif?
2. Bagaimana bentuk kontrol optimal dari pengendalian berupa pemberian edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan represif?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan tesis ini adalah

1. Mengembangkan model matematika dinamika korupsi dengan pemberian edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan strategi represif.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika dinamika korupsi dengan pemberian edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan represif.
3. Menentukan kontrol optimal dari model matematika dinamika korupsi dengan faktor edukasi dan kampanye, perbaikan sistem, dan represif.
4. Menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika dinamika korupsi tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Dapat memberikan gambaran yang jelas tentang dinamika penyebaran perilaku korupsi.
2. Hasil penelitian ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak dalam memahami, mengembangkan, serta meminimalisir penyebaran perilaku korupsi dalam masyarakat.

1.5. Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada masalah berikut

1. Model matematika dinamika korupsi yang digunakan berdasarkan masalah korupsi yang ditangani oleh KPK.
2. Perilaku korupsi dalam populasi diasumsikan sebagai penyakit menular.
3. Populasi dibagi menjadi lima kompartemen diantaranya *susceptible* (S), *exposed* (E), *corrupt* (C), *jailed* (J), *dan honest* (H) dengan asumsi bahwa:
   (i) *Susceptible* (S) adalah populasi yang tidak pernah melakukan tindak pidana korupsi namun rentan terhadap perilaku korupsi, serta pernah menjadi individu yang jujur namun kembali karena adanya pengaruh sosial.
   (ii) *Exposed* (E) adalah populasi yang telah terpapar dengan perilaku korupsi, sudah ada niat untuk melakukan korupsi, namun belum melakukan praktek korupsi tersebut.

(iii) *Corrupt* (C) adalah populasi yang melakukan praktek pidana korupsi serta mampu mempengaruhi populasi rentan untuk ikut melakukan praktek pidana korupsi.

(iv) *Jailed* (J) adalah populasi yang berhasil dimasukkan dalam penjara karena kasus pidana korupsi.

(v) *Honest* (H) adalah populasi rentan, terpapar, atau bebas dari penjara yang kemudian sadar untuk tidak melakukan tindak pidana korupsi.

4. Perilaku korupsi hanya dapat tertular jika terjadi interaksi antara individu yang rentan dan individu yang korupsi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Studi Review Pemodelan Dinamika Korupsi

Untuk menganalisis dan memperkaya pembahasan, penulis perlu mengkaji beberapa penelitian yang telah membahas tentang dinamika korupsi. Penelitian sebelumnya juga berfungsi sebagai pembeda dengan penelitian yang dilakukan. Sehingga dalam penelitian ini, disertakan pula beberapa jurnal yang terkait dengan pemodelan dinamika korupsi.

Penelitian yang dimaksud diantaranya dilakukan oleh Lemecha (2018), model yang dikembangkan adalah model matematika dinamika korupsi yang mendapatkan perlakuan dari antikorupsi di penjara berupa pemberian kesadaran serta konseling dalam menangani kasus korupsi. Pada penelitian tersebut diselidiki titik kesetimbangan bebas korupsi dan adanya korupsi serta diselidiki pula jumlah reproduksi dasar dari sistem. Diperoleh titik kesetimbangan model adalah stabil asimtotik lokal. Titik kesetimbangan bebas korupsi pada sistem stabil asimtotik secara lokal ketika jumlah reproduksi dasarnya kurang dari satu, sedangkan titik kesetimbangan adanya korupsi pada sistem stabil asimtotik lokal jika jumlah dari reproduksi lebih besar dari satu. Sementara hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analisisnya.

Selanjutnya penelitian yang dilakukakan oleh Nathan (2019) yang telah mengembangkan model matematika dinamika korupsi berdasarkan penyalahgunaan kepercayaan masyarakat oleh kator publik untuk kepentingan pribadi atau golongan. Peneliti menjelaskan bahwa dampak korupsi dapat meluas ke dalam sektor pembangunan serta pertumbuhan nasional, sehingga perlu diberikan strategi pencegahan dan pemberantasan untuk meminimalisir atau menghentikan perilaku korupsi dalam masyarakat. Strategi yang diberikan berdasarkan strategi yang telah diusung oleh EACC (East Asia Christian Confrence/ Konrensi Gereja-gereja Asia Timur) dalam memberantas korupsi.

Penelitian lain juga dilakukan oleh Danford (2020) yang merumuskan serta menganalisis model matematika dinamika korupsi dengan pemberian tindakan berupa pengendalian. Dalam penelitian tersebut, populasi dibagi menjadi empat kompartemen yaitu kelas rentan korupsi (S), kelas korupsi (C), dan kelas korupsi politik (M).

Di tahun yang sama Amalia (2020) membagi model matematika dinamika korupsi dengan empat kompartemen yaitu rentan terhadap korupsi (S), korupsi (C), korupsi politik (P), dan berhenti melakukan korupsi (R), serta mengaplikasi teori kontrol optimal pada model tersebut. Kontrol optimal dari model dinamika korupsi yang digunakan yaitu memaksimalkan peran KPK dalam memberikan penindakan terhadap individu koruptor politik dan memberikan hukuman maksimal kepada individu koruptor politik.

Penelitian yang lain dilakukan oleh Fantaye dan Birhanu (2021), mereka mempertimbangkan pengaruh sosial pada individu yang jujur. Penelitian tersebut membagi populasi menjadi empat kompartemen individu rentan, korup, dipenjara, dan jujur, serta memperluas model ke kontrol optimal dengan pemberian strategi pencegahan dan hukuman.

2.2. Korupsi dan Dampaknya

Pada tahun 1967, Nye menyatakan bahwa, “Korupsi merupakan tindakan yang menyimpang dari tugas-tugas peran publik yang formal karena terkait kepentingan pribadi (perseorangan, keluarga dekat, dan kelompok pribadi) yang berkaitan dengan uang atau keadaan kekayaan, atau yang melanggar peraturan terhadap pelaksanaan jenis-jenis tertentu dari pribadi yang dapat mempengaruhi”. Tindakan korupsi juga mencakup perilaku suap atau pemberian hadiah untuk menyesatkan penilaian seseorang, nepotisme atau pemberian berdasarkan hubungan kekerabatan bukan berdasarkan jasa, dan ketidakpatutan atau penggunaan sumber daya publik secara illegal berdasarkan kepentingan pribadi atau golongan.

Praktik korupsi telah menyebar hampir ke seluruh lini kehidupan, termasuk pelayanan publik. Sehingga bukan hal yang mengherankan jika banyak kasus korupsi seperti pungutan liar, gratifikasi, dan sejenisnya sering ditemukan dalam area ini menyebabkan birokrasi tidak lagi berjalan efektif serta efisien. Terdapat dua faktor yang menyebabkan korupsi menjangkiti sektor pelayanan publik, yaitu eksternal dan internal. Yang merupakan faktor eksternal yaitu adanya masyarakat yang ingin mendapatkan pelayanan secara instan dalam berbagai pengurusan seperti perizinan dan sejenisnya. Adapun faktor internal yaitu rentang waktu birokrasi yang lama dan adanya oknum birokrasi yang mempersulit proses administratif (Fatkhuri, 2017).

Karena birokrasi telah dijadikan lahan basah praktik korupsi, maka prinsip dasar dari birokrasi yaitu rasional, efisien, serta berkualias tidak lagi terlaksana. Kualitas pelayanan pun menjadi sangat jelek dan mengecewakan. Hanya orang tertentu saja yang bisa mendapatkan pelayanan yang baik, karena hanya mereka yang mampu menyuap pelayan publik. Hal tersebut berdampak pada meluasnya kesenjangan sosial serta dapat berakibat jatuhnya para birokrat (Azis, 2005).

Korupsi juga telah dilakukan oleh pembuat kebijakan politik. Korupsi politik merupakan korupsi besar karena melibatkan sistem politik tingkat tinggi. Korupsi dibidang ini terjadi karena mereka yang memiki wewenang membuat dan menegakkan Undang-undang atas nama masyarakat merupakan oknum yang melakukan tindak pidana korupsi. Mereka dengan sengaja menggunakan kekuasaan untuk melakukan tindakan tercela tersebut dalam mempertahankan kekuasaan, status, dan juga kekayaan mereka. Berdasarkan hal tersebut, korupsi terbagi menjadi dua yaitu korupsi birokrasi dan politik, dimana implementasi korupsi administrasi negara akan diakhiri oleh politik.

Korupsi politik bisa berdampak pada terjadinya instabilitas sosial politik serta itegrasi sosial, karena terdapat pertentangan antara penguasa dan rakyatnya. Bahkan dalam banyak kasus, penguasa dapat dijatuhkan secara tidak terhormat. (Rinakit, 2005).

2.3. Strategi dalam Pemberantasan Korupsi di Indonesia

Dalam memberantas korupsi dibutuhkan kekompakan dalam menentukan langkah apa saja yang diperlukan. Jika memiliki kesamaan pemikiran, maka langkah yang diambil dalam memberantas korupsi menjadi tepat, lebih terarah, serta dapat berjalan dengan efektif. Adapun strategi yang diusung oleh KPK adalah sebagai berikut

1. Represif

Pada strategi represif dilakukan penindakan hukum berupa upaya membawa pelaku korupsi ke pengadilan berdasarkan pengakuan masyarakat. Pengaduan masyarakat merupakan sumber informasi penting dalam mengungkap kasus korupsi. Dalam strategi represif terdapat beberapa tahapan yaitu

- Penanganan laporan pengaduan masyarakat. (KPK melakukan proses verifikasi dan penelaahan)
- Penyelidikan
- Penyidikan

- Penuntutan
- Eksekusi

2. Edukasi dan Kampanye

Strategi pemberantasan korupsi selanjutnya yaitu edukasi dan kampanye. Dengan pemberian edukasi dan kampanye diharapkan masyarakat mengetahui jenis-jenis korupsi serta dampaknya dalam kehidupan. Strategi ini dapat mengajak masyarakat untuk ikut andil dalam memberantas korupsi sehingga tercipta perilaku dan budaya anti korupsi dalam masyarakat. Tidak hanya sebatas masyarakat dewasa, anak usia dini, sekolah dasar, dan remaja juga perlu ditanamkan perilaku jujur melalui strategi edukasi dan kampanye di sekolah formal dan non formal.

3. Perbaikan Sistem

Tidak kalah penting, perlu diperhatikan diadakannya sistem yang baik untuk meminimalisir terjadinya praktek korupsi. Dengan sistem yang baik, instansi dapat menutup celah kesempatan orang yang tidak jujur untuk melakukan praktek korupsi. Hal tersebut dapat dilakukan dengan menerapkan perbaikan sistem berikut

- Transparan dalam penerimaan LHKPN (Laporan Harta Kekayaan Penyelanggara Negara) dan gratifikasi.
- Kementrian dan lembaga terkait memberikan kesempatan kepada masyarakat untuk memberikan rekomendasi atau masukan terhadap perbaikan sistem.
- Pelayanan publik yang modern dengan sistem online sertapengawasan optimal sehingga dapat memberikan pelayanan yang maksimal dan juga efisien.

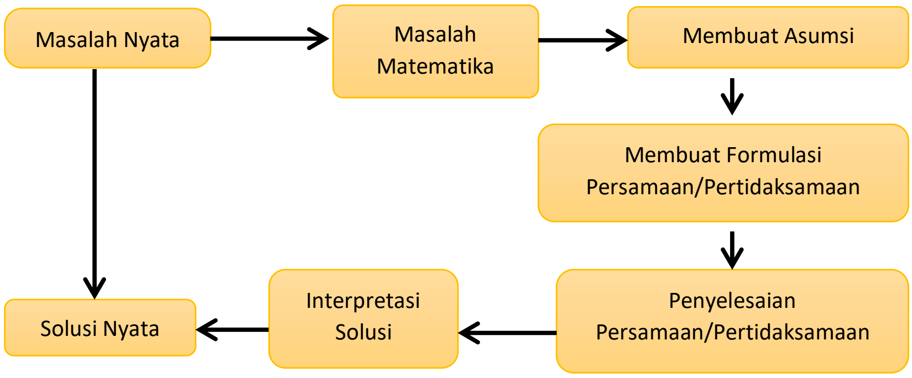
2.4. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah bidang matematika yang mempelajari konsep matematika dengan berusaha mempresentasikan dan menjelaskan masalah atau problem yang nyata terjadi ke dalam pernyataan matematika sehingga lebih mudah dipahami. Adapun beberapa alur dalam memodelkan matematika dapat dilihat pada Gambar 1 dan berikut ini penjelasannya (Widowati, 2007):

1. Masalah berdasarkan kenyataan dimodelkan ke dalam pernyataan matematika. Langkah yang akan dilakukan adalah dengan mengidentifikasi

kemudian membentuk hubungan antar variabel-variabel yang terdapat pada dunia nyata tersebut.

2. Membuat asumsi pada model yang dikontruksi. Asumsi yang dibuat dapat menjelaskan alur pemikiran sehingga diperoleh model yang tepat, dengan demikian masalah dapat diselesaikan.
3. Formulasi persamaan/pertidaksamaan dibentuk berdasarkan asumsi dan keterkaitan antara variabel-variabel di dalamnya. Setelah diformulasikan, yang akan dilakukan adalah menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan dengan hati-hati sehingga mendapatkan hasil yang realistis.
4. Langkah terakhir yaitu menginterpretasi solusi yang telah diperoleh. Interpretasi dapat menjelaskan hubungan formulasi matematika dengan kenyataan sehingga diperoleh suatu solusi yang juga nyata. Dalam menginterpretasi, banyak cara yang dapat dilakukan, salah satunya dengan menampilkan solusi dalam bentuk grafik.



Gambar 1. Diagram Proses Pemodelan Matematika

2.5. Sistem Persamaan Diferensial

Kumpulan dari suatu persamaan diferensial yang memiliki satu atau lebih variabel terikat dengan satu atau lebih variabel bebas disebut sistem persamaan diferensial. Persamaan diferensial dikelompokkan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial yang terdiri dari satu variabel bebas yang dapat disimbolkan dengan $\boldsymbol{v}$ dan persamaan diferensial parsial atau persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas. Jika diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{v}) \tag{2.1}$$

dimana

$\dot{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{dv_3}{dt}, \dots, \frac{dv_n}{dt}\right)^T$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)^T$, dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \epsilon R^n$, maka sistem Persamaan diferensial (2.1) dibentuk menjadi

$$\frac{dv_1}{dt} = g_1(t, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n),$$

$$\frac{dv_2}{dt} = g_2(t, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n),$$

$$\frac{dv_3}{dt} = g_3(t, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dv_{n-1}}{dt} = g_{n-1}(t, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n),$$

$$\frac{dv_n}{dt} = g_n(t, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n). \quad (2.2)$$

dengan

$i = 1,2,3, \dots, n-1, n.$

Selanjutnya, diberikan bentuk persamaan diferensial linier dengan n fungsi tak diketahui sebagai berikut

$$\frac{dv_1}{dt} = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 + \cdots + a_{1(n-1)}v_{n-1} + a_{1n}v_n,$$

$$\frac{dv_2}{dt} = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 + \cdots + a_{2(n-1)}v_{n-1} + a_{2n}v_n,$$

$$\frac{dv_3}{dt} = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 + \cdots + a_{3(n-1)}v_{n-1} + a_{3n}v_n,$$

$$\vdots$$

$$\frac{dv_{n-1}}{dt} = a_{(n-1)1}v_1 + a_{(n-1)2}v_2 + a_{(n-1)3}v_3 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}v_{n-1} + a_{(n-1)n}v_n,$$

$$\frac{dv_n}{dt} = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + a_{n3}v_3 + \cdots + a_{n(n-1)}v_{n-1} + a_{nn}v_n. \quad (2.3)$$

Sistem Persamaan (2.3) dapat pula ditulis

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{Mv}, \quad (2.4)$$

dengan M merupakan matriks ukuran $n \times n, M_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left[\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{dv_3}{dt}, \dots, \frac{dv_{n-1}}{dt}, \frac{dv_n}{dt}\right]^T,$

$\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n]^T.$

Jika Persamaan (2.2) tidak dapat dibentuk menjadi sistem Persamaan (2.4) maka persamaan tersebut merupakan sistem persamaan diferensial non linier.

2.6. Titik Kesetimbangan

Setimbang yaitu keadaan dimana sistem tidak berubah di sepanjang waktu, sedangkan kesetimbangan yaitu jumlah populasi tidak berubah di sepanjang waktu. Karena diasumsikan bahwa model matematika dinamika korupsi sama dengan model penyebaran penyakit pada umumnya, maka diperoleh titik kesetimbangan pada model ini sebanyak dua. Titik kesetimbangan pertama yaitu titik kesetimbangan adanya korupsi dan titik kesetimbangan yang kedua yaitu titik kesetimbangan bebas korupsi.

. Suatu titik $\boldsymbol{v}^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik kesetimbangan dari $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}^*) = 0$ dengan:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n) \\ g_2(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n) \\ \vdots \\ g_n(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n) \end{pmatrix},$$

atau dapat juga dijelaskan, jika $\boldsymbol{v}^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$, maka $g_i(v_1^*, v_2^*, v_3^*, \dots, v_{n-1}^*, v_n^*) = 0$, $\forall i = 1,2,3,\dots,n$ (Wiggins, 1990).

2.7. Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Karena bentuk dari model matematika dinamika korupsi merupakan persamaan diferensial nonlinier, maka perlu dilakukan linierisasi pada model tersebut.

Definisi 2.1 (Hale & Kocak , 1991). *Jika $\boldsymbol{x}^*$ merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, maka persamaan diferensial linear*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}, \qquad (2.5)$$

disebut persamaan linearisasi dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ pada titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dimana $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ dan

$$J(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dengan $J(\boldsymbol{x}^*)$ disebut sebagai matriks Jacobi dari $\boldsymbol{f}$ di titik $\boldsymbol{x}^*$.

Untuk memperoleh titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ perhatikan nilai eigen λ solusi dari persamaan karakteristik berikut

$$\det(J - \lambda I) = 0, \qquad (2.6)$$

dimana I merupakan matriks identitas.

Jenis dan sifat kestabilan berdasarkan jenis nilai eigen dari Persamaan (2.6) disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Jenis Kestabilan dari Sistem Linear $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)$ Berdasarkan Nilai Eigen

No.	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
1.	$\lambda_i > 0, \exists i = 1,2,3,4, \dots, n$	Tidak Stabil
2.	$\lambda_i < 0, \forall i = 1,2,3,4 \dots, n$	Stabil Asimtotik
3.	$\lambda_i < 0 < \lambda_j, \forall i = 1,2,3,4, \dots, n$ dan $\forall j = 1,2,3,4, \dots, n$	Tidak Stabil
4.	$\lambda_i = \lambda_j > 0, \forall i = 1,2,3,4, \dots, n$ dan $\forall j = 1,2,3,4, \dots, n$	Tidak Stabil
5.	$\lambda_i = \lambda_j < 0, \forall i = 1,2,3,4, \dots, n$ dan $\forall j = 1,2,3,4, \dots, n$	Stabil Asimtotik
6.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \forall i = 1,2,3,4, \dots, n, \forall j = 1,2,3,4, \dots, n;$ $r > 0$	Tidak Stabil
7.	$\lambda_i, \lambda_j = -r \pm ic, \forall i = 1,2,3,4, \dots, n, \forall j = 1,2,3,4, \dots, n, ; r > 0$	Stabil Asimtotik
8.	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic, \forall i = 1,2,3,4, \dots, n, \forall j = 1,2,3,4, \dots, n$	Stabil

Sumber : Boyce dan DiPrima (2012)

Contoh 1 :

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\frac{dg_1}{dt} = x_1 x_2,$$

$$\frac{dg_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2.$$

Tentukan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial di atas beserta kestabilannya!

$$\frac{dg_1}{dt} = x_1 x_2,$$

karena $\frac{dg_1}{dt} = 0$ maka $x_1 x_2 = 0$. Diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_2 = 0$.

$$\frac{dg_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2,$$

karena $\frac{dg_2}{dt} = 0$ maka $x_1^2 + x_2^2$. Karena $x_1 = 0$ maka diperoleh $x_2^2 = 0$.

Dimisalkan

$$\frac{dg_1}{dt} = x_1 x_2 = h_1,$$

$$\frac{dg_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2 = h_2,$$

dengan menurunkan x_1 dan x_2 terhadap h_1 dan h_2 diperoleh

$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = x_2,$

$\frac{\partial h_1}{\partial x_2} = x_1,$

$\frac{\partial h_2}{\partial x_1} = 2x_1,$

$\frac{\partial h_2}{\partial x_2} = 2x_2,$

Sehingga matriks Jacobian dari x_1 dan x_2 adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0,$

$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$

$\lambda_{1,2} = 0.$

Berdasarkan tabel 1 dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan (0,0) adalah stabil.

2.8. Kriteria *Routh-Hurwitz*

Misal diberikan sistem linear berikut:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{Mx}, \tag{2.7}$$

dengan M merupakan matriks Jacobi $n \times n$ dari linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan dan $\boldsymbol{x}$ merupakan vektor yang berukuran $n \times 1$.

Selanjutnya, sistem (2.4) ditentukan persamaan karakteristiknya sebagai berikut

$$|M - \lambda I| = 0,$$

dengan I adalah matriks identitas. Ada kasus dimana nilai eigen pada persamaan karakteristik sulit ditemukan, sehingga dibutuhkan kriteria *Routh Hurwitz* untuk menyelesaikannya. Kriteria tersebut menunjukkan kestabilan sistem dengan melihat koefisien dari persamaan karakteristik meskipun akar dari persamaan karakteristik belum terlihat.

Akar-akar dari polinimial berikut

$$P(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + \cdots + k_n = 0, \tag{2.8}$$

diperoleh berdasarkan nilai eigen matriks *M* dengan $k_i, i = 1,2,3, \dots, n$ merupakan konstanta real. Persamaan polynomial (2.8) mempunyai n buah akar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dan masing-masing akar yang diperoleh bernilai real atau kompleks jika memenuhi $P(\lambda_i) = 0$, untuk $i = 1,2, \dots, n$.

Untuk mengetahui bahwa $p(\lambda)$ memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif, makan perlu diketahui syarat perlu dan syarat cukup*Routh Hurwitz* berikut (Murray,2002).

$R_1 = q_1 > 0,$

$$R_2 = \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} q_1 & q_3 & 0 \\ 1 & q_2 & 0 \\ 0 & q_1 & q_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$R_n = \begin{vmatrix} q_1 & q_3 & . & . & . \\ 1 & q_2 & q_4 & . & . \\ 0 & q_1 & q_3 & . & . \\ 0 & 1 & q_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & q_n \end{vmatrix} > 0, \tag{2.6}$$

untuk $n = 1,2,3, \ldots$ dan $q_n > 0$.

2.9. Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalan

Masalah kontrol optimal yaitu memilih fungsi kontrol $u(t)$ yang selanjutnya akan membawa sistem dari *state* awal $\boldsymbol{x}(t_0)$ ketika waktu t_0 ke *state* akhir $\boldsymbol{x}(t_f)$ kepada waktu akhir t_f, sedemikian sehingga memberikan nilai optimal yaitu maksimum atau minimum berdasarkan fungsi objektif atau fungsi tujuan.

Persamaan diferensial

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{x}(t), u(t)\big) \tag{2.9}$$

merupakan bentuk persamaan diferensial dari *state* yang bergantung pada fungsi kontrol, dimana nilai awal $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Sistem tersebut bergantung pada fungsi kontrol $u(t)$ dari sistem (2.9). Jika nila fungsi kontroli $u(t)$ berubah maka solusi dari sistem persamaan diferensial (2.9) juga ikut mengalami perubahan. Yang paling mendasar dari masalah kontrol optimal yaitu menentukan fungsi kontrol $u(t)$ serta solusi sistem yang bersesuaian dengan Persamaan diferensial (2.9).

2.9.1. Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Misal diberikan masalah sebagai berikut

Minimumkan atau maksimumkan : $J(u) = \int_0^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}(t), u(t), t)dt$

Kendala : $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{h}\big(t, \boldsymbol{v}(t), u(t)\big)$

$V(0) = v_0$ dan $v(T) = v_T, u(t) \in U = \{u(t) \colon 0 \le u \le 1\}\}$ utntuk setiap $t \in [0, T]$.

Diberikan $u^*(t)$ yang merupakan variabel kontrol dari $u(t)$, kemudian disubstitusi ke dalam persamaan *state* kendala sehingga diperoleh *state* optimal $v^*(t)$ (Neilen dan Lenhart, 2010).

2.9.2. Fungsi Hamilton

Didefinisikan masalah kontrol optimal pada suatu fungsi Hamilton dengan variabel *costate* yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{\zeta}(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= g(v,t,u) + \sum_{i=1}^{k} \zeta_i(t)\, h_i(t,v,u), \\
&= g(v,t,u) + \big(\zeta_1(t)h_1(t,v,u) + \cdots + \zeta_k(t)h_k(t,v,u)\big), \\
&= g(v,t,u) + ([\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n] \begin{bmatrix} h_1(t,v,u) \\ h_2(t,v,u) \\ \vdots \\ h_k(t,v,u) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Dimana *H* adalah fungsi dari variabel $\zeta, t, v,$ dan u, g adalah fungsi tujuan yang dioptimalkan dan h adalah persamaan $state$ (Chiang, 2005).

2.9.3. Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip maksimum pontryagin digunakan untuk menyatakan kondisi solusi yang optimal sehingga kontrol u dapat meminimumkan fungsi Hamiltonia $(\mathcal{H})$ pada saat *t*. $\mathcal{H}$ memuat variabel kontrol u, variabel $state\ v$, variabel $costate\ \zeta$, dimana prinsip minimum menyatakan v dan ζ baik melalui persamaan $state$ atau melalui persamaan $costate$ dapat berubah terhadap waktu. Adapun persamaan $state$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = h(t,v,u), \tag{2.10}$$

dengan variabel $costate\ \zeta$ merupakan bagian dari persamaan fungsi Hamilton dan menjadi kondisi optimasi. Sedangkan persamaan $costate$ dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} \tag{2.11}$$

Terdapat dua turunan yaitu Persamaan (2.10) dan (2.11). Jika diketahui nilai awal $v(0)$ dan nilai akhir $v(T)$ maka dapat ditentukan $v(t)$ dan $\zeta(t)$, tetapi jika nilai akhir tidak diketahui maka kondisi tersebut disebut dengan kondisi transversal, kondisi saat $\zeta(T) = 0$ digunakan sebagai kondisi akhir.

Berikut beberapa komponen dari Prinsip Maksimum Pontryagin

(i) $\mathcal{H}(t,v,u^*,\zeta) \leq \mathcal{H}(t,v,u,\zeta)$ untuk setiap $t\epsilon[0,T]$

(ii) $\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}$ persamaan $state$

(iii) $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v}$ persamaan $costate$

(iv) $\boldsymbol{\zeta}(T) = 0$ kondisi transversal

Pada kondisi tertentu, komponen (i) fungsi Hamilton dapat diturunkan terhadap u sehingga menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0, \tag{2.12}$$

atau dikenal dengan syarat $stationer$. Kondisi (ii) dan (iii) merupakan sistem Hamilton, sedangkan kondisi (iv) merupakan kondisi transversal (Chiang, 2005).

2.10. Metode *Forward-Backward Sweep*

Metode Runge Kutta memberikan ketelitian yang lebih tinggi dalam penyelesaian numerik. Metode ini membutuhkan satu nilai awal dan hanya digunakan untuk sistem persamaan diferensial tingkat satu. Jika tidak, persamaan harus diubah terlebih dahulu ke dalam persamaan diferensial simultan.

Metode *forward backward sweep* merupakan jenis metode Runge Kutta yang sesuai dengan usulan penelitian ini. Di mana terdapat persamaan yang diketahui nilai awal dengan menggunakan *forward*, dan nilai akhir dengan *backward.*

Misalkan diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut

$$\min J = \min_{u} \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{v}(t), u(t)\big) dt\,, \tag{2.13}$$

dengan kendala

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{h}\big(t, \boldsymbol{v}(t), u(t)\big). \tag{2.14}$$

Masalah optimasi pada Persamaan (2.13) terhadap kendala pada Persamaan (2.14) dapat menjadi masalah optimasi tanpa kendala berikut

$$\min_{(\boldsymbol{v},u,\boldsymbol{\zeta})} \mathcal{H}(t, \boldsymbol{v}, u, \boldsymbol{\zeta}) = \min_{(\boldsymbol{v},u,\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{v}, u) + \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{v}, u),$$

dengan syarat keoptimalan

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{v}, u), \quad \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0, \\
&\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{v}}, \quad \boldsymbol{\zeta}(t_f) = \boldsymbol{0}, \\
&\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0, \ \forall u \in U.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Salah satu cara numerik untuk menyelesaikan masalah optimasi (2.15) adalah dengan menggunakan metode *forward backward sweep.* Metode ini akan digunakan untuk mengaprosimasi solusi optimal u^* dengan melakukan tebakan awal u pada suatu iterasi. Dinama interval waktu $\left[t_0, t_f\right]$ akan dibagi ke menjadi $t_0 = s_1, s_2, \dots, s_N, s_{N+1} = t_f$ dan kontrol $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$, di mana $u_i \approx u(s_i)$.

Solusi dari $\boldsymbol{v}(t)$ bisa didapatkan dengan menggunakan metode *forward runge kutta* orde 4, dimana akan diberikan kondisi awal (*state*) dan kemudian diberikan *step size* yaitu h. Adapun pendekannya melalui $v(t+h)$ dan $v(t)$, sehingga diberikan bentuk umum berikut

$$v(t+h) = v(t) + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \tag{2.16}$$

dengan

$$m_1 = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{v}(t)\big), \tag{2.17}$$

$$m_2 = \boldsymbol{g}\left(t + \frac{h}{2}, \boldsymbol{v}(t) + \frac{h}{2}m_1\right),$$

$$m_3 = \boldsymbol{g}\left(t + \frac{h}{2}, \boldsymbol{v}(t) + \frac{h}{2}m_2\right),$$

$$m_4 = \boldsymbol{g}(t + h, \boldsymbol{v}(t) + hm_3).$$

Masalah kontrol optimal (2.13) dapat diselesaikan dengan metode *backward runge kutta* orde 4. Pada model tersebut diberikan kondisi akhir atau *costate,* juga diberikan *step size* yaitu h, dengan pendekatan melalui $\lambda(t-h)$ dan $\lambda(t)$ sehingga diperoleh bentuk umum

$$\zeta(t-h) = \zeta(t) - \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \tag{2.18}$$

dengan

$$m_1 = \boldsymbol{g}\big(t, \boldsymbol{\zeta}(t)\big), \tag{2.30}$$

$$m_2 = \boldsymbol{g}\left(t - \frac{h}{2}, \boldsymbol{\zeta}(t) - \frac{h}{2}m_1\right),$$

$$m_3 = \boldsymbol{g}\left(t - \frac{h}{2}, \boldsymbol{\zeta}(t) - \frac{h}{2}m_2\right),$$

$$m_4 = \boldsymbol{g}(t - h, \boldsymbol{\zeta}(t) - hm_3).$$

Selanjutnya nilai u akan diperbaharui pada setiap iterasi dengan menggunakan kombinasi konveks untuk nilai u lama terhadap nilai u yang baru sebagai berikut

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2},$$

dimana u_{baru} didapatkan dari syarat keoptimalan $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$.

Adapun besar tolerasi δ yang diberikan dapat dilihat pada uji konvergensi berikut

$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta,$$

atau $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$ (Lenhart dan Workman, 2007).