BILANGAN RAMSEY PADA GRAF BINTANG DAN GRAF RODA BERKEPALA DUA

ALIFIA NURUL KHAIRIYAH

H011201047

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2024

BILANGAN RAMSEY PADA GRAF BINTANG DAN GRAF RODA BERKEPALA DUA

ALIFIA NURUL KHAIRIYAH

H011201047

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BILANGAN RAMSEY PADA GRAF BINTANG DAN GRAF RODA BERKEPALA DUA

ALIFIA NURUL KHAIRIYAH

H011201047

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

BILANGAN RAMSEY PADA GRAF BINTANG DAN GRAF RODA BERKEPALA DUA

ALIFIA NURUL KHAIRIYAH

H011201047

Skripsi

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 16 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing tugas akhir,

Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.
NIP. 196412311990032007

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si, M.Si.
NIP. 196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul " Penerapan Metode Canadian Pada Perhitungan Cadangan Premi Asuransi Jiwa Dwiguna" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing (Illuminata Wynnie, S.Si., M.Si). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 15 Agustus 2024

METERAI TEMPEL

TE66EALX325409623

Alifia Nurul Khairiyah

NIM. H011201047

UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah SAW yang telah menjadi suri teladan umat manusia. Alhamdulillah, skripsi dengan judul ”BILANGAN RAMSEY PADA GRAF BINTANG DAN GRAF RODA BERKEPALA DUA” yang disusun untuk memenuhi syarat dalam meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan.

Penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada ibu dan ayah yang telah memberikan kasih sayang, membesarkan penulis dengan penuh ketulusan baik secara langsung maupun tidak langsung melalui doa, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini, juga kepada adik yang telah menemani penulis. Begitu pula dengan pak aji dan kedua kakak yang telah menjadi bagian dari keluarga penulis.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam proses penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari dukungan dari banyak pihak. Karena itu, dengan penuh kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika;
2. Bapak Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D. selaku Penasehat Akademik yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis selama perkuliahan;
3. Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. selaku Pembimbing Utama yang telah dengan sabar dan banyak memberikan waktunya dalam membimbing dan mengarahkan penulis dalam proses penulisan skripsi;
4. Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si. dan Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si. selaku Tim Penguji yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberi saran serta arahan kepada penulis dalam skripsi;
5. Teman-teman Bnv Desteeford, HORI20NTAL, Math20, Pasger23, Adeline, Iis, Dito, Ika, Wardah, Vira, Indah, Fifi, dan Uwi atas semua dukungan dan kebersamaan selama ini;
6. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebut satu persatu yang telah membantu dan memberikan dukungan dalam bentuk apapun.

Penulis menyadari penuh bahwa skripsi ini jauh dari kata sempurna, sehingga segala kritik dan saran yang membangun dari berbagai hal dalam perbaikan dan pengembangan penelitian diterima dengan baik. Akhir kata, semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu. Aamiin.

Maros, 15 Agustus 2024

Penulis

ABSTRAK

ALIFIA NURUL KHAIRIYAH. **Bilangan Ramsey pada Graf Bintang dan Graf Roda Berkepala Dua** (dibimbing oleh Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.).

Latar Belakang. Banyak penelitian sebelumnya yang telah mengkaji bilangan Ramsey untuk graf lengkap, graf bintang, maupun graf roda namun untuk bilangan Ramsey pada graf bintang dan graf roda berkepala dua belum diketahui. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan Ramsey pada graf bintang S_n untuk $n = 3,4,5$ dan graf roda berkepala dua $W_{2,m}$ untuk $m \geq 3$. **Metode.** Penelitian ini dibagi menjadi beberapa tahap, yaitu menentukan batas bawah menurut Chvátal dan Harary mulai dari orde terkecil, kemudian menentukan dan membuktikan batas bawah dan batas atas dari graf yang telah ditentukan, apabila batas bawah dan batas atas telah sama maka dapat ditentukan dan dibuktikan teorema bilangan Ramsey $R(S_n, W_{2,m})$ untuk $n = 3,4,5$ dan $m \geq 3$ dengan n, m adalah bilangan asli. **Hasil.** Bilangan Ramsey $R\left(S_{3,} W_{2,m}\right) = \begin{cases} 7, & m = 3 \\ m + 2, & m \geq 4 \end{cases}$, $R\left(S_{4,} W_{2,m}\right) = \begin{cases} 10, & 3 \leq m \leq 5 \\ m + 4, & m \geq 6 \end{cases}$, dan $R\left(S_{5,} W_{2,m}\right) = m + 6$ untuk $m \geq 8$ dengan m bilangan asli. **Kesimpulan.** Merujuk pada hasil dan dengan adanya konsep variasi graf roda berkepala dua, diperoleh hasil yang sama untuk bilangan Ramsey graf bintang dan graf roda pada $R\left(S_{n,} W_m\right) = R\left(S_{n,} W_{2,m}\right) = 3n - 2$ untuk $n = 3$ dan $m = 2n - 1$, yaitu $R\left(S_{3,} W_5\right) = R\left(S_{3,} W_{2,5}\right) = 7$. Namun untuk $R\left(S_{4,} W_7\right)$ dan $R\left(S_{4,} W_{2,7}\right)$ memiliki hasil yang berbeda yaitu $R\left(S_{4,} W_{2,7}\right) = R\left(S_{4,} W_7\right) + 1$. Begitu juga dengan $\left(S_{5,} W_9\right)$ dan $R\left(S_{5,} W_{2,9}\right)$ yang memiliki hasil yang berbeda yaitu $R\left(S_{5,} W_{2,9}\right) = R\left(S_{5,} W_9\right) + 2$.

Kata kunci: bilangan Ramsey, teorema Bondy, graf bintang, graf roda, graf roda berkepala dua

ABSTRACT

ALIFIA NURUL KHAIRIYAH. **Ramsey Number on The Star Graph and The Two-Headed Wheel Graph** (guided by Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.).

Background. Many previous studies have examined Ramsey numbers for complete graphs, star graphs, and wheel graphs, but Ramsey numbers on star graphs and two-headed wheel graphs are unknown. **Purpose.** This study aims to determine Ramsey number on the star graph S_n for $n = 3,4,5$ and a two-headed wheel graph $W_{2,m}$ for $m \geq 3$. **Method.** This research is divided into several stages, namely determining the lower limit according to Chvátal and Harary starting from the smallest order, then determining and proving the lower and upper limits of the graph that has been determined, if the lower and upper limits are the same, then it can be determined and proven by Ramsey number theorem $R(S_n, W_{2,m})$ for $n = 3,4,5$ and $m \geq 3$ with n, m is a real number. **Result.** Ramsey number $R\left(S_{3,} W_{2,m}\right) = \begin{cases} 7, \ m = 3 \\ m+2, \ m \geq 4 \end{cases}$, $R\left(S_{4,} W_{2,m}\right) = \begin{cases} 10, \ 3 \leq m \leq 5 \\ m+4, \ m \geq 6 \end{cases}$ and $R\left(S_{5,} W_{2,m}\right) = m + 6$ for $m \geq 8$ with m a real number. **Conclusion**. Referring to the results and with the concept of variation of the two-headed wheel graph, the same result is obtained for Ramsey numbers of the star graph and the wheel graph at $R\left(S_{n,} W_m\right) = R\left(S_{n,} W_{2,m}\right) = 3n - 2$ for $n = 3$ and $m = 2n - 1$, i.e. $R\left(S_{3,} W_5\right) = R\left(S_{3,} W_{2,5}\right) = 7$. But for $R\left(S_{4,} W_7\right)$ and $R\left(S_{4,} W_{2,7}\right)$ have different results, namely $R\left(S_{4,} W_{2,7}\right) = R\left(S_{4,} W_7\right) + 1$. Likewise with $R\left(S_{5,} W_9\right)$ and $R\left(S_{5,} W_{2,9}\right)$ which has different results, namely $R\left(S_{5,} W_{2,9}\right) = R\left(S_{5,} W_9\right) + 2$.

Keywords: Ramsey number, Bondy's theorem, star graph, wheel graph, two-headed wheel graph

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan disajikan hasil studi literatur dari berbagai penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik bilangan Ramsey pada subbab latar belakang, rumusan masalah, dan tujuan dari dilakukannya penelitian. Selain itu, penjelasan mengenai landasan utama maupun teori pendukung lain yang digunakan akan disajikan dalam bentuk subbab berikutnya dan definisi serta beberapa teorema dalam penelitian ini merujuk ke buku Pengantar dan Jenis-jenis Graf (Hasmawati, 2020).

1.1 Latar Belakang

Teori graf (*graph theory*) merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan oleh matematikawan Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Ide ini awalnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan notasi $G(V, E)$ yang dalam hal ini V merupakan himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik. (Chartrand dan Oellermann, 1993)

Salah satu topik dalam teori graf adalah Teori Ramsey yang pertama kali dikaji oleh Frank Plumpton Ramsey pada tahun 1930. Ide dasar bilangan Ramsey klasik adalah untuk setiap bilangan bulat positif n dan m, bilangan Ramsey $R(n, m)$ adalah bilangan bulat terkecil p sedemikian sehingga untuk setiap graf G dengan orde p, adalah satu dari G memuat K_n sebagai subgraf atau $\bar{G}$ memuat K_m sebagai subgraf. (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Penentuan bilangan Ramsey klasik $R(n, m) = R(K_n, K_m)$ dengan K_n dan K_m merupakan graf lengkap dengan n dan m titik adalah konsep bilangan Ramsey klasik dua warna yang diberikan oleh Erdös dan Szekeres. Karena sulitnya mendapatkan bilangan Ramsey klasik untuk nilai n dan m yang lain, maka beberapa peneliti melakukan pengkajian untuk memperumum konsep bilangan Ramsey pada sebarang graf yang saat ini dikenal dengan konsep bilangan Ramsey graf sembarang. Beberapa peneliti tersebut antara lain adalah Chvátal dan Harary (1972) yang memberikan batas bawah untuk bilangan Ramsey graf dua warna. Sejak adanya penelitian yang dilakukan tentang batas bawah untuk bilangan Ramsey graf dua warna $R(G, H)$, kajian bilangan Ramsey tersebut banyak mengalami kemajuan hingga bilangan Ramsey graf sebarang.

Chvátal dan Harary dalam "*Generalized Ramsey Theory For Graphs, III, Small off-diagonal Number*", menemukan batas bawah secara umum, yaitu $R(G, H) \geq (C(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$. Hasil lainnya adalah $R(K_2, K_2) = 2, R(K_2, K_3) = 3, R(K_{1,3}, K_4) = 10$, dan $R(P_4, K_4) = 10$. Selanjutnya Chvátal dalam "*Tree-Complete Graph Ramsey Number*" memperluas penentuan bilangan Ramsey untuk P_n dan K_4, menjadi penentuan bilangan Ramsey untuk T_n dan K_m yang hasilnya ialah $1 + (m - 1)(n - 1)$.

Selain itu, terdapat beberapa penelitian bilangan Ramsey yang melibatkan graf bintang maupun graf roda di dalamnya, yaitu Noviani dan Baskoro (2016) dalam jurnal

"*Indonesia Journal of Combinatorics*" juga telah menemukan generalisasi bilangan Ramsey, dengan hasil yang ditemukan yaitu $m + 6 \leq R(C_4, W_m) \leq m + 7$, untuk $46 \leq m + 51$. Kemudian pada "Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi" yang terbit tahun 2018, Hasmawati menemukan bilangan Ramsey graf bintang dan graf roda $R(S_4, W_6) = 9$ dan $R(S_n, W_m) = 2n + 1$ untuk $m = n$ dengan n genap dan $n > 4$. Selanjutnya pada tahun 2021, Panloli dalam skripsinya telah menentukan bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf lengkap K_m yaitu $R(S_n, K_m) = (n-1)(m-1) + 1$ dengan metode pembuktian induksi matematika.

Berdasarkan berbagai penelitian tentang bilangan Ramsey yang memuat graf bintang, graf roda, maupun keduanya yang telah ditemukan sebelumnya, maka pada penelitian ini akan dikaji bilangan Ramsey untuk graf bintang S_n untuk $n = 3, 4, 5$ dan graf roda berkepala dua $W_{2,m}$ untuk $m \geq 3$ dengan n, m bilangan asli.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka masalah yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini adalah bagaimana penentuan bilangan Ramsey graf bintang S_n untuk $n = 3, 4, 5$ dan graf roda berkepala dua $W_{2,m}$ untuk $m \geq 3$ dengan n, m bilangan asli.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan sebelumnya, maka penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan Ramsey graf bintang S_n untuk $n = 3, 4, 5$ dan graf roda berkepala dua $W_{2,m}$ untuk $m \geq 3$ dengan n, m bilangan asli.

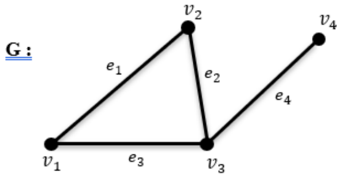
1.4 Landasan Teori

Pada subbab ini akan disajikan beberapa teori dasar yang terkait dengan konsep dasar graf seperti definisi dan contoh graf, derajat titik, titik bertetangga, jalan, lintasan dan siklus, hingga dua graf yang isomorfik.

Definisi 1.4.1 Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan himpunan V adalah himpunan berhingga tak kosong yang elemen-elemennya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Himpunan titik dan himpunan sisi pada graf G biasanya dinotasikan dengan dengan $V(G)$ dan $E(G)$**.** Suatu sisi e di $E(G)$ yang merupakan pasangan tidak terurut dari titik u dan v di $V(G)$ dapat dinyatakan dengan $e = uv$. Jika $uv \neq vu$ maka sisi uv dan vu disebut sisi paralel, sedangkan apabila $u = v$ yakni adanya sisi uu atau vv, maka sisi tersebut disebut lup (*loop*). Apabila $uv = vu$ dan $u \neq v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka graf G disebut **graf sederhana**.

Contoh 1.4.1: Diberikan graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_3v_1,$ $v_3v_4\}$ atau $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.



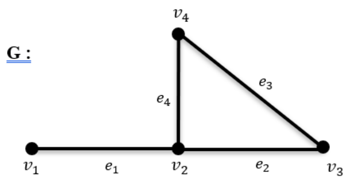
Gambar 1.4.1 Graf G

Pada Gambar 1.4.1, graf G merupakan graf sederhana karena tidak memiliki sisi paralel dan lup.

Definisi 1.4.2 (Derajat Titik). Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dinotasikan dengan $d(v_i)$ adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $\deg(v_i) = |N_G(v_i)|$. Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v)$ yang didefiniskan sebagai berikut $N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$. Dari Definisi 1.4.2, dapat juga didefinisikan $N[v_i] = N(v_i) \cup \{v_i\} = N[v_1] \cup N[v_2] \cup \ldots \cup N[v_i]$.

Derajat minimum suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\ \{d(v): v \in V(G)\}$.

Contoh 1.4.2: Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.



Gambar 1.4.2. Graf G dengan derajat titik

Dari Gambar 1.4.2. diperoleh $N_G(v_1) = \{v_2\}$, $N_G(v_2) = \{v_1,\ v_3, v_4\}$, $N_G(v_3) = \{v_2,\ v_4\}$, dan $N_G(v_4) = \{v_2\}$, Sehingga dapat disimpulkan $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, dan $d(v_4) = 1$. Selain itu, $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$ yaitu pada $d(v_1) = 1$ dan $d(v_2) = 3$.

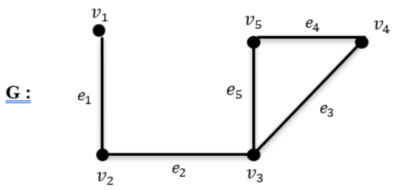
Definisi 1.4.3 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_iv_j$, maka dikatakan bahwa:

1. Titik v_i bertetangga *(adjacent)* dengan titik v_j;
2. Sisi x terkait *(incident)* dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j.

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v)$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$N_G(v) = \{u |\ uv \in E(G)\}.$$

Contoh 1.4.3: Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 1.4.3. Graf G dengan titik-titik dan sisi-sisi yang bertetangga

Dari Gambar 1.4.3, dapat dilihat bahwa titik v_1 bertetangga *(adjacent)* dengan v_2 karena dihubungkan oleh sisi e_1, begitu pula dengan titik v_2 yang bertetangga dengan titik v_1 dan v_3; titik v_3 yang bertetangga dengan titik v_2, v_4, dan v_5; titik v_4 yang bertetangga dengan titik v_3 dan v_5; dan titik v_5 yang bertetangga dengan titik v_3 dan v_4. Hal tersebut dapat dinotasikan sebagai berikut.

$N_G(v_1) = \{v_2\}$, $N_G(v_2) = \{v_1, v_3\}$, $N_G(v_3) = \{v_{2,} v_{4,} v_5\}$, $N_G(v_4) = \{v_3, v_5\}$, dan $N_G(v_5) = \{v_3, v_4\}$.

Adapun untuk sisi e_1 dapat dikatakan terkait *(incident)* dengan titik v_1 dan v_2, sisi e_2 terkait dengan titik v_2 dan v_3, sisi e_3 terkait dengan titik v_3 dan v_4, sisi e_4 terkait dengan titik v_4 dan v_5, dan sisi e_5 terkait dengan titik v_3 dan v_5.

Definisi 1.4.4 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_i : e_i = v_i v_j$ untuk suatu $i, j\}$. Jalan Wl_k pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi:

$$v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k \text{ dengan } e_i = v_i v_{i+1},\ i = 0, 1, 2, .., k-1.$$

Panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Ketika titik awal (v_0) dalam suatu jalan sama dengan titik akhirnya (v_n), maka disebut jalan tertutup. Jalan tertutup yang setiap titiknya berbeda disebut siklus (*cycle*). Jika $v_i \neq v_j$untuk setiap $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, maka W disebut lintasan (*path*).

Definisi 1.4.5 Graf G dengan orde n disebut pansiklik (*pancyclic*) jika G memuat semua siklus C_l dengan $3 \leq l \leq n$, dan disebut pansiklik lemah (*weakly pancylic*) jika G memuat siklus C_h untuk $g(G) \leq h \leq c(G)$, dimana $g(G)$ adalah siklus terkecil dan $c(G)$ adalah siklus terbesar dari G.

Definisi 1.4.6 Suatu pemetaan satu-satu dari $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ dikatakan isomorphisme dari G ke H apabila memenuhi untuk setiap $u, v \in V(G)$ dengan $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\theta(u), \theta(v) \in E(H)$. Dua graf G dan H dikatakan isomorf, jika ada isomorphisme antara G dan H.

Dengan kata lain, dua graf dengan bentuk berbeda dapat dikatakan isomorfik apabila memenuhi syarat berikut:

1. Terdapat pemetaan satu-satu titik di G dan H, sedemikian sehingga $|V(G)| = |V(G)|$;
2. Sisi-sisi yang bertetangga di G juga harus bertetangga di H;
3. Tiap titiknya memiliki derajat yang sama.

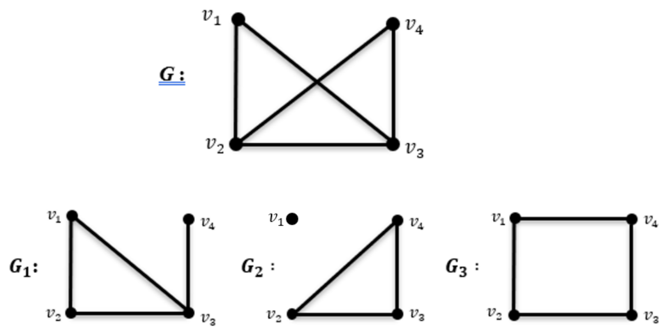
Matriks ketetanggaan (*adjacency*) graf G dan graf H sama, sedemikian sehingga $A(H) = A(G)$.

1.5 Subgraf dan Komplemen Graf

Definisi 1.5.1 Graf H disebut subgraf dari graf G jika himpunan titik di H adalah himpunan bagian dari titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah himpunan bagian dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$. (Chartrand dan Lesniak, 1996)

Subgraf maksimal H dari graf G adalah subgraf yang memenuhi $u, v \in V(H)$, sisi $e = uv \in E(H)$ jika dan hanya jika $uv \in E(G)$. Subgraf G-e adalah subgraf maksimal dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$-$\{e\}$. Sedangkan subgraf G-v adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan titik $V(G)$-$\{v\}$ dan himpunan sisi $E(G)/\{vu: u \in V(G)\}$. Untuk sebarang himpunan titik S dengan himpunan $S \subseteq V(G)$. Subgraf terinduksi $G[S]$ adalah subgraf maksimal dari graf G dengan himpunan titik S. Ini artinya, dua titik bertetangga di $G[S]$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut bertetangga di G.

Contoh 1.5.1: Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_3v_4,\ v_2v_4,\ v_1v_3\}$, graf G_1 dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_3v_4,\ v_1v_3\}$, graf G_2 dengan $V(G_2) = \{v_2, v_3,\ v_4\}$ dan $E(G_2) = \{v_2v_3,\ v_3v_4,\ v_2v_4\}$, serta graf G_3 dengan $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_3) = \{v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_3v_4,\ v_1v_4\}$.



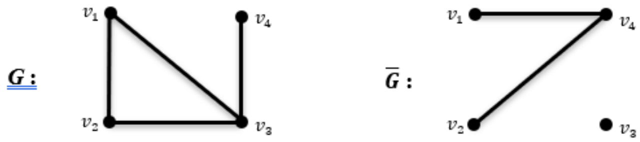
Gambar 1.5.1. Graf G, G_1, G_2, dan G_3

Berdasarkan Gambar 1.5.1 dapat dilihat bahwa graf G_1 dan G_2 merupakan subgraf dari graf G dikarenakan $V(G_1) \subseteq V(G)$ dan $E(G_1) \subseteq E(G)$, juga $V(G_2) \subseteq V(G)$ dan $E(G_2) \subseteq E(G)$. Sedangkan G_3 bukan merupakan subgraf dari G karena walaupun $V(G_3) \subseteq V(G)$, namun $E(G_3) \nsubseteq E(G)$. Selain itu, graf G_1 merupakan subgraf terinduksi dari graf G.

Definisi 1.5.2 Graf F disebut komplemen dari graf G, apabila $V(F) = V(G)$ dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$

(Hasmawati: 2020). Sedangkan menurut Wilson (1996), Jika G adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V(G)$, komplemen $\bar{G}$ adalah graf sederhana dengan himpunan $V(G)$ di mana dua titik bertetangga jika dan hanya jika keduanya tidak bertetangga di G.

Contoh 1.5.2: Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_3v_4, v_1v_3\}$, serta graf $\bar{G}$ dengan $V(\bar{G}\ ) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(\bar{G}\ ) = \{v_2v_4,\ v_1v_4\}$.

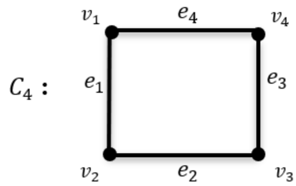


Gambar 1.5.2. Graf G dan komplemennya

1.6 Jenis-jenis Graf

Definisi 1.6.1 (Graf Siklus). Graf berbentuk siklus dengan titik sebanyak $n, n \geq 3$, disebut graf siklus dan ditulis C_n. (Abdussakir dkk, 2009)

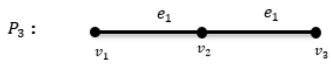
Contoh 1.6.1: Diberikan graf C_4 dengan $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$ atau $E(C_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.



Gambar 1.6.1. Graf siklus C_4

Definisi 1.6.2 (Graf Lintasan). Graf yang yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal disebut graf lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. Dapat diperhatikan bahwa P_n memiliki n-tepi, dan dapat diperoleh dari graf-graf siklus C_n dengn menghapus salah satu sisinya. (Watkins dan Wilson, 1990)

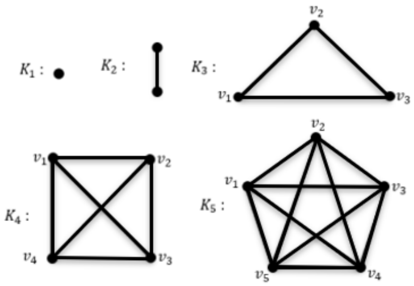
Contoh 1.6.2: Diberikan graf P_3 dengan $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(P_3) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ atau $E(P_3) = \{e_1, e_2\}$.



Gambar 1.6.2. Graf lintasan P_3

Definisi 1.6.3 (Graf Lengkap). Graf G disebut graf lengkap jika setiap dua titik pada G bertetangga, graf lengkap berorde n dinotasikan K_n. Setiap titik pada graf K_n berderajat $n - 1$.

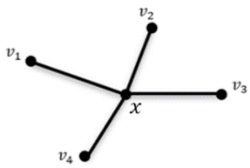
Contoh 1.6.3: Diberikan graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4, dan K_5 seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.6.3. Graf lengkap

Definisi 1.6.4 (Graf Bintang). Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat satu. Graf bintang dapat di tulis $S_n = x + \overline{K}_{n+1}$. Dalam hal ini $x = K_1$.

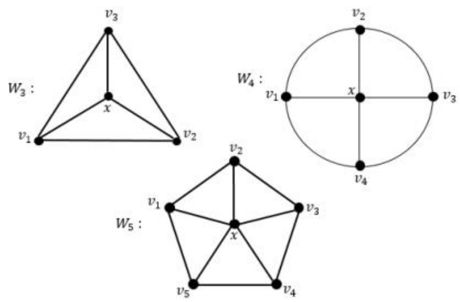
Contoh 1.6.4: Diberikan graf S_5 dengan $V(S_5) = \{x, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(S_5) = \{v_1x, v_2x, v_3x, v_4x\}$.



Gambar 1.6.4. Graf Bintang S_5

Definisi 1.6.5 (Graf Roda). Graf roda dinotasikan W_n adalah suatu graf yang dibentuk dari siklus C_n dengan menambahkan satu titik yaitu x, dan menambahkan n sisi dari titik x ke semua titik di C_n.

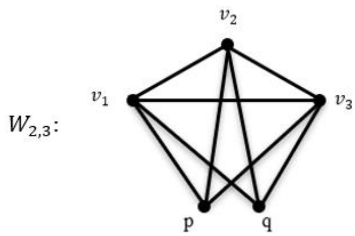
Contoh 1.6.5: Diberikan graf roda W_3, W_4, dan W_5 seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.6.5. Graf roda

Definisi 1.6.6 (Graf Roda berkepala dua). Suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan dua titik pusat p, q yang bertetangga dengan semua titik pada graf siklus disebut graf roda berkepala dua. Graf roda berkepala dua berorde $n + 2$ dinotasikan dengan $W_{2,n}$ atau dalam operasi tambah dapat ditulis $2K_1 + C_n$.

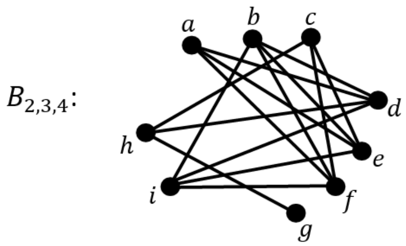
Contoh 1.6.6: Diberikan graf $W_{2,3}$ dengan $V(W_{2,3}) = \{v_1, v_2, v_3, p, q\}$ dan $E(W_{2,3}) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_1p, v_1q, v_2p, v_2q, v_3p, v_3q\}$.



Gambar 1.6.6. Graf roda berkepala dua $W_{2,3}$

Definisi 1.6.7 (Graf Multipartit). Graf G disebut $k - partit$ jika $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam k partisi $V_1, V_2, \dots, V_k$ sehingga setiap sisi $e = uv \in E(G)$, berlaku $u \in V_i$ dan $v \in V_j$ untuk suatu i dan j, $i, j \in \{1,2, \dots, k\}$. Graf $k - partit$ untuk $k \geq 2$ dengan $|V_i| = n_i$ disebut graf multipartit, dinotasikan dengan $B_{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

Contoh 1.6.7: Diberikan graf multipartit $(3 - partit)$ $B_{3,4,2}$ dengan $V(B_{3,4,2}) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ dan $E(B_{3,4,2}) = \{ad, ae, af, bd, be, bf, bi, ce, cf, ch, dh, di, ei, fi, gh\}$.

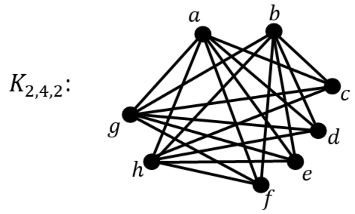


Gambar 1.6.7. Graf graf multipartit $(3 - partit)$ $B_{3,4,2}$

Himpunan $V(B_{3,4,2})$ dapat dipartisi ke dalam 3 partisi V_1, V_2, dan V_3 dengan $V_1 = \{a, b, c\}, V_2 = \{d, e, f, g\}$, dan $V_3 = \{h, i\}$. Dengan partisi ini, setiap sisi di graf $B_{3,4,2}$ mengaitkan suatu titik di partisi satu dengan satu titik di partisi lainnya.

Definisi 1.6.8 (Graf Multipartit Lengkap). Graf multipartit $B_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ disebut graf multipartit lengkap jika setiap titik pada suatu partisi bertetangga dengan setiap titik pada setiap partisi lainnya. Graf multipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

Contoh 1.6.8: Diberikan graf multipartit lengkap $(3 - partit)$ $K_{2,4,2}$ dengan $V(K_{2,4,2}) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan $E(K_{2,4,2}) = \{ac, ad, ae, af, ag, ah, bc, bd, be, bf, bg, bh, cg, ch, dg, dh, eg, eh, fg, fh\}$.



Gambar 1.6.8. Graf graf multipartit $(3 - partit)$ $K_{2,4,2}$

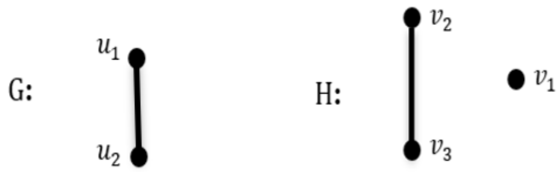
Himpunan $V(K_{2,4,2})$ dapat dipartisi ke dalam 3 partisi V_1, V_2, dan V_3 dengan $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{c, d, e, f\}$, dan $V_3 = \{g, h\}$. Dengan partisi ini, setiap sisi di graf $K_{2,4,2}$ mengaitkan setiap titik di partisi satu dengan setiap titik di partisi lainnya.

1.7 Operasi dalam Graf

Operasi graf merupakan cara mendapatkan bentuk graf baru. Salah satu cara mengoperasi graf ialah menggunakan cara penjumlahan atau tambah (+).

Definisi 1.7.1 Graf hasil operasi tambah $(+)$ antar dua buah graf, sebut graf G dan graf H memiliki $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \in V(G),\ v \in V(H)\}$.

Contoh 1.7.1: Diberikan graf G dan H dengan $V(G) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2\}$ serta $V(H) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ dan $E(H) = \{v_2v_3\}$ sebagai gambar berikut.



Gambar 12. Graf G dan graf H

Graf $G + H$ memiliki;

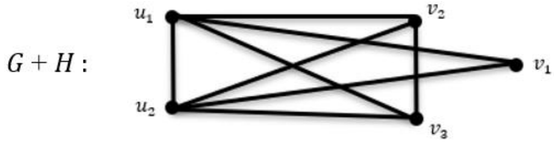
$V(G + H) = V(G) \cup V(H) = \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_2, v_3\} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$

$E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G),\ v \in V(H)\}$

$= \{u_1u_2\} \cup \{v_2v_3\} \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\}$

$= \{u_1u_2, v_2v_3, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\}$

Graf $G + H$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1.7.1. Hasil operasi tambah graf G dan graf H

1.8 Bilangan Ramsey

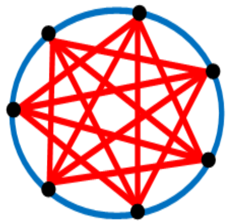
Bilangan Ramsey yang dikenal terdiri atas dua, yaitu bilangan Ramsey klasik dan bilangan Ramsey graf secara umum. Berikut ini adalah definisi bilangan Ramsey klasik.

Definisi 1.8.1 Untuk bilangan bulat positif n dan m, bilangan Ramsey $R(n,m)$ adalah bilangan positif terkecil p sedemikian sehingga setiap graf G dengan p titik, dimana G memuat K_n sebagai subgraf atau $\bar{G}$ memuat K_m sebagai subgraf. Hal ini disebut Bilangan Ramsey Klasik. (Chatrand dan Lesniak, 1986)

Selanjutnya akan dibahas mengenai bilangan Ramsey secara umum untuk sebarang graf. Namun sebelum itu akan dijelaskan tentang definisi dari graf kritis.

Definisi 1.8.2 Suatu graf F disebut graf kritis untuk G dan H jika F tidak memuat G dan $\bar{F}$ tidak memuat H.

Contoh 1.8.2: Misalkan $G = S_4$ dan $H = W_6$. Diberikan $F = C_7$ jadi $|F| = 7$ dan tidak memuat S_4. Komplemen F adalah graf reguler berderajat 4, sedangkan W_6 memuat 1 titik yang berderajat 6, jadi $\bar{F}$ tidak memuat W_6. Pada Gambar 1.8.3, F yang berwarna biru dan $\bar{F}$ berwarna merah.



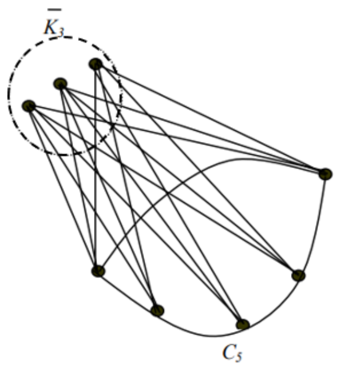
Gambar 1.8.2. Graf F berorde 7

Definisi 1.8.3 Diberikan sebarang dua graf G dan H, bilangan Ramsey graf $R(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan n titik memenuhi bahwa F memuat graf G atau $\bar{F}$ memuat H (Hasmawati, 2015).

Contoh 1.8.3: Diberikan graf bintang S_4 dan graf roda W_6, maka $R(S_4, W_6) = 9$.

Bukti:

Pandang graf $\bar{F} = \overline{K_3} + C_5$. Graf ini berorde 8 dan tidak memuat W_6. Sedangkan graf F adalah graf 2-reguler yang berarti tidak memuat S_4. Jadi graf F adalah graf kritis untuk S_4 dan W_6. Dengan demikian diperoleh $R(S_4, W_6) \geq 9$.



Gambar 1.8.3. Graf $\bar{F} = \overline{K_3} + C_5$

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(S_4, W_6) \leq 9$. Ambil sebarang graf F' dengan $|F'| = 9$. Andaikan F' tidak memuat S_4. Akan ditunjukkan $\overline{F'}$ memuat W_6. Karena F' tidak memuat S_4 maka untuk setiap titik di F' mempunyai derajat paling tinggi 2. Ambil sembarang titik di F' sebut x. Tulis $A = V(F') \backslash N[x]$ dan T adalah subgraf F' yang diinduksi oleh A. Berarti $|T| = A = |V(F')| - |N[x]| = 9 - 3 = 6$ dan setiap titik T berderajat $|T| - 3 \geq 3$. Nilai ini lebih besar atau sama dengan $\frac{|\bar{T}|}{2}$ dan menurut Teorema 1.9.1 T memuat semua siklus C_l dengan $l = 3, 4, 5,$ dan 6 . Berarti T memuat C_6. Titik x bersama-sama C_6 membentuk W_6 di F' . Jadi diperoleh F' memuat S_4 atau $\overline{F'}$ memuat W_6. Karenanya diperoleh $R(S_4, W_6) \leq 9$. Dari kedua ketidaksamaan di atas disimpulkan $R(S_4, W_6) = 9$.

Definisi 1.8.4 (Definisi batas bawah) Diberikan graf G dan $H.$ Batas bawah $R(G, H)$ adalah bilangan asli n sehingga K_n merupakan graf kritis untuk G dan H.

Teorema yang disajikan berikut ini adalah Teorema tentang batas bawah bilangan Ramsey graf secara umum yang diberikan oleh Chvátal dan Harary.

Teorema 1.8.1 Misalkan $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik graf H dan $C(G)$ adalah banyaknya titik pada komponen terbesar graf G, maka $R(G, H) \geq (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$.

Bukti:

Pandang graf $F \coloneqq (\chi(H) - 1)K_{C(G)-1}$. Graf F terdiri atas $\chi(H) - 1$ graf lengkap dengan kardinalitas masing-masing $C(G) - 1$. Dengan demikian, F tidak memuat graf terhubung yang berorde paling sedikit $C(G)$. Akibatnya F tidak memuat G. Komplemen dari F yaitu $\bar{F}$ adalah graf multipartit $K_{(\chi(H)-1)\times(C(G)-1)}$. Jelas $K_{(\chi(H)-1)(C(G)-1)}$ terdiri dari $\chi(H) - 1$ partisi, sehingga tidak memuat graf dengan bilangan kromatik $\chi(H)$. Jadi $\bar{F}$ tidak memuat H. Karenanya, diperoleh $R(G, H) \geq |F| + 1 = (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$.

Contoh 1.8.4: Misalkan $G = S_4$ dan $H = W_4$ untuk m bilangan genap. Maka $\chi(W_4) = 3$ dan $C(S_4) = 4$. Dipilih graf $F = (\chi(W_4) - 1)K_{C(S_4)-1} = (3 - 1)K_{(4-1)} = 2K_3$. Jadi $F = 2K_3$ tidak memuat graf terhubung berorde 4, akibatnya F tidak memuat S_4. Selain itu, $\bar{F} =$

$K_{(3-1)\times(4-1)} = K_{2\times 3}$ adalah graf multipartit yang terdiri dari 2 partisi jadi tidak memuat graf W_4 yang memiliki bilangan kromatik 3, jadi $\bar{F}$ tidak memuat W_4.

Batas bawah yang diberikan oleh Chvátal dan Harary diatas, disebut batas bawah Chvátal-Harary. Dengan adanya batas bawah, bilangan Ramsey $R(G,H)$ secara umum telah diketahui. Dengan demikian, bilangan Ramsey $R(G,H)$ adalah terbatas. $R(G,H)$ terbatas diatas oleh bilangan Ramsey klasik dan terbatas di bawah oleh batas bawah Chvátal-Harary. (Hasmawati, 2007)

1.9 Teorema Bondy

Teorema Bondy adalah teorema yang ditemukan Bondy pada tahun 1971 yang menjamin keberadaan semua siklus yang terdapat pada suatu graf tertentu. Teorema tersebut menyatakan bahwa untuk suatu graf yang derajat terkecilnya adalah setengah dari orde graf tersebut maka graf tersebut memuat semua siklus dari yang terkecil sampai yang terbesar.

Teorema 1.9.1 Misalkan G adalah graf berorde n. Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka G adalah pansiklik atau $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ untuk n genap.

Bukti Teorema 1.9.1 dapat dilihat pada rujukan Hasmawati (2013).

1.10 Hasil Penelitian Terdahulu

Subbab ini akan menyajikan beberapa hasil penelitian sebelumnya tentang bilangan ramsey yang melibatkan graf bintang, roda, maupun keduanya. Hasil-hasilnya disajikan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 1.10.1 Bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf bipartit lengkap $K_{2,q}$ adalah $R(S_n, K_{2,q}) \leq 2n + q - 4$ untuk $n \geq 4$ dan $q \geq 2$. (Rosyida, 2005)

Teorema 1.10.2 Misal $n \in \aleph$ dan $n \geq 5$. $R(S_n, K_{p,q}) \leq (p-1)(n-3) + q$ untuk $3 \leq p \leq n-1$ dan $q \geq 2$. (Rosyida, 2005)

Teorema 1.10.3 Diberikan graf bintang S_n dan graf roda W_m. Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$. (Ramadhani, 2012)

Teorema 1.10.4 Misal C_4 adalah graf siklus dengan empat titik dan W_m adalah graf roda dengan $m + 1$ titik. Maka $R(C_4, W_m) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + 1$ untuk $m \geq 6$. (Sari, 2012)

Teorema 1.10.5 Diberikan graf bintang S_n dan graf roda W_m. Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n - 4$. (Ramadhani, 2012)

Teorema 1.10.6 Bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf roda W_m adalah $R(S_n, W_m) = 2n + 1$ untuk $m = n$ dengan n genap dan $n > 4$. (Hasmawati, 2018)

Teorema 1.10.7 Bilangan Ramsey graf bintang S_4 dan graf roda W_6 adalah $R(S_4, W_6) = 9$. (Hasmawati, 2018)

Teorema 1.10.8 Bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf lengkap K_m adalah $R(S_n, K_m) = (n-1)(m+1)$ untuk n dan m bilangan asli. (Lianto, 2021)

Teorema 1.10.9 Diberikan graf bintang S_{10} dan graf roda W_{12}. Maka $R(S_{10}, W_{12}) = 24$. (Hadaming dan Wahyudi, 2018)

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode penelitian sistematis yang akan dilakukan dengan tujuan untuk memperoleh hasil penelitian yang akan menjawab rumusan masalah. Bab ini terdiri atas jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur penelitian , dan diagram alir penelitian.

2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka atau studi literatur, yaitu dengan mengumpulkan dan menggali pengetahuan dengan bantuan seperti buku-buku, jurnal, dan berbagai penelitian sebelumnya sehingga dapat mengidentifikasi serta merumuskan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

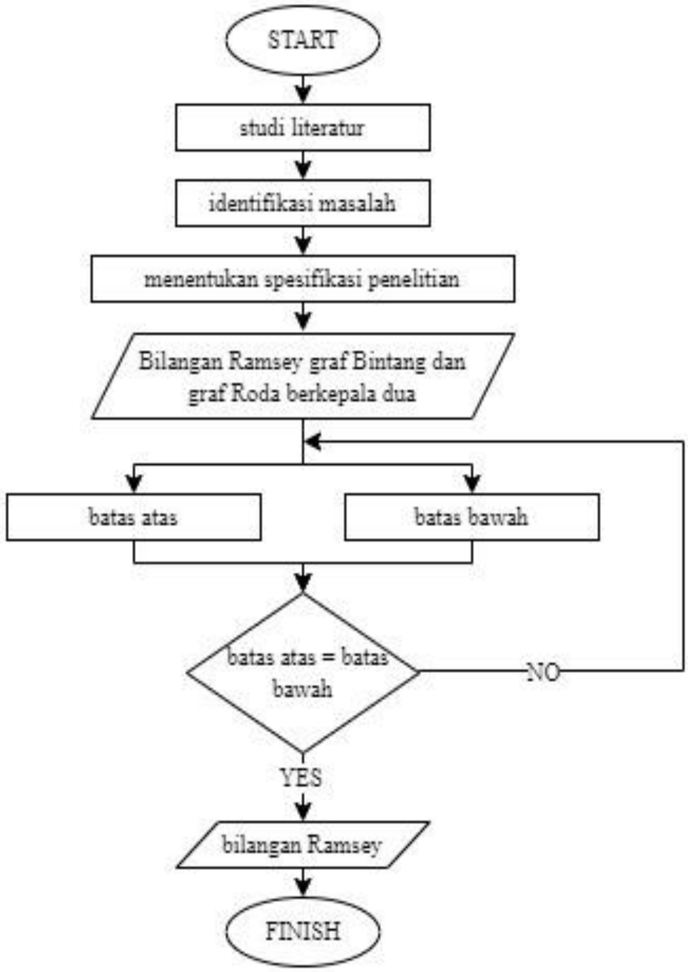
Penelitian ini dilakukan di rumah pribadi, perpustakaan, maupun Laboratorium Aljabar dan Kombinatorika Departemen Matematika FMIPA Unhas, serta bertemu langsung saat bimbingan dengan dosen pembimbing mulai Januari 2024.

2.3 Prosedur Penelitian

Prosedur penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Melakukan studi pustaka tentang bilangan Ramsey;
2. Menentukan jenis graf yang akan diteliti;
3. Menganalisis graf yang telah ditentukan, yaitu:
   a. Menentukan batas bawah bilangan Ramsey menurut Chvátal dan Harary dari graf yang telah ditentukan mulai dari orde terkecil.
   b. Menentukan dan membuktikan batas atas bilangan Ramsey dari graf yang telah ditentukan.
   c. Melihat dan memastikan batas atas dan batas bawah telah sama. Jika batas atas dan batas bawah berbeda, maka kembali ke poin 2. Namun jika batas atas dan batas bawah sama maka dapat dapat dilanjutkan ke tahap berikutnya.
   d. Menemukan dan teorema bilangan Ramsey $R(S_n, W_{2,m}) = i$ dari orde terkecil ke terbesar, untuk $n = 3, 4, 5$ serta $m \geq 3$.
4. Menarik kesimpulan
5. Menulis hasil-hasil yang telah diperoleh dalam bentuk draf skripsi

2.4 Diagram Alir Penelitian



Gambar 2.4.1. *Flowchart* Tahapan Penelitian