PENGOPTIMALAN RUTE DAN PENUGASAN UNTUK MEMINIMASI BIAYA DISTRIBUSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SAVING MATRIX* DAN METODE *HUNGARIAN* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)

FATMAWATI

H011201008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PENGOPTIMALAN RUTE DAN PENUGASAN UNTUK MEMINIMASI BIAYA DISTRIBUSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SAVING MATRIX* DAN METODE *HUNGARIAN* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)

FATMAWATI

H011201008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA – DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PENGOPTIMALAN RUTE DAN PENUGASAN UNTUK MEMINIMASI BIAYA DISTRIBUSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SAVING MATRIX* DAN METODE *HUNGARIAN* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)

FATMAWATI

H011201008

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar Sarjana

Program Studi Matematika

Pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

PENGOPTIMALAN RUTE DAN PENUGASAN UNTUK MEMINIMASI BIAYA DISTRIBUSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SAVING MATRIX* DAN METODE *HUNGARIAN* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)

FATMAWATI

H011201008

Skripsi,

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 22 Juli 2024
dan dinyatakan Telah Memenuhi Syarat Kelulusan

Pada

Program Studi Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Makassar

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

Mengesahkan: Pembimbing Tugas Akhir,	Mengetahui: Ketua Program Studi,
Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. NIP. 19680114 199412 1 001	Dr. Firman, S.Si., M.Si. NIP. 19680429 200212 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Pengoptimalan Rute Dan Penugasan Untuk Meminimasi Biaya Distribusi Dengan Menggunakan Metode *Saving Matrix* Dan Metode *Hungarian* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)" adalah benar karya saya dengan arahan dari bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. sebagai pembimbing. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam daftar pustaka skripsi ini. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku .

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dan karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 22 Juli 2024

Fatmawati

NIM H011201008

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji dan Syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, yang telah melimpahkan Rahmat, Hidayah dan Karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “Pengoptimalan Rute Dan Penugasan Untuk Meminimasi Biaya Distribusi Dengan Menggunakan Metode *Saving Matrix* Dan Metode *Hungarian* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)” dengan baik. Skripsi ini tidak akan terwujud tanpa dukungan, bimbingan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua **(Usman)** dan **(Jamila)** yang telah dengan sabar membesarkan, memberi dukungan dan selalu melangitkan doa-doa baik untuk penulis, dengan segala kerendahan hati, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Jamaluddin Jompa, M.Si.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, serta Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika.
2. Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** selaku pembimbing utama atas ilmu, nasihat, dan kesabaran dalam membimbing serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi sampai skripsi ini selesai.
3. Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.** dan Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku anggota tim penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan ilmu, saran, dan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak/Ibu **Dosen** Departemen Matematika yang telah membagikan ilmu dan pengalamannya, serta **staf Departemen** Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak/Ibu pada perusahaan **CV. Mandala Papua** yang telah mengizinkan dan membantu penulis untuk melakukan penelitian skripsi ini.
6. Saudara-Saudari penulis **Rahmat Usman, Rahmawati, Sarah Alfiah, Kesya Nurul Hasnawaty,** dan **Keluarga Besar Penulis** beserta **Kompleks Pakkarena** yang tiada henti mendukung dan memberi semangat kepada penulis.
7. Sahabat tercinta penulis **Fani Jumiati Mansur** dan **Adinda Putri Abdullah** yang senantiasa menemani dan selalu memberikan semangat, dukungan, serta bantuan baik secara langsung maupun tidak langsung.
8. Sahabat dan teman seperjuangan penulis **Mardiana, Indah Puspita Sari, Nur Atila Ayu, Kemuning Rezky Ramadhani, Lia Faryunisa** dan **Shion Lawa** terima kasih atas segala dukungan dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini.
9. Kekasih penulis **Muhammad Akbar,** yang telah menemani, mendengarkan keluh kesah, memberikan dukungan dan telah menjadi bagian penting dari perjalanan skripsi ini.

10. Teman - teman **MIPA 2020** dan **Matematika 2020** yang telah berjuang bersama sejak awal perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini selesai.
11. **KKN–T Gel.110** desa Wisata Alam Pattallassang, kecamatan Minasatene, terkhususnya kepada **Rahmiyanti, Indah, Sisilia**, dan **Ica** terimakasih sudah membuat kenangan yang sangat berharga selama KKN tanpa kalian mungkin kisah KKN ku tidak semenyenangkan ini.
12. **Diri Sendiri** atas ketekunan, kesabaran, ketabahan dan kerja keras selama menyelesaikan skiripsi ini.
13. Seluruh pihak yang yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah membantu dan memberikan dukungan dalam bentuk apapun.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan dapat memberikan kontribusi yang berarti dalam bidang ilmu yang penulis tekuni.

Penulis,

ABSTRAK

FATMAWATI. **Pengoptimalan Rute Dan Penugasan Untuk Meminimasi Biaya Distribusi Dengan Menggunakan Metode *Saving Matrix* Dan Metode *Hungarian* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua)** (dibimbing oleh Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.)

Latar Belakang. Peningkatan permintaan konsumen menjadi faktor kunci yang mendorong perusahaan untuk meningkatkan efisiensi dalam pendistribusian barang. Distribusi yang efisien merupakan elemen penting dalam rantai pasokan karena berpengaruh langsung terhadap biaya dan kebutuhan konsumen. CV. Mandala Papua, perusahaan pemasok rokok Sampoerna yang beroperasi di Nabire, Papua Tengah sejak tahun 2012, menghadapi tantangan dalam meningkatkan efisiensi distribusi produknya di wilayah Papua Tengah. **Tujuan.** penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan menentukan rute distribusi yang optimal. **Metode.** dengan menggunakan metode *saving matrix*, serta mengoptimalkan alokasi penugasan karyawan untuk meminimumkan waktu distribusi dengan metode *hungarian*. **Hasil**. penelitian menunjukkan bahwa penerapan metode *saving matrix* mampu mengurangi total jarak tempuh distribusi dari 210,46 km menjadi 185,99 km, menghasilkan penghematan jarak sebesar 24,47 km atau 11.62%. Penerapan metode *hungarian* untuk pengoptimalan penugasan karyawan menghasilkan total waktu pengiriman 456 menit, dibandingkan dengan 823 menit sebelum penerapan metode, sehingga terjadi penghematan waktu sebesar 367 menit atau 44.59%. Dari segi biaya, penggunaan metode *saving matrix* mengurangi biaya distribusi tahunan dari Rp152.403.000,00/tahun menjadi Rp151.430.000,00/tahun menghasilkan penghematan sebesar Rp973.000,00/tahun atau 0.64%. **Kesimpulan.** penggunaan metode *saving matrix* dan metode *hungarian* terbukti efektif dalam meningkatkan efisiensi distribusi pada CV. Mandala Papua.

Kata Kunci : Pendistribusian, Metode *Saving Matrix*, Metode *Hungarian*

ABSTRACT

FATMAWATI***. Optimizing routes and assignments to minimize distribution costs using the Saving Matrix method and the Hungarian method (Case Study: CV. Mandala Papua)*** *(supervised by* Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.*)*

Background. *The increase in consumer demand is a key factor that encourages companies to increase efficiency in the distribution of goods. Efficient distribution is an important element in the supply chain because it directly affects costs and consumer needs. CV. Mandala Papua, a Sampoerna cigarette supplier company operating in Nabire, Central Papua since 2012, faces challenges in improving the efficiency of its product distribution in the Central Papua region.* ***Aim.*** *This study aims to analyze and determine the optimal distribution route.* ***Method.*** *using the saving matrix method, as well as optimize the allocation of employee assignments to minimize distribution time with the hungarian method.* ***Result.*** *The results showed that the application of the saving matrix method was able to reduce the total distribution distance from 210.46 km to 185.99 km, resulting in distance savings of 24.47 km or 11.62%. The application of the hungarian method for employee assignment optimization resulted in a total delivery time of 456 minutes, compared to 823 minutes before the implementation of the method, resulting in a time savings of 367 minutes or 44.59%. In terms of cost, the use of the saving matrix method reduces annual distribution costs from Rp152,403,000,00/year to Rp151,430,000,00/year resulting in savings of Rp973,000,00/year or 0.64%.* ***Conclusion.*** *the use of the saving matrix method and the hungarian method has proven effective in increasing distribution efficiency in CV. Mandala Papua.*

Keywords*: Distribution, Saving Matrix Method, Hungarian Method*

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Nomor Urut **Halaman**

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Era globalisasi ekonomi yang dipercepat oleh kemajuan teknologi mendorong perusahaan modern melebarkan sayap dengan membuka pendistribusian ke distributor yang telah berkembang. Tujuannya adalah meningkatkan kinerja dan melaksanakan berbagai kegiatan dengan cepat, akurat, dan efisien sehingga dapat meningkatkan produktivitas secara signifikan (Fanani & Donoriyanto, 2023).

Peningkatan permintaan konsumen menjadi faktor kunci yang mendorong perusahaan untuk meningkatkan efisiensi pendistribusian barang. Distribusi merupakan kunci keuntungan karena secara langsung mempengaruhi biaya rantai pasokan dan kebutuhan konsumen. Jaringan distribusi yang tepat dapat mencapai berbagai tujuan rantai pasokan, mulai dari biaya rendah hingga respons tinggi terhadap permintaan konsumen (Marfuah & Oktaviani, 2015). Oleh karena itu, perusahaan harus memastikan setiap langkah distribusi dijalankan dengan optimal, termasuk pemilihan rute dan penugasan yang efisien.

CV. Mandala Papua merupakan sebuah perusahaan pemasok rokok Sampoerna yang berdiri sejak tahun 2012 dan terletak di jalan merdeka, Nabire, Papua Tengah. CV. Mandala Papua melayani penjualan rokok Sampoerna dan mendistribusikan produknya kepada konsumen di wilayah provinsi Papua Tengah. Tujuan CV. Mandala Papua melakukan pengiriman produk secara tepat dan cepat sesuai dengan permintaan customer yang beragam.

Permintaan yang ada mengharuskan dilakukan pendistribusian dengan jalur dan waktu yang berbeda – beda dengan memaksimalkan kapasitas kendaraan. Penentuan rute yang baik membantu produsen mendistribusikan barang tersebut kepada distributor dengan cepat, tepat dan dalam kondisi yang baik.

Vehicle routing problem (VRP) berkaitan dengan penentuan rute untuk permasalahan pendistribusian barang atau produk yang melibatkan lebih dari satu kendaraan dengan kapasitas tertentu untuk melayani sejumlah pelanggan dengan permintaannya masing – masing. Untuk memenuhi permintaan pelanggan dengan jumlah muatan yang tidak melampaui kapasitas, maka digunakan *capacitated vehicle routing problem* (CVRP) di mana, setiap kendaraan memiliki kapasitas yang terbatas. Pendistribusian setiap kendaraan pengangkut hanya dapat dilaksanakan satu kali pengiriman (Pailin & Kaihatu, 2018).

Metode *saving matrix* merupakan metode dengan penjadwalan distribusi untuk mengoptimalkan rute distribusi dengan meminimumkan jarak yang harus di tempuh. Metode ini membantu pendistribusian produk ke berbagai cabang lebih terjadwal, sehingga perusahaan dapat mengurangi pengeluaran, waktu dan tenaga dalam proses distribusi (Supardi & Sianturi, 2020). Setelah terbentuk rute maka dapat mengoptimalkan penugasan dengan menggunakan metode *hungarian* sebagai masalah penugasan yang dapat di perhatikan pada penugasan *one-objective.* Metode *hungarian* merupakan sebuah algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan optimal. Setiap alokasi yang dihasilkan melalui metode *hungarian* merupakan alokasi optimal, dan ketika diterapkan pada matriks efektivitas awal, akan memberikan hasil pengurangan minimum atau maksimum (Samosir, 2019).

Berdasarkan uraian di atas, maka akan dilakukan penelitian dengan judul **"Pengoptimalan Rute Dan Penugasan Untuk Meminimasi Biaya Distribusi Dengan Menggunakan Metode *Saving Matrix* Dan Metode *Hungarian* (Studi Kasus: CV. Mandala Papua).**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan rute pendistribusian barang yang optimal dengan menggunakan metode *saving matrix*?
2. Bagaimana menentukan alokasi penugasan yang optimal untuk meminimumkan waktu pendistribusian dengan menggunakan metode *hungarian*?
3. Bagaimana biaya transportasi yang diperoleh setelah menggunakan metode *saving matrix* dan metode *hungarian* ?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan-batasan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Data jarak tempuh antar customer diasumsikan akurat dan terkini.
2. Kapasitas produk diasumsikan konstanta.
3. Kebutuhan tenaga kerja diasumsikan konstanta dan akurat.
4. Ketrampilan dan keahlian karyawan diasumsikan homogen.
5. Data terkait CV. Mandala Papua (seperti permintaan, harga, dan biaya lainnya) diasumsikan tersedia.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menganalisis dan menentukan rute baru pendistribusian barang yang optimal dengan menggunakan metode *saving matrix*.
2. Menganalisis dan menentukan alokasi penugasan yang optimal untuk meminimumkan waktu pendistribusian produk dengan menggunakan metode *hungarian*.
3. Menganalisis biaya distribusi setelah menggunakan metode *saving matrix* dan metode *hungarian.*

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagi Penulis

Kepada penulis penelitian ini dapat meningkatkan pengetahuan dan pemahaman tentang metode *saving matrix* dan metode *hungarian*, dapat mengembangkan kemampuan penelitian dan analisis data, serta memberikan pengalaman dalam menyelesaikan masalah di bidang distribusi.

2. Bagi Perusahaan

Penelitian ini diharapkan dapat meningkatkan efisiensi dan efektivitas proses distribusi bagi perusahaan, mengurangi biaya distribusi, dan meningkatkan kualitas yang diterima konsumen serta meningkatkan daya asing perusahaan.

3. Bagi Pembaca

Penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca dengan memberikan informasi dan pengetahuan tentang metode *saving matrix* dan metode *hungarian*, dalam contoh penerapannya dalam optimalisasi proses distribusi, dan memberikan masukan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

1.6 Landasan Teori

1.6.1 Riset Operasi

Riset operasi adalah suatu pendekatan ilmiah yang menggunakan model matematika, statistika, dan algoritma untuk memecahkan masalah kompleks dalam berbagai bidang. Tujuan dari riset operasi adalah menemukan solusi terbaik untuk suatu masalah dengan mempertimbangkan berbagai faktor yang terlibat.

Definisi riset operasi menurut Miller dan Star adalah peralatan manajemen yang memaduserasikan ilmu pengetahuan, matematika dan logika dalam pemecahan masalah secara optimal secara umum dapat diartikan bahwa riset operasi berkaitan erat dengan sistem pengambilan keputusan yang optimal (*optimal decision support system*) yang dimulai dengan penyusunan model dari sistem-sistem masalah yang dihadapi, baik bersifat deterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata (Rangkuti A, 2022).

1.6.2 Pemrograman Linear

Menurut (Rangkuti A, 2022) *pemrograman linear* (PL) merupakan suatu metode untuk membuat keputusan di antara berbagai alternatif kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan tersebut dibatasi oleh kegiatan tertentu. Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan *(objective function),* sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi kendala *(constraints).* Bentuk umum model program linear sebagai berikut :

Minimalkan :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.1)$$

Dengan batasan :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \geq b_i \qquad \text{untuk i} = 1,2,3,\ldots,\text{m} \qquad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{untuk j} = 1,2,3,\ldots,\text{n} \qquad (2.3)$$

Keterangan :

Z : Fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya (maksimal atau minimal)

c_j : Kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan x_j dengan satu satuan unit atau sambungan setiap satuan keluaran kegiatan j terhadap Z

n : Macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia

m : Macam batasan sumber atau fasilitas yang tersedia

x_j : Tingkat kegiatan $ke - j$

a_{ij}: Banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unsur keluaran kegiatan j

b_i : Kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan

Secara umum untuk model program linear dapat kita rangkaikan sebagai berikut (Rangkuti A, 2022) :

1. Fungsi yang akan dicari nilai optimalnya (Z) disebut fungsi tujuan *(objective function)* dapat berupa maksimal atau minimal.
2. Fungsi yang memengaruhi persoalan terhadap fungsi tujuan akan dicapai disebut dengan fungsi batasan atau kendala *(constraints function)* yang merupakan ketidaksamaan dan persamaan.
3. Variabel yang memengaruhi persoalan dalam pengambilan keputusan disebut variabel keputusan *(decision variabel)* yang berupa *non–negative*.

1.6.3 Transportasi

Transportasi adalah kegiatan memindahkan barang ataupun manusia dari tempat asal ke tempat tujuan. Prosesnya meliputi perpindahan dari tempat asal, di mana kegiatan angkutan di mulai ke tempat tujuan dan di mana kegiatan transportasi diakhiri (Mardika & Achmadi, 2022).

Menurut (Rangkuti A, 2022) metode transportasi digunakan untuk meminimumkan biaya transportasi barang atau komoditi dari beberapa lokasi sumber ke beberapa lokasi tujuan. Proses transportasi adalah tahap distribusi barang atau jasa dari produsen ke konsumen. Untuk memecahkan masalah transportasi, para manajer menggunakan bidang ilmu riset operasi.

1.6.4 Distribusi

Distribusi merupakan elemen vital dalam bisnis perusahaan, di mana ia berperan sebagai jembatan penghubung antara produk dan konsumen. Aktivitas ini merupakan bagian integral dari strategi pemasaran perusahaan, dengan tujuan utama untuk memperlancar dan mempermudah penyampaian barang dan jasa kepada konsumen. Proses distribusi dirancang untuk menyebarkan produk secara merata, menjangkau konsumen di berbagai lokasi, dan memastikan produk tersedia di tempat dan waktu yang tepat. Hal ini dicapai melalui kolaborasi dengan distributor, yang bertindak sebagai perantara untuk memasarkan produk perusahaan kepada konsumen.

Saluran distribusi menjadi infrastruktur penting dalam proses ini. Saluran ini merupakan struktur bisnis yang terhubung, mulai dari perusahaan/organisasi, bergerak melalui distributor, penjual hingga mencapai konsumen akhir (Nadya, dkk, 2023).

1.6.5 Travelling Salesman Problem (TSP)

Travelling salesman problem (TSP) merupakan permasalahan optimasi untuk menentukan rute terpendek bagi seorang *salesman* dalam mengantarkan barang kepada *klien*. *Traveling salesman problem* (TSP) juga salah satu permasalahan di mana *salesman* harus melalui setiap simpul (kota) tepat satu kali, kecuali simpul asal (akhir) yang dilalui dua kali. *Travelling salesman problem* (TSP) dapat diselesaikan dengan metode optimasi yang memiliki fungsi tujuan dan kendala (Chaerunnisa & Respitawulan, 2021).

Variabel keputusan :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{rute yang dilewati dari } i \text{ ke } j \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi tujuan :

$$min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \qquad (2.4)$$

Batasan – batasan :

1. *Salesman* mengunjungi kota i satu kali.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \qquad (2.5)$$

2. *Salesman* melewati kota j satu kali.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \qquad (2.6)$$

Keterangan :

$Min\ z$: Fungsi tujuan

d_{ij} : Jarak kota i ke kota j

i : Kota awal

j : Kota tujuan

1.6.6 Vehicle Routing Problem (VRP)

Permasalahan *vehicle routing problem* (VRP) merupakan suatu permasalahan yang berfokus pada pendistribusian barang dari gudang perusahaan kepada pelanggan dalam kurun waktu yang telah ditentukan dengan menggunakan kendaraan tertentu. Solusi *vehicle routing problem* adalah rute-rute yang dapat ditempuh kendaraan untuk mengantarkan seluruh permintaan pelanggan. Setiap rute ditempuh oleh satu kendaraan yang berawal dan berakhir di gudang (Kurniawan & Nugroho, 2022).

Menurut Toth dan Vigo (2002) *vehicle routing problem* (VRP) didefinisikan sebagai *graf* $G = (V, E)$ dengan himpunan simpul $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi E. Pada simpul v_0 terdapat himpunan kendaraan $K = \{k_0, k_1, k_2, \dots, k_n\}$ dengan kapasitas yang sama. Setiap pelanggan $(v_1, v_2, \dots, v_n\}$ memiliki banyaknya permintaan yang sudah diketahui dan harus di penuhi sebanyak q. Setiap simpul dari i ke j memiliki jarak tempuh sebesar $c_{i,j}$ yang diasumsikan simetrik, artinya $c_{i,j}$ = $c_{j,i}$ dan $c_{i,i}$ = 0 dan $c_{j,j}$ = 0. *Vehicle routing problem* dapat diformulasikan ke dalam bentuk matematika dengan tujuan meminimumkan total jarak tempuh dari kendaraan (Widyastiti & Sumarsa, 2022).

Didefinisikan variabel keputusan sebagai berikut :

$$x_{i,j}^k = \begin{cases} 1, \text{jika konsumen } i \text{ dilayani setelah konsumen } j \text{ dengan kendaraan } k \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan fungsi tujuan adalah meminimumkan total jarak tempuh kendaraan, dan dapat ditulis sebagai berikut :

$$min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{i,j} x_{i,j}^k \tag{2.7}$$

Fungsi Objektif :

1. Tidak semua kendaraan akan keluar dari depot.

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1,j}^k = 1, \quad \forall k = 1,2,3, \dots, K \tag{2.8}$$

2. Setiap konsumen dikunjungi satu kali.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{i,j}^k = 1, \qquad \forall j = 1,2,3, \dots, n \tag{2.9}$$

3. Kekontinuan rute.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n} x_{i,p}^{k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} x_{p,j}^{k} = 0, \ \forall k = 1,2,3,\dots,K; \ \forall p = 2,3,\dots,n \tag{2.10}$$

4. Kendala kapasitas kendaraan.

$$\sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 2}}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i x_{i,j}^{k} \leq \alpha_k, \quad \forall k = 1,2,3,\dots,K \tag{2.11}$$

5. Waktu konsumen mulai dilayani.

$$u_i^k - u_j^k + n x_{i,j}^k \leq n - 1 \ (i \neq j = 2,3,\dots,n) \tag{2.12}$$

Keterangan :

K : Himpunan kendaraan

V : Himpunan titik

E : Himpunan sisi

$d_{i,j}$: Jarak dari konsumen i ke konsumen j

$c_{i,j}$: Jarak tempuh dari i ke j

q : Banyaknya permintaan konsumen i

a : Kapasitas kendaraan k

1.6.7 Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)

Capacitated vehicle routing problem (CVRP) adalah salah satu jenis permasalahan *vehicle routing problem* (VRP) yang mempertimbangkan kapasitas kendaraan. Setiap kendaraan harus melayani pelanggan tanpa melebihi kapasitasnya. Tujuan utama dari CVRP adalah meminimumkan total jarak tempuh kendaraan dan jumlah kendaraan yang digunakan (Hutomo & Sari, 2017). *Capacitated vehicle routing problem* (CVRP) melibatkan kendaraan homogen berkapasitas terbatas untuk memenuhi permintaan pelanggan, dengan tujuan mengoptimalkan rute untuk mengurangi biaya bahan bakar, biaya pengemudi, dan biaya kendaraan (Patmawati & Nugroho, 2022).

Menurut El Hassani (2008), *capacitated vehicle routing problem* (CVRP) didefinisikan sebagai graf berarah $G = (V, A)$ dengan himpunan titik $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $A = \{(v_i, v_j): i \neq j\}$ menunjukkan himpunan sisi yang menghubungkan dua titik. Titik v_0 menunjukkan gudang dan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menunjukkan konsumen. Sebuah nilai *non – negative* $d_{i,j}$ nilai ini yang menunjukkan jarak antara titik v_i dan titik v_j pada biaya atau waktu antara dua buah titik. Permintaan (*demand*) q_i atau waktu pelayanan $\delta_i(q_0 = 0, \delta_0 = 0)$ dihubungkkan dengan tiap titik v_i. *Capacitated vehicle routing problem* (CVRP) dapat diformulasikan ke dalam bentuk matematis dengan tujuan meminimumkan total jarak tempuh dari kendaraan (Suheri, 2017).

Variabel keputusan didefinisikan sebagai berikut :

$$x_{i,j}^{k} = \begin{cases} 1, \text{jika kendaraan } k \text{ mengunjungi konsumen } j \text{ secara langsung setelah } i \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

$$y_{i,j}^{k} = \begin{cases} 1, \ \text{jika konsumen } i \text{ telah dilayani oleh kendaraan } k \\ 0, \ \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan fungsi biaya :

$$cost\ (X) \ = \sum_{k \in K}^{n} \sum_{i \in V}^{n} \sum_{j \in V}^{n} d_{i,j} x_{i,j}^{k} \tag{2.13}$$

Dengan fungsi objektif

$$min\ cost\ (X) \ = min \sum_{k \in K}^{n} \sum_{i \in V}^{n} \sum_{j \in V}^{n} d_{i,j} x_{i,j}^{k} \tag{2.14}$$

Dengan kendala sebagai berikut :

1. Setiap konsumen hanya dikunjungi satu kali oleh satu kendaraan.

$$\sum_{k \in K}^{n} \sum_{j \in V}^{n} x_{i,j}^{k} \ = \ 1, \qquad \forall\, i \ \in \ V \tag{2.15}$$

2. Setelah tiba di konsumen j dari konsumen i, kendaraan harus berangkat menuju tujuan berikutnya.

$$\sum_{j \in V}^{n} x_{i,j}^{k} \ - \ \sum_{j \in V}^{n} x_{j,i}^{k} \ = \ 0, \qquad \forall\, i \ \in \ V, k \ \in K \tag{2.16}$$

3. Semua armada kendaraan k berangkat dari gudang.

$$\sum_{j \in V}^{n} x_{0,j}^{k} \ = \ 1, \quad \forall k \ \in \ K \tag{2.17}$$

4. Semua kendaraan harus kembali ke depot $n + 1$.

$$\sum_{j \in V}^{n} x_{j,n+1}^{k} \ = 1, \quad \forall k \ \in \ K \tag{2.18}$$

5. Jika kendaraan k mengunjungi j dari i, maka muatan kendaran k ketika sampai di konsumen j akan sama dengan muatan kendaraan k pada konsumen i dikurangi dengan permintaan konsumen j.

$$x_{i,j}^{k} \ = \ 1 \ \Rightarrow \ y_i \ - \ q_j \ = \ y_j, \qquad \forall i, j \ \in \ V, k \in \ K \tag{2.19}$$

6. Jika kendaraan k mengunjungi j dari i, maka muatan kendaraan k di j sama dengan muatan di i dikurangi permintaan j. Muatan di j = muatan di i – permintaan j.

$$y_0 = Q, 0 \le y_i, \forall i \in V \quad (2.20)$$

Keterangan :

V : Himpunan titik

A : Himpunan sisi yang menghubungkan titik v_i dan titik v_j

K : Kendaraan yang digunakan

Q : Kapasitas kendaraan (bersifat homogen)

q_i : Permintaan dari konsumen

$d_{i,j}$: Jarak antar titik v_i dan titik v_j

1.6.8 Metode *Saving Matrix* (Matriks Penghematan)

Metode *saving matrix* merupakan alat yang ampuh untuk merencanakan rute distribusi produk kepada pelanggan secara efisien dan optimal. Metode ini adalah menemukan penghematan yang dihasilkan dengan menggabungkan dua atau lebih lokasi/pelanggan ke dalam satu armada. Penghematan ini dapat diukur berdasarkan jarak, waktu, dan biaya (Rhamdani, dkk, 2023).

Adapun langkah – langkah yang digunakan untuk menghitung menggunakan metode *saving matrix* sebagai berikut :

1. Mengidentifikasi dan Menentukan matriks jarak

Menentukan matriks jarak merupakan langkah krusial dalam merencanakan rute distribusi yang efisien dan optimal, dalam menghitung jarak antara gudang dan masing – masing cabang/pelanggan, serta jarak antar konsumen dalam rute distribusi, terdapat dua metode utama :

a. Rumus jarak standar

Metode ini menggunakan rumus sebagai berikut :

$$Dist\ (A, B) = \sqrt{(Xa - Xb)^2} + \sqrt{(Ya - Yb)^2} \quad (2.21)$$

Keterangan:

$Dist(A, B)$: Distribusi titik A dan titik B

Xa : Titik koordinat X di titik A

Xb : Titik koordinat X di titik B

Ya : Titik koordinat Y di titik A

Yb : Titik koordinat Y di Titik B

b. Pengukuran langsung

Dalam pengukuran langsung tingkat akurasi yang lebih tinggi dengan mengukur jarak secara langsung. Pengukuran langsung dapat dilakukan dengan menggunakan aplikasi *google maps*. Aplikasi ini memberikan jarak real–time dengan memperhitungkan kondisi lalu lintas. Selain menggunakan *google maps* pengukuran langsung juga dapat diukur manual dengan menggunakan alat ukur jarak seperti meteran, atau odometer. untuk mendapatkan jarak yang lebih presisi. Bentuk umum matriks jarak ini dapat dilihat pada tabel sebagai berikut :

Tabel 1 Bentuk Umum Matriks Jarak

	p_0						
p_0	0	p_1					
p_1			p_i				
p_i	C_{0i}			...			
...					p_j		
p_j			C_{ij}			...	
...							p_n
p_n							0

Sumber: Pramudita, 2020

Keterangan :

p_0 : Depot

p_i : Titik ke i

p_j : Titik ke j

C_{0i} : Jarak dari depot ke titik $i =$ jarak dari titik i ke depot

C_{ij} : Jarak dari titik i ke titik $j =$ jarak dari titik j ke titik i

2. Menentukan *saving matrix*

Saving merupakan konsep penting dalam metode *saving matrix* yang digunakan untuk menghitung rute distribusi yang optimal. *saving* didefinisikan sebagai penghematan jarak yang diperoleh dengan menggabungkan dua rute menjadi satu rute baru.

Rumus umum untuk menghitung *saving* adalah sebagai berikut :

$$S(i,j) = C(i,0) + C(0,j) - C(i,j) \tag{2.22}$$

Keterangan :

$S(i,j)$: Jarak antara titik i dan j

$C(i,0)$: Jarak dari titik i ke titik awal

$C(0,j)$: Jarak dari titik awal ke titik j

$C(i,j)$: Jarak dari titik i ke titik j sebelum digabungkan

3. Membentuk *saving matrix* (matriks penghematan)

Saving matrix adalah elemen penting dalam metode *saving matrix* untuk menghitung rute distribusi optimal. Matriks ini berukuran $(n + 1) \times (n + 1)$, di mana n adalah jumlah titik distribusi atau pelanggan. Matrix ini memiliki baris dan kolom sebanyak jumlah titik distribusi ditambah satu. Dengan elemen diagonal bernilai nol karena tidak ada *saving* antara suatu titik dengan dirinya sendiri. Bentuk umum dari matriks penghematan dapat dilihat dari tabel sebagai berikut :

Tabel 2 Bentuk Umum Matriks Penghematan (*Saving Matrix*)

	p_0						
	0	p_1					
		0	p_i				
...	C_{0j}		0	...			
q_i				0	p_j		
q_j			$t_{ij}S_{ij}$		0	...	
...						0	p_n
q_n							0

Sumber: Pramudita, 2020.

Keterangan :

q_i : Permintaan titik ke$-i$

q_j : Permintaan titik ke$-j$

p_0 : Depot

p_i : Titik ke$-i$

p_j : Titik ke$-j$

S_{ij} : Nilai penghematan jarak dari titik i ke titik j

Nilai-nilai dalam t_{ij} menentukan apakah kombinasi p_i dengan p_j berada dalam satu rute. Petunjuk ini mempunyai nilai-nilai berikut:

t_{ij} : 0, jika titik tidak dihubungkan oleh satu rute kendaraan

1, jika dua titik dihubungkan pada satu rute kendaraan

2, jika titik dilayani tersendiri oleh satu kendaraan

Matriks penghematan tidak menunjukkan *entri* (titik) secara langsung. Pada awalnya, diasumsikan bahwa setiap *entri* dilayani oleh satu kendaraan $t_{ij} = 2$ yang berarti satu kendaraan dipakai untuk melayani masing-masing titik. Proses berulang dilakukan untuk mengevaluasi setiap matriks penghematan dan mencari kemungkinan perbaikan rute. Prosedur ini mencari penghematan terbesar dalam matriks dengan megikuti kondisi berikut untuk setiap sel (i, j):

- $t_{i,0}\ dan\ t_{j,0}\ =\ 0$
- p_i dan p_j belum dialokasikan pada jalur kendaraan yang sama.

• Memperbaiki matriks penghematan, dengan memindahkan kendaraan kendaraan yang dialokasikan pada muatan q_i dan q_j serta menambah sebuah kendaraan untuk menutup muatan q_i dan q_j tidaklah menyebabkan kendaraan-kendaraan yang tersedia dalam setiap kolom dari matriks penghematan.

4. Pengalokasian konsumen dan rute berdasarkan lokasi

Setelah menghitung nilai *saving* untuk setiap kombinasi dua rute, langkah selanjutnya adalah mengurutkan nilai *saving* dalam *matrix saving*. Pengurutan ini dilakukan dari yang terbesar ke yang terkecil. Tujuan pengurutan ini adalah untuk memprioritaskan kombinasi dua rute dengan *saving* terbesar dalam proses penyusunan rute distribusi. Rute dengan *saving* terbesar berpotensi memberikan penghematan jarak yang paling signifikan.

5. Pengurutan lokasi tujuan dalam suatu rute

Penyusunan rute baru merupakan langkah akhir dalam metode *saving matrix*. Rute baru dibentuk dengan menggabungkan dua rute yang memiliki *saving* terbesar pada *matrix saving*. Proses ini dilakukan secara berulang hingga semua titik distribusi atau pelanggan terhubung dalam satu rute yang teroptimasi. Untuk menentukan rute baru maka dapat digunakan metode pengurutan konsumen sebagai berikut :

a. Nearest Neighbor

Metode *nearest neighbor* adalah metode untuk meminimumkan jarak tempuh total dengan memasukkan konsumen yang terdekat dari titik terakhir yang dikunjungi oleh kendaraan sampai semua konsumen terkunjungi.

b. Nearest Insert

Metode *nearest insert* adalah metode untuk meminimumkan jarak tempuh total dengan memasukkan konsumen memberikan perjalanan terpendek setiap langkahnya dengan memperhatikan kenaikan jarak tempuh minimum konsumen yang dimasukkan dalam rute (Mardika & Achmadi, 2022).

1.6.9 Contoh Kasus Metode *Saving Matrix* (Matriks Penghematan)

Contoh kasus ini diambil dari beberapa data yang ada pada jurnal; Fanani & Donoriyanto tahun 2023 dengan judul “Analisis Penentuan Rute Distribusi Makanan Ringan Menggunakan Metode *Saving Matrix* pada UD.XYZ”.

UD.XYZ merupakan perusahaan *Supplier* makanan ringan yang berdiri sejak tahun 2016. Perusahaan UD.XYZ memiliki biaya distribusi awal sebesar Rp170.772.464,00 pada tahun 2022. Perusahaan ini juga memiliki sembilan agen yang terletak dibeberapa wilayah yang berbeda dan memiliki lima kendaraan angkut yang beroperasi dengan kapasitas maksimal kendaraan sebesar 4.000 kg. Perusahaan tersebut juga memiliki 8 rute distribusi awal dengan total jarak tempuh 2,997,7 km. Dengan jadwal pengiriman bahwa 1 bulan 2x pengiriman dari gudang ke agen, maka

Jarak ini dianggap tidak efisien, sehingga diperlukan optimasi rute untuk meminimumkan waktu dan biaya transportasi. Berikut merupakan data-data yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan transportasi pada perusahaan UD.XYZ. yaitu :

Tabel 3 Data Rata – Rata Permintaan (kg)

No.	Kode	Kota	Rata – Rata Permintaan (kg)
1.	A1	Sidoarjo	2.000
2.	A2	Surabaya	1.923
3.	A3	Pasuruan	497
4.	A4	Probolinggo	963
5.	A5	Ponorogo	1.370
6.	A6	Lumajang	296
7.	A7	Jember	1.289
8.	A8	Banyuwangi	1.035
9.	A9	Malang	1.494

Sumber: UD.XYZ, Tahun 2023.

Tabel 3 diketahui bahwa rata – rata permintaan agen dengan masing – masing agen adalah agen A1 sebesar 2000, agen A2 sebesar 1.923, agen A3 sebesar 497, agen A4 sebesar 963, agen A5 sebesar 1.370, agen A6 sebesar 296, agen A7 sebesar 1.289, agen A8 sebesar 1.035 dan agen A9 sebesar 1.494.

Tabel 4 Data Jarak Gudang Ke Agen (km)

No.	Kode Gudang (A0) ke Agen	Jarak Gudang ke Agen (km)
1.	A0 – A1	3,7
2.	A0 – A2	22
3.	A0 – A3	41
4.	A0 – A4	83
5.	A0 – A5	201
6.	A0 – A6	126
7.	A0 – A7	171
8.	A0 – A8	281
9.	A0 – A9	67

Sumber: UD.XYZ, Tahun 2023.

Tabel 4 data Jarak gudang ke agen yang didapatkan dengan menggunakan aplikasi *google maps* berdasarkan data lokasi gudang dan seluruh agen.

Tabel 5 Data Biaya distribusi

No.	Elemen Biaya	Biaya (Rp)
1.	Biaya Bahan Bakar : Solar	6.800,00/Liter
2.	Biaya Retribusi	200.000,00/perjalanan
3.	Gaji Sopir	3.000.000,00/Bulan

Sumber: UD.XYZ, Tahun 2023

Keterangan Tabel 5 :

- 1 Liter Solar dapat menempuh jarak $\pm$ 10 km
- Biaya Retribusi : Biaya parkir, Biaya tol, dan lain – lain.

Tabel 6 Data Rute awal Perusahaan, total jarak dan total permintaan

No.	Kode Rute	Total Jarak (km)	Total Permintaan (kg)
1.	A0-A1-A2-A0	62,7	3.968
2.	A0-A3-A4-A0	172	1.460
3.	A0-A5-A0	402	1.370
4.	A0-A6-A7-A0	365	1.585
5.	A0-A8-A0	562	1.035
6.	A0-A9-A0	134	1.494

Sumber: UD.XYZ,Tahun 2023.

Tabel 6 diketahui bahwa rute awal agen dengan jarak tempuh pada setiap rute awal di hitung berdasarkan data jarak agen dengan asumsi jarak berangkat sama dengan jarak kembali.

Langkah 1 mengidentifikasi dan menentukan matriks jarak

Tabel 7 Matriks Jarak Gudang dan Agen (km)

Kode konsumen	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A0	0									
A1	3,7	0								
A2	22	37	0							
A3	41	42	73	0						
A4	83	82	113	48	0					
A5	201	202	198	237	279	0				
A6	126	125	156	92	52	324	0			
A7	171	167	198	133	94	365	68	0		
A8	281	272	303	238	192	478	174	107	0	
A9	67	66	97	74	117	264	88	200	315	0

Sumber: UD.XYZ, Tahun 2023

Tabel 7 Matriks Jarak gudang dan agen di peroleh dan dihitung dengan menggunakan aplikasi *google maps.* Perhitungan ini didasarkan pada data lokasi gudang dan seluruh agen yang terdaftar.

Langkah 2 perhitungan *saving matrix*

Perhitungan Matriks penghematan (*saving matrix*) dihitung menggunakan persamaan rumus 2.22, maka menghasilkan sebagai berikut :

Tabel 8 Perhitungan Matriks Penghematan (*Saving Matrix*)(Km)

$S(A1, A2)$	$= C(A1,0) + C(0, A2) - C(A1, A2)$ $= 3{,}7 + 22 - 37 = 11{,}3$	$S(A3, A4)$	$= C(A3,0) + C(0, A4) - C(A1, A2)$ $= 3{,}7 + 22 - 37 = 11{,}3$
$S(A1, A3)$	$= C(A1,0) + C(0, A3) - C(A1, A3)$ $= 3{,}7 + 41 - 42 = 2{,}7$	$S(A3, A5)$	$= C(A3,0) + C(0, A5) - C(A3, A5)$ $= 41 + 201 - 237 = 5$
$S(A1, A4)$	$= C(A1,0) + C(0, A4) - C(A1, A4)$ $= 3{,}7 + 83 - 82 = 4{,}7$	$S(A3, A6)$	$= C(A3,0) + C(0, A6) - C(A3, A6)$ $= 41 + 126 - 92 = 75$
$S(A1, A5)$	$= C(A1,0) + C(0, A5) - C(A1, A5)$ $= 3{,}7 + 201 - 202 = 2{,}7$	$S(A3, A7)$	$= C(A3,0) + C(0, A7) - C(A3, A7)$ $= 41 + 171 - 133 = 79$

$S(A1, A6)$	$= C(A1,0) + C(0, A2) - C(A1, A2)$ $= 3{,}7 + 126 - 125 = 4{,}7$	$S(A3, A8)$	$= C(A3,0) + C(0, A8) - C(A3, A8)$ $= 41 + 281 - 238 = 84$
$S(A1, A7)$	$= C(A1,0) + C(0, A7) - C(A1, A7)$ $= 3{,}7 + 171 - 167 = 7{,}7$	$S(A3, A9)$	$= C(A3,0) + C(0, A9) - C(A3, A9)$ $= 41 + 67 - 74 = 34$
$S(A1, A8)$	$= C(A1,0) + C(0, A8) - C(A1, A8)$ $= 3{,}7 + 281 - 272 = 12{,}7$	$S(A4, A5)$	$= C(A4,0) + C(0, A5) - C(A4, A5)$ $= 83 + 201 - 279 = 5$
$S(A1, A9)$	$= C(A1,0) + C(0, A9) - C(A1, A9)$ $= 3{,}7 + 67 - 66 = 4{,}7$	$S(A4, A6)$	$= C(A4,0) + C(0, A6) - C(A4, A6)$ $= 83 + 126 - 52 = 157$
$S(A2, A3)$	$= C(A2,0) + C(0, A3) - C(A2, A3)$ $= 22 + 41 - 73 = 10$	$S(A4, A7)$	$= C(A4,0) + C(0, A7) - C(A4, A7)$ $= 83 + 171 - 94 = 160$
$S(A2, A4)$	$= C(A2,0) + C(0, A4) - C(A2, A4)$ $= 22 + 83 - 113 = 8$	$S(A4, A8)$	$= C(A4,0) + C(0, A8) - C(A4, A8)$ $= 83 + 281 - 192 = 172$
$S(A2, A5)$	$= C(A2,0) + C(0, A5) - C(A2, A5)$ $= 22 + 201 - 198 = 25$	$S(A4, A9)$	$= C(A4,0) + C(0, A9) - C(A4, A9)$ $= 83 + 67 - 117 = 33$
$S(A2, A6)$	$= C(A2,0) + C(0, A6) - C(A2, A6)$ $= 22 + 126 - 156 = 8$	$S(A5, A6)$	$= C(A5,0) + C(0, A6) - C(A5, A6)$ $= 201 + 126 - 324 = 3$
$S(A2, A7)$	$= C(A2,0) + C(0, A7) - C(A2, A7)$ $= 22 + 171 - 198 = 5$	$S(A5, A7)$	$= C(A5,0) + C(0, A7) - C(A5, A7)$ $= 201 + 171 - 365 = 7$
$S(A2, A8)$	$= C(A2,0) + C(0, A8) - C(A2, A8)$ $= 22 + 281 - 303 = 0$	$S(A5, A8)$	$= C(A5,0) + C(0, A8) - C(A5, A8)$ $= 201 + 281 - 478 = 4$
$S(A2, A9)$	$= C(A2,0) + C(0, A9) - C(A2, A9)$ $= 22 + 67 - 97 = 8$	$S(A5, A9)$	$= C(A5,0) + C(0, A9) - C(A5, A9)$ $= 201 + 67 - 264 = 4$
$S(A6, A7)$	$= C(A6,0) + C(0, A7) - C(A6, A7)$ $= 126 + 171 - 68 = 229$	$S(A6, A8)$	$= C(A6,0) + C(0, A8) - C(A6, A8)$ $= 126 + 174 - 478 = 178$
$S(A6, A9)$	$= C(A6,0) + C(0, A9) - C(A6, A9)$ $= 126 + 67 - 88 = 105$	$S(A7, A8)$	$= C(A7,0) + C(0, A8) - C(A7, A8)$ $= 171 + 281 - 107 = 345$
$S(A7, A9)$	$= C(A7,0) + C(0, A9) - C(A7, A9)$ $= 171 + 67 - 200 = 38$	$S(A8, A9)$	$= C(A8,0) + C(0, A9) - C(A8, A9)$ $= 281 + 67 - 315 = 33$

Sumber : Data Diolah, Tahun 2024

Setelah dilakukan perhitungan *saving matrix* seperti yang ada pada tabel 8, selanjutnya dapat dibentuk *saving matrix* sebagai berikut :

Langkah 3 membentuk matriks penghematan (*saving matrix*)

Tabel 9 Matriks Penghematan (*Saving Matrix*)(Km)

Kode Agen	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A1	0								
A2	11,3	0							
A3	2,7	10	0						
A4	4,7	8	76	0					
A5	2,7	25	5	5	0				
A6	4,7	8	75	157	3	0			
A7	7,7	5	79	160	7	229	0		
A8	12,7	0	84	172	4	178	345	0	
A9	4,7	8	34	33	4	105	38	33	0

Sumber : Data Diolah, Tahun 2024.

Pada Tabel 9 Matriks penghematan (*saving matrix*) diperoleh dari Tabel 8, di mana nilai 11,3 km ditempatkan pada kolom kedua yaitu A1 dan baris ketiga yaitu A2. Cara ini diulangi untuk menempatkan nilai matriks penghematan lainnya.

<u>Langkah 4</u> Pengalokasian Agen dan Rute berdasarkan lokasi

Untuk mempermudah pengalokasian agen pada rute dengan menampilkan nilai terbesar dari matriks penghematan (*saving matrix*) sebagai berikut.

Tabel 10 Pengurutan Nilai Saving Matrix dari Terbesar

No.	Coordinate	Nilai Savings	No.	Coordinate	Nilai Savings
1.	$S\ (A7, A8)$	345	**19.**	$S(A2, A3)$	10
2.	$S(A6, A7)$	229	**20.**	$S(A2, A6)$	8
3.	$S(A6, A8)$	178	**21.**	$S(A2, A9)$	8
4.	$S(A4, A8)$	172	**22.**	$S(A2, A4)$	8
5.	$S(A4, A7)$	160	**23.**	$S(A1, A7)$	7,7
6.	$S(A4, A6)$	157	**24.**	$S(A5, A7)$	7
7.	$S(A6, A9)$	105	**25.**	$S(A2, A7)$	5
8.	$S(A3, A8)$	84	**26.**	$S(A3, A5)$	5
9.	$S(A3, A7)$	79	**27.**	$S(A4, A5)$	5
10.	$S(A3, A4)$	76	**28.**	$S(A1, A4)$	4,7
11.	$S(A3, A6)$	75	**29.**	$S(A1, A6)$	4,7
12.	$S(A7, A9)$	38	**30.**	$S(A1, A9)$	4,7
13.	$S(A3, A9)$	34	**31.**	$S(A5, A8)$	4
14.	$S(A4, A9)$	33	**32.**	$S(A5, A9)$	4
15.	$S(A8, A9)$	33	**33.**	$S(A5, A6)$	3
16.	$S(A2, A5)$	25	**34.**	$S(A1, A3)$	2,7
17.	$S(A1, A8)$	12,7	**35.**	$S(A1, A5)$	2,7
18.	$S(A1, A2)$	11,3	**36.**	$S(A2, A8)$	0

Sumber: Data Diolah, Tahun 2024.

Tabel 10 dapat diketahui nilai *saving* dari terbesar ke terkecil hal ini memudahkan untuk pengalokasian agen dan rute berdasarkan tabel 9 *saving matrix* yang dapat membantu pengambilan keputusan dalam memilih rute yang paling efisiensi dan efektivitas untuk setiap konsumen.

<u>Iterasi 1</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar pertama adalah 345 km, antara agen A7 dan A8. Sebelum menggabungkannya, perlu dipastikan kelayakannya dengan melihat kapasitas kendaraan. Permintaan dari agen A7 sebesar 1.289 kg dan permintaan dari agen A8 sebesar 1.035 kg. dengan kapasitas kendaraan sebesar 4.000 kg. Jika agen A7 dan A8 digabungkan, maka total permintaan A7 dan A8 sebesar 2.324 kg, jauh di bawah kapasitas maksimal kendaraan. Berdasarkan analisis ini, penggabungan rute A7 dan A8 layak digunakan.

<u>Iterasi 2</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 229 km, antara agen A6 dan A7. Sebelumnya telah dianalisis bahwa penggabungan rute agen A7 dan A8 layak digunakan dengan total permintaan agen sebesar 2.324 kg. Sedangkan permintaan dari agen A6 sebesar 296 kg. Jika digabungkan, total permintaan A7, A8, dan A6 menjadi 2.620 kg. Yang masih jauh di bawah kapasitas maksimal kendaraan 4.000 kg. Berdasarkan analisis ini, penggabungan rute A7, A8, dan A6 layak digunakan.

<u>Iterasi 3</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 178 km, antara agen A6 dan A8. Sebelumnya telah dianalisis bahwa penggabungan rute agen A7, A8, dan A6 layak digunakan dengan total permintaan 2.620 kg. Sehingga jumlah permintaan agen lebih dari kapasitas maksimal kendaraan, maka A6 dan A8 tidak layak digunakan.

<u>Iterasi 4</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 172 km, antara agen A4 dan A8. Sebelumnya telah dianalisis bahwa penggabungan rute agen A7, A8 dan A6 layak digunakan dengan total permintaan sebesar 2.620 kg. Sedangkan permintaan dari agen A4 sebesar 963 kg. Jika digabungkan, total permintaan A7, A8, A6 dan A4 menjadi 3.583 kg. Yang masih jauh di bawah kapasitas maksimal kendaraan 4.000 kg. Maka berdasarkan analisis ini, penggabungan rute A7, A8, A6 dan A4 layak digunakan.

- Dapat dianalisis bahwa rute pada iterasi 5 dan iterasi 6 tidak layak digunakan. Hal ini disebabkan oleh total permintaan agen yang melebihi kapasitas maksimal kendaraan. Oleh karena itu, perhitungan dilanjutkan pada iterasi 7.

<u>Iterasi 7</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 105 km, antara agen A6 dan A9. Sebelumnya telah dianalisis bahwa penggabungan rute agen A7, A8, A6, dan A4 layak digunakan dengan total permintaan sebesar 3.583 kg. Sedangkan permintaan dari agen A9 sebesar 1.494 kg. Jika digabungkan, total permintaan A7,A8,A6,A4 dan A9 menjadi 5.077. Sehingga permintaan agen lebih dari kapasitas maksimal kendaraan, maka rute A7,A8,A6,A4 dan A9 tidak layak digunakan.

<u>Iterasi 8</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 84 km, antara agen A3 dan A8. Sebelumnya telah dianalisis bahwa penggabungan rute agen A7, A8, A6, dan A4 layak digunakan dengan total permintaan sebesar 3.583 kg. Sedangkan permintaan dari agen A3 sebesar 497 kg. Jika digabungkan, total permintaan A7,A8,A6,A4 dan A3 menjadi 4.080. sehingga permintaan agen lebih dari kapasitas maksimal kendaraan, maka rute A7,A8,A6,A4 dan A3 tidak layak digunakan.

- Dapat dianalisis bahwa rute pada iterasi 9 sampai iterasi 12 tidak layak digunakan. Hal ini disebabkan oleh total permintaan agen yang melebihi kapasitas maksimal kendaraan. Oleh karena itu, perhitungan dilanjutkan pada Iterasi 13.

<u>Iterasi 13</u> nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 34 km, antara agen A3 dan A9. Dapat dianalisis bahwa permintaan dari agen A3 sebesar 497 kg dan permintaan dari agen A9 sebesar 1.494 kg. Dengan kapasitas kendaraan sebesar 4.000 kg. Jika agen A3 dan A9 digabungkan, maka total permintaan A3 dan A9 sebesar 1.991 kg, jauh di bawah kapasitas maksimal kendaraan. Berdasarkan analisis ini, penggabungan rute A3 dan A9 layak digunakan.

- Dapat dianalisis bahwa rute pada iterasi 14 dan iterasi 15 tidak layak digunakan. Hal ini disebabkan oleh total permintaan agen yang melebihi kapasitas maksimal kendaraan. Oleh karena itu, perhitungan dilanjutkan pada Iterasi 16.

Iterasi 16 nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 25, antara Agen A2 dan A5. Dapat dianalisis bahwa permintaan dari agen A2 sebesar 1.923 kg dan permintaan dari agen A5 sebesar 1.370 kg. Dengan kapasitas kendaraan sebesar 4.000 kg. Jika agen A2 dan A5 digabungkan, maka total permintaan A2 dan A5 sebesar 3.293 kg, jauh di bawah kapasitas maksimal kendaraan. Berdasarkan analisis ini, penggabungan rute A2 dan A5 layak digunakan.

Iterasi 17 nilai penghematan saving (*saving matrix*) terbesar selanjutnya adalah 12,7 km, antara agen A1 dan A8. Sebelumnya telah dianalisis bahwa penggabungan rute agen A3 dan A9 layak digunakan dengan total permintaan 1.991 kg. Sedangkan permintaan agen dari A1 sebesar 2.000 kg. Jika digabungkan rute A3, A9, dan A1 maka total permintaan menjadi 3.991 kg. Yang masih jauh di bawah kapasitas maksimal kendaraan 4.000 kg. Maka berdasarkan analisis ini, penggabungan rute A3, A9, dan A1 layak digunakan.

Berdasarkan hasil iterasi yang telah dilakukan, berikut adalah alokasi agen ke kendaraan dan rute:

- Kendaraan 1 terdiri dari rute agen A7, A8, A6, dan A4
- Kendaraan 2 terdiri dari rute agen A2 dan A5
- Kendaraan 3 terdiri dari rute agen A3, A9 dan A1

Penerapan metode matriks penghematan (*saving matrix*) terbukti efektif dalam memaksimalkan kapasitas angkut kendaraan. Hal ini ditunjukkan dengan demonstrasi kasus di mana total kendaraan yang dibutuhkan untuk mengangkut barang dapat berkurang secara signifikan. Awalnya, untuk mengangkut seluruh barang di perlukan delapan kendaraan. Namun, setelah menerapkan metode matriks penghematan (*saving matrix*) jumlah kendaraan yang dibutuhkan dapat berkurang dan menjadi tiga kendaraan. Hal ini memungkinkan bahwa metode ini mampu mengoptimalkan rute dan penjadwalan pengiriman, sehingga kapasitas angkut setiap kendaraan dapat dimanfaatkan secara maksimal.

Langkah 5 Pengurutan lokasi tujuan dalam rute.

Berikut adalah tabel rinci pengurutan lokasi tujuan dalam rute yang telah terbentuk dan terdefinisi, seperti yang ditunjukkan sebagai berikut :

Tabel 11 Rute Distribusi Menggunakan Metode Nearest Insert.

Rute	Alternatif Rute	Jarak (Km)	Total Jarak (Km)
A7, A8, A6, dan A4	A0–A4–A6–A7–A8–A0	83+52+68+107+281	591
A2 dan A5	A0–A2–A5–A0	22 + 198 + 201	421
A3, A9 dan A1	A0–A1–A3–A9–A0	3,7 + 42 +74 + 67	186,7

Sumber: Data Diolah, Tahun 2024.

Tabel 12 Rute Distribusi Menggunakan Metode Nearest Neighbor.

Rute	Alternatif Rute	Jarak (Km)	Total Jarak (Km)
A7, A8, A6, dan A4	A0–A4–A6–A7–A8–A0	83+52+68+107+281	591
A2 dan A5	A0–A2–A5–A0	22 + 198 + 201	421
A3, A9 dan A1	A0–A1–A3–A9–A0	3,7 + 42 +74 + 67	186,7

Sumber : Data Diolah, Tahun 2024.

Berdasarkan hasil perhitungan, dengan menggunakan dua metode pada tabel di atas yaitu *nearest insert* dan *nearest neighbor* maka dapat menghasilkan urutan rute agen A7,A8,A6 dan A4 yaitu dengan total jarak yang sama sebesar 591 km, sedangkan urutan rute agen A2 dan A5 yaitu dengan total jarak yang sama sebesar 421 km dan urutan rute agen A3,A9, dan A1 dengan total jarak yang sama yaitu sebesar 186,7 km. Sehingga, total jarak keseluruhan dengan menggunakan metode *saving matrix* adalah 1.198,7 km. Berikut tabel biaya distribusi dengan menggunakan hasil rute dari metode *saving matrix*.

Tabel 13 Biaya Transportasi Setelah Menggunakan Metode *Saving Matrix*

No.	Rute Metode Saving matrix	Jarak (km)	Biaya Tenaga kerja (Rp)	Biaya Bahan bakar (Rp)	Biaya Retribusi (Rp)	Total Biaya (Rp)
1.	A0-A4-A6-A7-A8-A0	591	36.000.000,00	12.198.240,00	4.800.000,00	52.998.240,00
2.	A0-A2-A5-A0	421	36.000.000,00	8.689.440,00	4.800.000,00	49.489.440,00
3.	A0-A1-A3-A9-A0	186,7	36.000.000,00	3.853.488,00	4.800.000,00	44.653.488,00
Total		**1.198,7**	**108.000.00,00**	**24.741.168,00**	**14.400.000,00**	**147.141.168,00**

Sumber: Data Diolah, Tahun 2024

Perhitungan biaya bahan bakar minyak dapat dilakukan dengan memperhatikan data pada tabel 5 elemen biaya per kendaraan. Harga bahan bakar minyak per liter adalah Rp8.600,00 dan 1 liter bahan bakar dapat menempuh $\pm$ 10 km. Sehingga dapat dihitung untuk rute awal agen A0-A4-A6-A7-A8-A0 dengan jarak sebesar 591 km. 591 km dapat di bagi dengan 10 km menghasilkan 59,1 liter. Setelah diperoleh 59,1 liter kalikan dengan Rp8.600,00 maka hasilnya adalah Rp508.260,00 untuk biaya BBM sekali perjalanan. Karena UD.XYZ tersebut 2x perjalanan dalam sebulan maka harga bahan bakar Rp508.260,00 dikalikan dengan 2 maka menghasilkan Rp1.016.520,00 biaya bahan bakar sebulan. Maka biaya bahan bakar untuk pertahun adalah biaya bahan bakar per bulan dikalikan dengan 12 bulan dalam setahun maka menghasilkan Rp12.198.240,00 sehingga dengan cara yang sama akan di peroleh biaya bahan bakar minyak untuk rute agen lainnya.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan metode *saving matrix*, diperoleh total biaya distribusi sebesar Rp147.141.168,00. Berikut tabel perbandingan total jarak dan total biaya distribusi sebelum dan sesudah penerapan metode *saving matrix*.

Tabel 14 Perbandingan Total Jarak Rute Awal dan Rute Metode *Saving Matrix*

Perbandingan jarak dan biaya distribusi		
Rute	**Jarak (km)**	**Biaya distribusi (Rp)**
Awal perusahaan	2.997,7	170.772.464,00
Saving matrix	1.198,7	147.141.168,00
Penghematan	1.799	23.631.291,00
Presentase penghematan	60.01%	13.83%

Sumber: Data Diolah, Tahun 2024.

Berdasarkan tabel diatas, metode *saving matrix* menunjukkan hasil yang lebih baik dibandingkan metode perusahaan. Total jarak yang ditempuh dengan metode *saving matrix* adalah 1.198,7 km, jauh lebih rendah di bandingkan metode perusahaan yang mencapai 2.997,7 km. hal ini menunjukkan penghematan jarak sebesar 1.799 km atau 60.01%. Metode *saving matrix* juga menghasilkan total biaya distribusi yang lebih rendah yaitu Rp147.141.168,00/tahun. Dibandingkan dengan metode perusahaan yang mencapai Rp170.772.464,00/tahun, metode *saving matrix* menghasilkan penghematan biaya sebesar Rp23.631.291,00/tahun atau 13.83%.metode *saving matrix* terbukti lebih efektif dalam mendistribusikan produk dengan mengurangi jarak tempuh dan biaya distribusi. Oleh karena itu, metode ini direkomendasikan untuk digunakan dalam mencari jalur distribusi.

1.6.10 Metode Hungarian

Metode *hungarian* merupakan metode untuk menyelesaikan masalah penugasan yang didasarkan pada karya D.Koing dan J.Egervary. metode ini dapat disempurnakan oleh Harold Kuhn pada tahun 1955 dan kemudian di perbaiki oleh James Munkers pada tahun 1957. Metode ini juga dikenal sebagai metode Kuhn-Munkers. Metode ini membantu menemukan penugasan terbaik dari satu set pekerja ke satu set pekerjaan dengan meminimumkan total nilai dari para pekerja pada pekerjaan yang ditugaskan. Setiap sumber hanya ditugaskan untuk satu tugas. Masalah penugasan dengan m sumber dan n tugas dengan memiliki $n!$ kemungkinan. Matrix segi empat dapat digunakan dalam untuk menjelaskan masalah ini (Samosir, 2019).

Adapun syarat – syarat metode *hungarian* sebagai berikut (Ndruru, dkk, 2017) :

1. Jumlah i *(pekerja)* harus sama dengan jumlah j *(pekerjaan)* yang harus di selesaikan .
2. Setiap sumber hanya mengerjakan satu tugas.
3. Apabila jumlah sumber tidak sama dengan jumlah tugas atau sebaliknya, maka ditambahkan variabel *Dummy Woker* atau *Dummy Job.*
4. Terdapat dua permasalahan yang diselesaikan yaitu meminimumkan kerugian (biaya, waktu, jarak dan sebagainya) atau memaksimalkan keuntungan.

Metode *hungarian* merupakan metode yang memodifikasi baris dan kolom pada matriks efektivitas hingga satu komponen nol muncul di setiap baris atau kolom yang dapat dipilih sebagai alokasi penugasan. Semua alokasi penugasan yang dibuat adalah alokasi optimal, dan bila diterapkan pada matriks efektivitas awal, akan terjadi memberikan hasil tugas minimal. Masalah penugasan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *hungarian* dengan langkah – langkah sebagai berikut :

1. Memodifikasi tabel penugasan ke dalam matriks efektivitas. Di mana matriks ini dibentuk untuk memudahkan penyelesaian setiap langkah metode yang telah dilakukan.
2. Pilih nilai terkecil setiap baris lalu kurangi operasi setiap nilai sesuai dengan bilangan terkecil terpilih. Dengan demikian, dapat dipastikan paling sedikit terdapat satu element pada setiap baris matriks yang bernilai nol dan tidak ada.
3. Melakukan pengurangan kolom jika ada kolom yang belum memiliki element 0, yaitu pilih nilai terkecil dari kolom tersebut, kemudian dilakukan operasi pengurangan dari setiap nilai kolom dengan angka terkecil terpilih.
4. Bentuklah penugasan optimum dengan menggambar sejumlah garis horizontal dan/ vertikal yang melewati semuanya.
5. Merevisi tabel dengan memilih nilai terkecil yang tidak dilewati garis.
6. Tugas ditempatkan pada sel yang bernilai 0. Di mana setiap angka 0 diganti dengan angka 1 tetapi masing – masing kolom dan baris hanya memiliki satu tugas element.

Menghitung nilai total solusi yang diperoleh berdasarkan elemen – elemen matriks awal yang belum dikurangi nilainya sehingga diperoleh nilai total optimal.

1.6.11 Masalah Penugasan (Assigment Problem)

Kasus penugasan adalah masalah optimasi yang melibatkan pencocokan sejumlah pekerjaan (sumber) dengan sejumlah pekerja (tujuan) secara optimal. Optimal dalam hal ini berarti meminimumkan total bobot yang terkait dengan penugasan tersebut. Bobot dapat berupa waktu pengerjaan, biaya, upah atau faktor lainnya yang dianggap penting (Zandroto, 2019).

Masalah penugasan adalah sebuah optimasi yang kompleks di berbagai bidang, seperti bisnis, manufaktur, dan logistik. Masalah penugasan adalah mencocokkan objek (sumber daya) dengan tugas (tujuan) secara optimal. Objek ini dapat berupa manusia, mesin, alat, atau sumber daya lainnya. Sedangkan tugas dapat berupa pekerjaan, proyek, atau aktivitas lainnya. Tujuan utama dari penugasan optimal adalah untuk meminimumkan biaya, waktu dan jarak atau memaksimalkan keuntungan. Sehingga salah satu solusi yang efektif untuk menyelesaikan masalah penugasan adalah dengan menggunakan metode *hungarian*. metode ini menggunakan algoritma yang canggih untuk menemukan pencocokan optimal antara objek dan tugas, dengan meminimumkan biaya total penugasan (Aritonang, dkk, 2020).

1.7.11.1 Masalah Penugasan Sederhana (*One – Objective*)

Masalah penugasan (*Assigment Problem*) merupakan kasus khusus dalam *pemrograman linear* yang sering di hadapi Dalam dunia bisnis dan industri. Masalah ini berkaitan dengan penugasan optimal sumber daya yang produktif kepada berbagai tugas yang berbeda.

Menurut Taha dalam Tamimi, dkk (2017), masalah penugasan didefinisikan bahwa pekerja *(i = 1,2,...,m)* ketika ditugaskan ke tugas *(j = 1,2,...,n)* memerlukan waktu tempuh c_{ij}. Tujuannya adalah menugaskan pekerja – pekerja tersebut ke tugas–tugas (satu pekerja per tugas) dengan biaya total terendah. Masalah penugasan sederhana (*one–objective*) dapat di model matematis sebagai berikut :

Variabel Keputusan :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika pekerja } i \text{ ditugaskan ke tugas } j \\ 0, \text{jika pekerja } i \text{ tidak ditugaskan ke tugas } j \end{cases}$$

Fungsi Tujuan

$$min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (2.23)$$

Dengan batasan :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_m = 1, \quad i = 1,2,\ldots.,m \qquad (2.24)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = 1, \quad j = 1,2,\ldots.,n \qquad (2.25)$$

Keterangan :

$Min\ z$: Fungsi Tujuan

X_{ij} : Variabel Keputusan

C_{ij} : Nilai Kontribusi objek *i* terhadap tugas *j*

m : Jumlah Objek (Individu atau sumber daya)

n : Jumlah tugas/pekerjaan yang akan diselesaikan

i : Karyawan

j : Tugas/pekerjaan

1.7.12 Contoh Kasus Metode Hungarian

Contoh kasus ini diambil dari penelitian sebelumnya pada tahun 2021 pada jurnal yang ditulis oleh Arafat dan Suseno yang berjudul "Analisis Penugasan Guna Meminimumkan Waktu Pengiriman Produk Menggunakan Metode *Hungarian* Pada UKM Roti ZB Cikampek"

UKM Roti ZB salah satu toko roti yang berada di Cikampek dengan total jumlah karyawan yang bertugas mengantarkan produk kepada agen berjumlah 5 orang serta memiliki 5 tujuan lokasi, setiap pekerja memiliki waktu pengiriman yang berbeda, sehingga diperlukan analisis untuk menugaskan karyawan tersebut agar mendapatkan waktu yang optimal. Berikut adalah data penugasan dan waktu pengantaran produk sebelum menerapkan metode *hungarian*.

Tabel 15 Hasil Penugasan dan Waktu Pengantaran Produk Awal

Karyawan	Tujuan	Waktu (Menit)
Doni	Cibuaya	14
Rahmad	Cilaber	18
Wawan	Jayakerja	18
Aldi	Banyusari	20
Irwan	Jatisari	19
Total		89

Sumber: Roti ZB, Tahun 2021.

<u>Langkah 1</u>

Memahami dan menyederhanakan permasalahan atau data yang di dapat ke dalam bentuk matriks penugasan, seperti tabel sebagai berikut :

Tabel 16 Hasil Waktu Pengantaran Produk

Data Waktu Pengantaran Produk (Menit)					
Karyawan	**Tujuan**				
	Banyusari	**Cibuaya**	**Jatisari**	**Cileber**	**Jayakerja**
Doni	20	14	24	16	22
Rahmad	22	14	20	18	23
Wawan	18	23	21	20	18
Aldi	20	23	25	24	18
Irwan	20	22	19	18	20

Sumber: Roti ZB, Tahun 2021.

<u>Langkah 2</u>

Menetapkan nilai minimum atau maksimum pada setiap baris. Karena tujuan penelitian adalah meminimumkan waktu maka kita menetapkan nilai terkecil pada setiap baris atau kolom pada tabel 16 sehingga diperoleh tabel baru sebagai berikut :

Tabel 17 Nilai Minimum Pada Tiap Baris

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	20	14	24	16	22
Rahmad	22	14	20	18	23
Wawan	18	23	21	20	18
Aldi	20	23	25	24	18
Irwan	20	22	19	18	20

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Pada Tabel 17 terdapat baris pertama nilai minimum adalah 14, baris ke dua nilai minimum adalah 14, baris ke tiga nilai minimum adalah 18, baris keempat nilai minimum adalah 18, dan baris ke lima nilai minimum adalah 18.

<u>Langkah 3</u>

Melakukan normalisasi dengan cara mengurangi setiap nilai pada baris dengan nilai minimum pada baris yang terdapat pada tabel 17 Nilai minimum pada tiap baris, sehingga setiap baris memiliki nilai nol seperti tabel berikut :

Tabel 18 Hasil Pengurangan Nilai Setiap Baris

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	10	2	8
Rahmad	8	0	6	4	9
Wawan	0	5	3	2	0
Aldi	2	5	7	6	0
Irwan	2	4	1	0	3

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

<u>Langkah 4</u>

Setelah mendapatkan hasil dari langkah 3, kemudian tentukan nilai minimum pada setiap kolom yang tidak memiliki nilai nol, maka dicari nilai minimum pada kolom tersebut dan dapat dilihat pada tabel sebagai berikut :

Tabel 19 Nilai Minimum Pada Setiap Baris

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	10	2	8
Rahmad	8	0	6	4	9
Wawan	0	5	3	2	0
Aldi	2	5	7	6	0
Irwan	2	4	1	0	3

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Pada Tabel 19 nilai minimum pada setiap kolom, kemudian dikurangkan dengan setiap nilai yang ada pada kolom. Hasilnya dapat dilihat pada tabel sebagai berikut :

Tabel 20 Hasil Pengurangan Setiap Kolom

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	9	2	8
Rahmad	8	0	5	4	9
Wawan	0	5	2	2	0
Aldi	2	5	6	6	0
Irwan	2	4	0	0	3

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Langkah 5

Perlu di pastikan apakah matriks tersebut sudah optimal atau belum. Hal ini dilakukan dengan menutupi semua nilai nol pada matriks menggunakan garis, dimulai dari baris dan kolom yang memiliki nilai nol terbanyak. Hasilnya dapat dilihat pada tabel sebagai berikut :

Tabel 21 Optimalisasi

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	10	2	8
Rahmad	8	0	6	4	9
Wawan	0	5	3	2	0
Aldi	2	5	7	6	0
Irwan	2	4	1	0	3

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Berdasarkan tabel 21, terdapat 4 garis yang menutupi nilai nol pada matriks. Jumlah ini tidak sama dengan jumlah baris dan kolom pada matriks, yaitu 5. Hal ini menunjukkan bahwa matriks tersebut belum optimal.

Langkah 6

Carilah nilai minimum pada nilai yang belum tertutup oleh garis, nilai minimum yang didapat adalah 2. Dalam langkah ini terdapat 3 ketentuan di antaranya yaitu:

1. Semua nilai yang tidak tertutup oleh garis dikurangi dengan nilai minimum
2. Semua nilai yang tertutup oleh satu garis nilainya tetap dan tidak berubah
3. Semua nilai yang tertutup oleh dua garis dijumlahkan dengan nilai minimum.

Pada ketentuan 3 di atas, maka dapat menghasilkan tabel baru sebagai berikut:

Tabel 22 Revisi Tabel/Matrix

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	7	0	8
Rahmad	8	0	3	2	9
Wawan	0	5	0	0	0
Aldi	2	5	6	4	0
Irwan	4	6	0	0	5

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Langkah 7

Dapat dipastikan lagi apakah matriks biaya sudah optimal atau belum. Hal ini dilakukan dengan menutupi semua nilai nol pada matriks menggunakan garis, dilihat dari baris dan kolom yang memiliki nilai nol terbanyak

Tabel 23 Optimalisasi

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	7	0	8
Rahmad	8	0	3	2	9
Wawan	0	5	0	0	0
Aldi	2	5	6	4	0
Irwan	4	6	0	0	5

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Berdasarkan tabel 23 optimalisasi, terdapat 5 garis yang menutupi semua nilai nol pada matriks. Jumlah ini sama dengan jumlah baris dan kolom pada matriks, yaitu 5. Hal ini menunjukkan bahwa matriks sudah optimal.

Langkah 8

Langkah terakhir dalam metode *hungarian* adalah menentukan penugasan karyawan yang optimal. Hal ini dilakukan dengan memperhatikan jumlah nilai 0 pada setiap baris matriks yang telah dioptimalkan. Hasil dari langkah 8 dijelaskan pada tabel sebagai berikut:

Tabel 24 Matrix Penugasan

Karyawan	Tujuan				
	Banyusari	Cibuaya	Jatisari	Cileber	Jayakerja
Doni	6	0	7	0	8
Rahmad	8	0	3	2	9
Wawan	0	5	0	0	0
Aldi	2	5	6	4	0
Irwan	4	6	0	0	5

Sumber: Arafat & Suseno, 2021.

Sehingga diperoleh jadwal penugasan optimal menggunakan metode Hungarian sebagai berikut :

1. Doni ditugaskan ke tujuan Cileber dengan waktu 16 menit.
2. Rahmad ditugaskan ke tujuan Cibuaya dengan waktu 14 menit.
3. Wawan ditugaskan ke tujuan Banyusari dengan waktu 18 menit.
4. Aldi ditugaskan ke tujuan Jayakerja dengan waktu 18 menit.
5. Irwan ditugaskan ke tujuan Jatisari dengan waktu 19 menit.

Dengan total waktu tempuh ke tujuan adalah :

$$min\ z\ = \sum_{i\,=\,1}^{m} \sum_{j\,=\,1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ = 16\ + 14\ + 18\ + 18\ + 19 = 85\ menit$$

Penerapan metode *Hungarian* untuk optimasi penugasan karyawan dalam pengiriman produk menunjukkan hasil yang optimal. Penugasan optimal diperoleh dengan menempatkan Doni ditugaskan mengirimkan produk ke Cileber, Ahmad ke Cibuaya, Wawan ke Banyusari, Aldi ke Jayakerja dan Irwan ke Jatisari. Total pengiriman produk sebelum menerapkan metode *Hungarian* adalah 89 menit (5340 detik), sedangkan setelah menggunakan metode *Hungarian,* total waktu pengiriman turun menjadi 85 menit (5100 detik). Hal ini menunjukkan adanya penghematan waktu pengiriman produk selama 4 menit (240 detik).

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Lokasi Penelitian

Penelitian ini dilakukan di beberapa distributor produk yang dikeluarkan oleh CV. Mandala Papua, yang berada di kabupaten Nabire, Provinsi Papua Tengah. CV. Mandala Papua bergerak di bidang industri barang konsumsi tembakau.

2.2 Jenis dan Sumber Data

1. **Jenis Data**

   Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

   a. **Data Primer**

   Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data primer yang dikumpulkan oleh CV. Mandala Papua melalui keterangan dan penjelasan dari pemilik usaha yang berhubungan dengan penelitian di dalam skripsi ini.

   b. **Data Sekunder**

   Data sekunder adalah data yang sudah ada dan didapat oleh CV. Mandala Papua dalam bentuk yang sudah jadi (dokumen) Data tersebut adalah data biaya distribusi, waktu distribusi, dan banyaknya kuantitas barang pada produk.

2. **Sumber Data**

   Penelitian ini membutuhkan data numerik untuk membangun model matematis optimasi sistem distribusi produk. Data tersebut diperoleh dari berbagai sumber, termasuk laporan perusahaan, observasi dan wawancara. Data yang terkumpul kemudian diolah dan dianalisis untuk menghasilkan model matematis yang optimal.

2.3 Prosedur Penelitian

Untuk mencapai tujuan penelitian maka di perlukan langkah-langkah sistematis dan terencana. Berikut adalah panduan prosedur penelitian yang tepat:

1. **Pengumpulan Data**

   a. **Laporan Perusahaan**

   - Data jarak lokasi antar cabang
   - Data jumlah karyawan yang mendistribusikan barang
   - Data transportasi (jenis, kapasitas muatan, dan biaya distribusi per hari)
   - Gaji karyawan perhari/Perbulan
   - Waktu distribusi
   - Kuantitas barang yang didistribusikan per hari

   b. **Observasi**

   Pengamatan langsung di lapangan untuk mendapatkan data yang lebih akurat.

   c. **Wawancara**

   Wawancara karyawan yang terlibat langsung dalam proses distribusi.

2. Analisis Data

Analisis data dengan menggunakan Metode *saving matriks* untuk menentukan rute distribusi yang optimal dan dapat dianalisis masalah penugasan dengan tujuan menentukan alokasi karyawan yang optimal dan meminimasi waktu pendistribusian dengan menggunakan metode *hungarian*.

3. Perhitungan

Data yang telah diolah dimasukkan ke dalam model matematis yang menggunakan metode *saving matrix* dan metode *hungarian*.

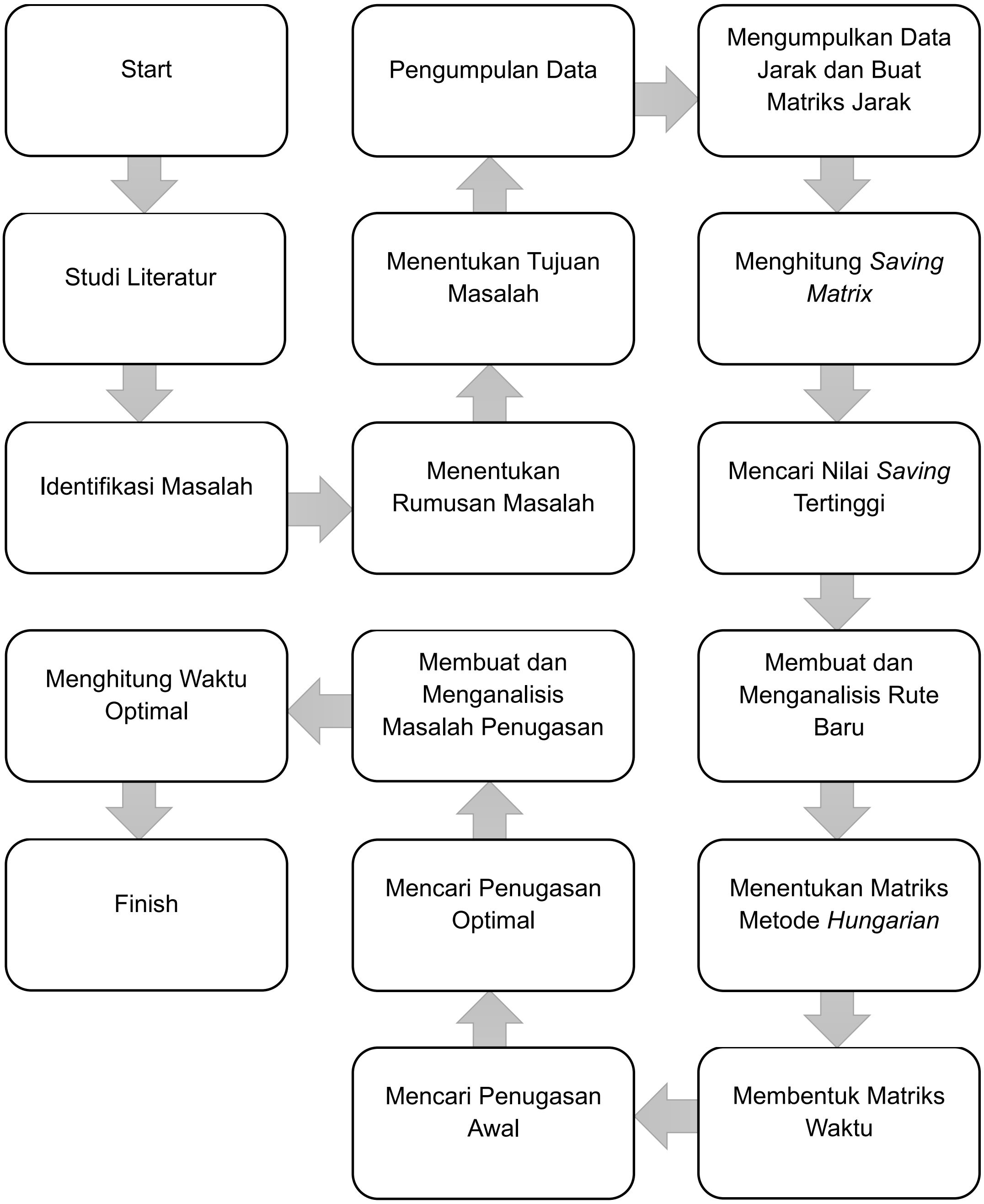
4. Hasil

- Rute distribusi yang optimal.
- Alokasi karyawan yang optimal untuk meminimasi waktu distribusi.
- Biaya distribusi setelah menggunakan metode.

5. Kesimpulan

- Menjelaskan hasil penelitian, yaitu rute distribusi Yang optimal
- Menjelaskan penugasan distribusi optimal yang berdampak pada waktu pendistribusian.
- Menganalisis biaya pendistribusian.

2.4 Diagram Alur Penelitian



Gambar 1 Diagram alur penelitian