PENGGUNAAN MODEL REGRESI KUANTIL *BOOTSTRAP* DALAM MENGATASI DATA *OUTLIER* PADA DATA ANGKA KEMISKINAN DI PROVINSI SULAWESI SELATAN

SKRIPSI

WIJAYA PINUNTUN

H051191037

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PENGGUNAAN MODEL REGRESI KUANTIL *BOOTSTRAP* DALAM MENGATASI DATA *OUTLIER* PADA DATA ANGKA KEMISKINAN DI PROVINSI SULAWESI SELATAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

WIJAYA PINUNTUN

H051191037

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Penggunaan Model Regresi Kuantil *Bootstrap* Dalam Mengatasi Data *Outlier* Pada Data Angka Kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 22 November 2023

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 TGL. 20 METERAI TEMPEL A5C1FAKX218716600

Wijaya Pinuntun
NIM. H051191037

PENGGUNAAN MODEL REGRESI KUANTIL *BOOTSTRAP* DALAM MENGATASI DATA *OUTLIER* PADA DATA ANGKA KEMISKINAN DI PROVINSI SULAWESI SELATAN

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Anna Islamiyati, S,Si., M,Si	**Dr. Nirwan, M.Si.**
NIP. 19770808 200501 2 002	**NIP. 19630306 198702 1 002**

Ketua Program Studi

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN STATISTIKA FAKULTAS MIPA

Dr. Anna Islamiyati, S,Si., M,Si
NIP. 19770808 200501 2 002

Pada 22 November 2023

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama	: Wijaya Pinuntun
NIM	: H051191037
Program Studi	: Statistika
Judul Skripsi	: Penggunaan Model Regresi Kuantil *Bootstrap* Dalam Mengatasi Data *Outlier* Pada Data Angka Kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si (..............................)
2. Sekretaris : Dr. Nirwan, M.Si. (..............................)
3. Anggota : Prof. Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si (..............................)
4. Anggota : Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si. (..............................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 22 November 2023

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabaraktuh

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Shalawat dan salam senantiasa terkirimkan kepada baginda Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wa Sallam* beserta keluarga dan para sahabatnya. *Alhamdulillahirobbil'alamin*, atas segala nikmat kesehatan, kemudahan dan pertolongan yang diberikan oleh Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Penggunaan Model Regresi Kuantil *Bootstrap* Dalam Mengatasi Data *Outlier* Pada Data Angka Kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan"** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan dorongan dari berbagai pihak yang senantiasa turut membantu dalam bentuk moril maupun materil sehingga dengan segala keterbatasan kemampuan dan pengetahuan, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Ayahanda **Hery Santoso, S.T** dan Ibunda **Yustina Sumarni** yang telah memberikan dukungan penuh, pengorbanan luar biasa, limpahan cinta dan kasih sayang, kesabaran hati, serta dengan ikhlas telah menemani setiap langkah penulis dengan doa dan restu mulianya. Ucapan terima kasih juga penulis haturkan kepada kakak **Pani Pawiwitan dan Reva Januar, S.P** yang selalu memberi semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini, serta keluarga besar penulis atas doa dan dukungannya selama ini.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan dan ketulusan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Bapak Dr. Khaeruddin, M.Sc,** selaku Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kemahasiswaaan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin yang dengan penuh kesabaran telah memberikan arahan, nasehat, dan motivasinya selama penulis berproses di KM FMIPA Unhas.
4. **Ibu Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Statistika sekaligus Pembimbing Utama penulis yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk senantiasa memberikan arahan, dorongan semangat, dan motivasi kepada penulis dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini.
5. **Bapak Dr. Nirwan, M.Si.**, selaku Pembimbing Pertama yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk senantiasa memberikan arahan, dorongan semangat, dan motivasi kepada penulis dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini.
6. **Ibu Prof. Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.,** selaku Dosen Pembimbing Akademik yang dengan penuh kesabaran telah memberikan arahan, nasehat, pelajaran dan motivasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika terkhusus dalam berproses di Himastat FMIPA Unhas, serta selaku Penguji yang telah meluangkan waktu dalam memberikan motivasi serta kritikan yang membangun kepada penulis dalam penyempurnaan tugas akhir ini.
7. **Bapak Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si.,** selaku Penguji yang telah meluangkan waktu dalam memberikan motivasi serta kritikan yang membangun kepada penulis dalam penyempurnaan tugas akhir ini.
8. Segenap Dosen Pengajar dan Staf yang telah memberikan ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menempuh pendidikan sarjana di Departemen Statistika.

9. **Puang Dr. Andi Ilham Latunra, M.Si.,** selaku Orang tua di kampus yang dengan penuh keikhlasan telah memberikan ilmu, arahan, nasehat, pelajaran hidup, dan pengalaman yang sangat berharga kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Universitas Hasanuddin.
10. Teman seperjuangan di **Statistika 2019**, Terima kasih atas ilmu, kebersamaan, suka dan duka dalam menjalani perkuliahan di Departemen Statistika. Terima kasih sudah menerima kehadiran penulis.
11. Teman seperjuangan Organisasi **Himastat FMIPA Unhas 2021/2022** dan **BEM FMIPA Unhas 2022/2023**, Terima kasih atas ilmu, kebersamaan, suka dan duka dalam menjalani roda organisasi di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Terima kasih sudah menerima kehadiran penulis, Kalian hebat dan luar biasa.
12. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, Terima kasih setinggi-tingginya untuk segala dukungan, partisipasi, dan apresiasi yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat untuk berbagai pihak.

Makassar, 22 November 2023

Wijaya Pinuntun

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Wijaya Pinuntun
NIM	: H051191037
Program Studi	: Statistika
Departemen	: Statistika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif** (***Non-exclusive Royalty-Free Right***) atas tugas akhir saya yang berjudul:

"Penggunaan Model Regresi Kuantil *Bootstrap* Dalam Mengatasi Data *Outlier* Pada Data Angka Kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta. Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar tanggal 22 November 2023.

Yang menyatakan,

(Wijaya Pinuntun)

ABSTRAK

Analisis regresi merupakan analisis statistik yang sering digunakan untuk memodelkan hubungan antara dua jenis variabel, Namun adanya *outlier* dari suatu data akan mengakibatkan hasil estimasi dengan menggunakan metode OLS bersifat bias. Penanganan *outlier* pada data dapat dilakukan dengan menggunakan model regresi kuantil. Proses pendugaan parameter model regresi kuantil dapat digunakan dengan metode numerik yaitu metode *simpleks*. Dalam proses estimasi regresi kuantil, untuk mendapatkan distribusi data yang lebih stabil diperlukan metode *bootstrap* residual. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan berdasarkan model regresi kuantil bootstrap. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah persentase angka kemiskinan, nilai Indeks Pembangunan Manusia (IPM), persentase Angka Partisipasi Murni (APM) pendidikan formal, dan Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT) di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2020 – 2022. Hasil analisis menunjukkan bahwa model regresi kuantil *bootstrap* dapat mengatasi keberadaan *outlier* dalam mengestimasi parameter regresi kuantil *bootstrap*, hal ini ditunjukkan dengan adanya perubahan nilai estimasi parameter yang lebih konsisten di tiap tiap kuantilnya. Hasil perhitungan uji RMSE pada model menunjukkan bahwa pada kuantil 0.5 memiliki nilai terbaik dengan nilai 2.1978, yang menunjukkan bahwa model cenderung memberikan prediksi yang lebih akurat dan mendekati nilai aktual. Faktor IPM memiliki pengaruh negatif secara signifikan terhadap angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan pada setiap kuantil.

Kata Kunci: Regresi kuantil, *Bootstrap*, *Outlier*, Kemiskinan.

ABSTRACT

Regression analysis is a statistical analysis often used to model the relationship between two types of variables. However, the presence of outliers in the data would result in biased estimation using the OLS method. An outlier handler on the data can be done using the quantile regression model. The process of estimating the parameters of that model can be used using numerical method of simplex. In the process of regression quantile estimate, to get more steady data distribution required residual bootstrap methods. This research aims to determine the factors that influence the poverty rate in South Sulawesi based on a bootstrap quantile regression model. The data used in this research are the percentage of poverty rate, Human Development Index (HDI), percentage of Pure Participation Rate (PPR) for formal education, and Open Unemployment Rate (OUR) in South Sulawesi in 2020 - 2022. Analysis has shown that the regression model of the quantile bootstrap can overcome the presence of undercut in estimating the quantile bootstrap regression parameters, which is shown by a more consistent change in value estimate parameters in each quantile. The results of the RMSE test calculation on the model show that the 0.5 quantile has the best score with a 2.1978, which shows that the model tends to give more accurate prediction and approach actual value. In conclusion, HDI factors have significantly negative effect on poverty rate of South Sulawesi in each quantile.

Keywords: *Quantile regression, Bootstrap, Outliers, Poverty.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kemiskinan merupakan permasalahan multidimensi yang dihadapi oleh negara-negara berkembang yang pada umumnya dicirikan dengan tingkat pendapatan dan pendidikan yang rendah, serta rentan terhadap gejolak ekonomi (Fransiska, dkk., 2020). Hal ini tentunya sangat dibutuhkan peran pemerintah dalam menekan angka kemiskinan melalui kebijakan dan pembangunan sehingga dapat menciptakan masyarakat yang sejahtera. Apabila pembangunan suatu daerah berpengaruh terhadap peningkatan kesejahteraan masyarakat, maka hal itu akan sejalan dengan teratasinya tingkat kemiskinan di suatu daerah (Gumilar, 2022).

Kemiskinan merupakan masalah yang cukup rumit, khususnya di negara berkembang seperti Indonesia. Provinsi Sulawesi Selatan merupakan salah satu provinsi yang mempunyai tingkat pertumbuhan ekonomi yang cukup baik, namun masih menjadi salah satu provinsi yang mempunyai tingkat angka kemiskinan terbilang cukup tinggi (Wulandari, 2022). Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistika (BPS) Provinsi Sulawesi Selatan menunjukkan bahwa Jumlah penduduk miskin di Sulawesi Selatan pada September 2022 mencapai 782,32 ribu orang. Dibandingkan Maret 2022, jumlah penduduk miskin bertambah 4,9 ribu orang. Sementara jika dibandingkan dengan September 2021, jumlah penduduk miskin juga meningkat sebanyak 16,86 ribu orang (BPS, 2023). Timbulnya kemiskinan dikarenakan kemampuan masyarakat yang rendah dalam mengakses lapangan kerja dan sedikitnya peluang masyarakat untuk mendapat kesempatan kerja (Isnaini & Nugroho 2020). Secara umum, Indonesia masih memiliki jumlah penduduk miskin yang cenderung tinggi. Oleh karena itu, perlu adanya kebijakan yang akurat untuk mengatasi masalah kemiskinan. Sehingga diperlukan kajian tentang faktor-faktor yang mempengaruhi tingkat kemiskinan, Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengetahui hubungan tingkat kemiskinan dengan faktor-faktor penyebabnya dapat diketahui melalui analisis regresi.

Analisis regresi merupakan analisis statistik yang sering digunakan untuk memodelkan hubungan antara dua jenis variabel, yaitu variabel respon (*Y*) dengan satu atau lebih variabel prediktor (*X*) dalam suatu model linear (Saputri, dkk., 2018). Pendekatan standar untuk mendapatkan nilai dugaan parameter dari model regresi linier adalah Metode OLS (*Ordinary Least Square*). Nilai dugaan bagi parameter dengan menggunakan metode OLS diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat sisaan (Rahmawati, dkk., 2011). Akan tetapi, metode OLS pada praktiknya sering tidak dapat digunakan karena mengalami penyimpangan asumsi kenormalan yang diakibatkan dari adanya data *outlier* (Balami, 2017). Adanya *outlier* dari suatu data akan mengakibatkan hasil estimasi dengan menggunakan metode OLS bersifat bias (Sari dkk., 2017). Penanganan *outlier* pada data dapat dilakukan dengan menggunakan model regresi kuantil. Metode ini merupakan salah satu metode regresi dengan menggunakan pendekatan memisahkan atau membagi data menjadi kuantil-kuantil tertentu (Rahmawati, dkk., 2011).

Regresi kuantil memiliki sifat yang lebih kuat terhadap adanya titik *outlier* yang hadir dalam variabel respon pada suatu model. Selain itu, metode ini juga dapat menghasilkan hasil yang lebih efisien ketika terdapat ekor pada sebaran yang sifatnya tidak normal dan mengalami masalah heteroskedastisitas (Beyaztas & Shang, 2022). Regresi kuantil memberikan pendugaan parameter yang lebih stabil dan konsisten (Nurfauziah, 2020). Proses pendugaan parameter model regresi kuantil dapat digunakan dengan metode numerik yaitu metode *simpleks*. Metode *simpleks* merupakan salah satu pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan linear programming dalam menentukan solusi optimal yang memiliki dua atau lebih variabel. Penentuan kombinasi optimal dilakukan melalui iterasi secara berulang terhadap Tabel *simpleks* untuk menemukan nilai yang optimum dalam masalah optimasi yang diteliti (Nurmayanti & Sudrajat, 2021).

Beberapa penelitian telah dilakukan dengan menggunakan regresi kuantil, diantaranya penelitian yang telah dilakukan oleh Effendi, dkk (2019) dengan melakukan perbandingan metode regresi kuantil dan metode bayes dalam mengestimasi parameter model regresi linier sederhana dalam mengatasi galat heteroskedastisitas. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Nabilla (2020) yang menggunakan metode regresi kuantil median untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas pada regresi non linear pada data nilai harapan hidup terhadap biaya perawatan medis. Selain itu, penelitian lainnya dilakukan oleh Halamury, dkk (2022) yang menggunakan analisis regresi kuantil dalam mengatasi data *outlier* pada data IPM kabupaten/kota di wilayah Indonesia timur. Hasil penelitian yang didapatkan menyatakan estimasi parameter pada data yang mengalami *outlier* dapat diatasi dengan menggunakan analisis regresi kuantil, melalui analisis ini juga didapatkan hasil estimasi faktor faktor yang mempengaruhi nilai IPM kabupaten/kota di wilayah Indonesia timur.

Taksiran interval atau selang kepercayaan pada regresi kuantil dapat dilakukan dengan beberapa metode, yaitu dengan pendekatan direct, rank- score, dan *resampling* (Hapsery, 2017). Metode *resampling* merupakan salah satu metode yang digunakan dalam analisis regresi kuantil untuk mentoleransi adanya tingkat kesalahan yang ada atau untuk menduga bahwa data tersebut tidak keluar dari batas nilai kesalahan yang telah ditentukan dalam suatu model (Fransiska, 2020). Menghitung selang kepercayaan pada regresi kuantil *resampling* dapat dilakukan dengan menggunakan teknik *bootstrap* (Nurfauziah, 2020).

Metode *bootstrap* ialah melakukan pengambilan sampel ulang data populasi melalui data sampel dengan mengambil sebanyak m sampel dari n data yang ada dengan pengembalian, kemudian melakukan replikasi *bootstrap* sebanyak B kali. Dari beberapa replikasi *bootstrap* dapat ditentukan selang kepercayaan untuk setiap parameter model (Nurfauziah, 2020). Metode *bootstrap* dapat digunakan tanpa membutuhkan asumsi distribusi karena penggunaan sampel asli sebagai populasi. Hasil pengambilan sampel ulang dari populasi tersebut akan digunakan sebagai sampel *bootstrap* (Nababan & Simamora, 2023). Penelitian yang pernah dilakukan oleh Sihombing (2021) membandingkan metode *bootstrap* dan *jackknife* dalam estimasi kurtosis dan skewness yang diakibatkan adanya nilai-nilai ekstrim dalam satu set data pada data kekuatan gempa bumi di Indonesia pada tahun 2020. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode *bootstrap* merupakan metode yang lebih efisien dibandingkan dengan metode *jackknife*, hal ini didukung dengan kecilnya tingkat *mean square error* dan nilai bias yang dihasilkan. Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini akan melakukan penggunaan analisis regresi kuantil dengan menggunakan metode *bootstrap* pada data tingkat kemiskinan di Sulawesi Selatan yang mengandung outlier.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, permasalahan yang akan dikaji pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter model regresi kuantil *bootstrap* yang digunakan pada data angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan?
2. Apa faktor-faktor yang berpengaruh terhadap angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan berdasarkan model regresi kuantil *bootstrap*?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, batasan masalah pada penelitian ini adalah nilai kuantil yang digunakan terdiri dari $\theta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$, dan 0.9. Pengambilan data pada metode *bootstrap* dilakukan sebanyak n kali *resampling* data sampai mendekati nilai konvergen dengan nilai standar error dalam kondisi konstan. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah persentase angka kemiskinan, nilai Indeks Pembangunan Manusia (IPM), persentase Angka Partisipasi Murni (APM) pendidikan formal, dan Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT) di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2020 – 2022. Penggunaan data APM didasarkan pada jumlah peserta usia sekolah yang menempuh jenjang pendidikan pada usia tertentu, bukan angka partisipasi kasar (APK) yang tidak memperhatikan usia sekolah melainkan hanya memperhatikan jumlah orang sekolah.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memperoleh bentuk estimasi parameter model regresi kuantil *bootstrap* pada data angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan.

2. Untuk memperoleh faktor-faktor yang berpengaruh terhadap angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan berdasarkan model regresi kuantil *bootstrap*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin dicapai dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah wawasan pengetahuan mengenai model regresi kuantil *bootstrap* pada data yang mengalami masalah *outlier*.
2. Memberikan informasi kepada pemerintah untuk menetapkan kebijakan dalam rangka mengatasi masalah angka kemiskinan di Provinsi Sulawesi Selatan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Model regresi merupakan metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antar variabel. Hubungan tersebut dapat dituliskan kedalam bentuk persamaan yang menghubungkan variabel tak bebas (Y) dan variabel bebas (X) (Youlana, 2015). Terdapat dua jenis regresi yang terkenal, yaitu regresi linier sederhana dan regresi linier berganda atau sering disebut dengan regresi klasik. Regresi linier klasik dalam pengaplikasiannya digunakan untuk menggambarkan hubungan antara peubah tak bebas dan peubah bebas (Gujarati, 2004).

Bentuk umum model regresi linier berganda dengan variabel bebas adalah seperti pada Persamaan (2.1) berikut (Kutner, dkk, 2004) :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

Dengan Y_i adalah variabel tidak bebas untuk pengamatan ke-i, untuk i=1,2,…,n, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_p$ adalah parameter, x_{i1}, x_{i2}, x_{ip} adalah variabel bebas, dan $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{1.1} & X_{1.2} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{2.1} & X_{2.2} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

keterangan :

$\boldsymbol{y}$: vektor variabel tidak bebas berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{X}$: matriks variabel bebas berukuran $n \times (p+1)$

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran $(p+1) \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor error berukuran $n \times 1$

2.2 Analisis Regresi Kuantil

Regresi Kuantil merupakan suatu pendekatan dalam analisis regresi yang dikenalkan oleh Koenker dan Bassett (1978). Pendekatan ini menduga berbagai fungsi kuantil dari suatu distribusi y sebagai fungsi dari X. Analisis regresi kuantil digunakan untuk mengatasi asumsi yang tidak terpenuhi, antara lain autokorelasi, asumsi normal, tidak ada multikolinearitas dan homogenitas varian (Saputri, 2018). Analisis regresi kuantil memiliki sifat yang robust terhadap data *outlier*, sehingga analisis ini sangat dianjurkan untuk digunakan dalam menganalisis sejumlah data yang tidak simetris serta memiliki distribusi yang tidak homogen. Interval kepercayaan pada regresi kuantil dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa pendekatan metode, yaitu dengan metode *direct*, *rank- score*, dan *resampling* (Hapsery, 2017). Selain itu, pada regresi kuantil dapat diperoleh prediksi interval kepercayaan berdasarkan beberapa kuantil dari respon yang terdapat dalam model (Beyaztas & Shang, 2022).

Kelebihan dari regresi kuantil adalah memberikan informasi yang lebih banyak mengenai distribusi bersyarat dari sebuah data dibandingkan regresi mean atau regresi median (Rizki & Taqiyuddin, 2021). Analisis regresi kuanti menggunakan pendekatan estimasi parameter dengan memisahkan atau membagi data menjadi kuantil dengan mengasumsikan fungsi kuantil bersyarat pada suatu distribusi data dan meminimalkan kesalahan absolut dari bobot asimetris (Saputri, 2018).

Misalkan Y adalah peubah acak dengan fungsi distribusi F_Y dan θ adalah konstanta dengan $0 < \theta < 1$. Kuantil ke-θ dari F_Y, dinotasikan sebagai $Q_\theta(y)$ adalah solusi untuk F_Y(y) = θ , yaitu :

$$Q_\theta(y) = F_Y^{-1}(\theta) = inf\{y : F_Y(y) \geq \theta\} \quad (2.2)$$

Fungsi distribusi probabilitas pada kuantil ke-θ dari F_Y yang didefinisikan sebagai Persamaan (2.2) merupakan fungsi kuantil ke-θ dari variabel respon y. Persamaan umum regresi kuantil linier dengan $j = 1,2,\ldots,p$ untuk kuantil bersyarat $Q_\theta(y_i|X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ip})$ dari variabel dependen Y yaitu (Arda, 2022) :

$$y_i(\theta) = \beta_0(\theta) + \beta_i(\theta)X_{i1} + \ldots + \beta_p(\theta)X_{ip} + \varepsilon_i(\theta) \quad (2.3)$$

dengan $i = 1,2,\ldots,n$

keterangan :

$y_i(\theta)$: variabel respon ke-i pada kuantil ke-θ

β_0 : intersep pada sumbu y, titik potong sumbu y

θ : nilai kuantil

$\beta_0(\theta)$: penduga parameter pada kuantil ke-θ

X_{i1} : pengamatan ke-i pada variabel prediktor ke-j

$\varepsilon_i(\theta)$: error ke-i dan kuantil ke-θ

Apabila model regresi kuantil disajikan dalam bentuk matriks, Persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} y_1(\theta) \\ y_2(\theta) \\ \vdots \\ y_n(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0(\theta) \\ \beta_1(\theta) \\ \vdots \\ \beta_p(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1(\theta) \\ \varepsilon_2(\theta) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(\theta) \end{bmatrix},$$

Selanjutnya bentuk matriks yang disajikan dapat ditulis dalam bentuk persamaan model linear sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y}(\theta) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(\theta) + \boldsymbol{\varepsilon}(\theta) \tag{2.4}$$

dengan :

$\boldsymbol{y}(\theta)$: Vektor kolom berukuran $n \times 1$ dari variabel respon y

$\boldsymbol{X}$: Matriks berukuran $n \times (p + 1)$ dengan baris n (pengamatan ke-i) pada kolom p variabel prediktor ke-j dengan $i = 1,2, \dots , n$, $j = 1,2, \dots , p$.

$\boldsymbol{\beta}(\theta)$: Vektor kolom berukuran $(p + 1) \times 1$ dari parameter β_j dengan $j = 1,2, \dots , p$

$\boldsymbol{\varepsilon}(\theta)$: Vektor kolom berukuran $n \times 1$ dari error ε_i

Jika fungsi bersyarat dari kuantil ke-θ dengan variabel bebas X tertentu, maka fungsi bersyarat tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Q_\theta(y_i|X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}) &= Q_\theta(y \mid X) \\ &= \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta}(\theta), i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Maka solusi optimasi pada regresi kuantil adalah sebagai berikut :

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \rho\,(\theta)(\mathrm{y}_i - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta}(\theta))), i = 1, 2, \dots, n \quad \theta \in (0,1) \tag{2.6}$$

Sehingga $y_i = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ merupakan sampel random dengan variabel dependen (Y) $dan\, x_i \in \mathbb{R}^p$ merupakan vector kovariat, sedangkan $\rho(\theta)(\varepsilon) = \varepsilon\big(\theta - I\,(\varepsilon < 0)\big),\ 0 < \theta < 1$ yang merupakan *loss function* yang asimetrik dari ε yang merupakan residual dari estimasi parameter (Hapsery, 2017).

2.3 Estimasi Parameter Regresi Kuantil

Estimasi parameter dalam regresi OLS, hanya dapat digunakan untuk memberi solusi permasalahan mean, sehingga Koenker dan Basset (1978) mengembangkan metode alternatif yaitu regresi kuantil. Regresi kuantil merupakan pengembangan dari regresi kuantil median. Regresi OLS diestimasi dengan meminimumkan jumlah kuadrat residual, sedangkan regresi kuantil akan meminimumkan jumlah absolut residual atau *Least Absolute Deviation* (LAD) (Hapsery, 2017).

Pada regresi kuantil error diberi bobot yang berbeda. Bobot yang digunakan yaitu θ untuk nilai error yang lebih besar dari nol dan (1 - θ) untuk error yang kurang dari nol. Perkalian antara error dengan bobot yang diberikan disebut sebagai *loss function* $\rho(\theta)(\varepsilon)$ yaitu:

$$\rho(\theta)(\varepsilon) = \sum_{i=1,\varepsilon_1 \geq 0}^{n} \theta|\varepsilon_i| + \sum_{i=1,\varepsilon_1 \geq 0}^{n} (1-\theta)\,|\varepsilon_i| \qquad (2.7)$$

Dengan demikian, dalam regresi kuantil terdapat fungsi kuantil bersyarat ke-θ yang mempertimbangkan penduga $\hat{\beta}(\theta)$, sehingga diperoleh solusi untuk permasalahan tersebut yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{n} \rho(\theta)\big((y - Q(\theta)(y\,|X)\big)\,;\ \theta \in (0,1) \qquad (2.8)$$

dengan :

$\rho(\theta)(\varepsilon)$	: *loss function* yang asimetris
θ	: Indeks kuantil dengan $\theta \in (0,1)$
$Q(\theta)(y\|X)$	: fungsi kuantil ke-θ dari variabel *y* dengan syarat *X*

Dalam regresi kuantil, pada kuantil ke-θ dari F_Y meminimumkan *loss function* dari Persamaan (2.8) adalah :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(\theta) &= \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho(\theta)(\varepsilon_1) \\ &= \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho(\theta)\big(y_i - \boldsymbol{X_i^T}\boldsymbol{\beta}(\theta)\big) \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Sehingga, $\theta \epsilon$ (0,1) dan $\rho(\theta)(\varepsilon_i)$ pada Persamaan (2.9) didefinisikan :

$$\rho(\theta)(\varepsilon) = \begin{cases} \theta\varepsilon & , jika\ \varepsilon \geq 0 \\ (1-\theta)\varepsilon & , jika\ \varepsilon < 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Dengan mempertimbangkan $\hat{\beta}(\theta)$, sehingga diperoleh solusi untuk permasalahan tersebut yang dinyatakan (Hapsery, 2017) :

$$\hat{\beta}(\theta) = \min_{\beta} \left\{ \theta \sum_{i=1;\ \varepsilon \geq 0}^{n} |\mathrm{y}_i - \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{\beta}(\theta)| + (1-\theta) \sum_{i=1;\ \varepsilon < 0}^{n} |\mathrm{y}_i - \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{\beta}(\theta)| \right\} \tag{2.11}$$

2.4 Optimasi dengan Algoritma *Simpleks* pada Model Regresi Kuantil

Algoritma *simpleks* adalah salah satu metode pendugaan parameter secara numerik untuk regresi kuantil yang telah dikembangkan oleh Barrodam dan Robert pada tahun 1974. Metode *simpleks* merupakan cara untuk menentukan kombinasi optimal dari tiga variabel atau lebih, algoritma ini dapat digunakan untuk memberikan solusi permasalahan program linier dengan komputasi serta melibatkan banyak variabel dalam satu model (Nurmayanti dan Sudrajat, 2021).

Solusi dari permasalahan di persamaan kuantil pada umumnya sulit diperoleh secara analitik, sehingga dilakukan secara numerik. Salah satu metode numerik yang digunakan adalah metode *simpleks* (Arda, 2022). Algoritma *simpleks* memerlukan sebuah Tabel *simpleks* atau tabulasi *simpleks* seperti Tabel 2.1 dibawah ini :

Tabel 2.1 Tabel Awal Metode *Simpleks* Untuk Kasus Regresi Kuantil

c_j			0	0	$\cdots$	0	θ	$\cdots$	θ	$(1-\theta)$	$\cdots$	$(1-\theta)$
c_b	v_b	w_b	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	d_{11}	$\cdots$	d_{1n}	d_{1n}	$\cdots$	d_{1n}
d_{11}^{+}	x_1	b_1	a_{ij}									
d_{2n}^{+}	x_2	b_2										
$\vdots$	$\vdots$											
d_{1n}^{+}	xn	bn										
z_j												
$c_j - z_j$												

keterangan:

a. Baris c_j diisi dengan koefisien fungsi tujuan.

b. Kolom c_b diisi dengan koefisien variabel yang menjadi basis.

c. Kolom v_b diisi dengan nama-nama variabel yang menjadi basis (variabel yang Menyusun matriks identitas). Dalam hal ini diisi dengan variabel surplus, yaitu deviasi atas.
d. Kolom w_b diisi dengan nilai ruas kanan dari kendala.
e. Baris z_j diisi dengan rumus $z_j = \sum d_i a_{ij}$, $j = 1,2, \dots , n$ (Arda, 2022).

Berikut ini akan diberikan proses algoritma *simpleks*, yaitu:

1. Mengubah terlebih dahulu masalah optimasi linear ke bentuk standar, fungsi tujuan dan kendala diubah ke dalam bentuk persamaan. Fungsi tujuan meminimalkan:

$$\theta \sum|\varepsilon_{i1}(\theta)| + (1 - \theta) \sum|\varepsilon_{i2}(\theta)| \tag{2.12}$$

dengan Kendala :

$$X\hat{\beta}(\theta) + \varepsilon_1(\theta) - \varepsilon_2(\theta) = y, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0 \tag{2.13}$$

Bentuk tersebut diubah ke dalam bentuk standar sesuai dengan data yang disajikan.

2. Persamaan fungsi tujuan dan kendala dimasukkan ke dalam bentuk Tabel awal *simpleks.*
3. Menentukan kolom kunci (variabel masuk), yaitu untuk masalah maksimum memilih $c_j - z_j$ yang terbesar, sedangkan untuk masalah minimum memilih $c_j - z_j$ yang terkecil.
4. Menentukan baris kunci, yaitu dari nilai rasio antara nilai ruas kiri (b_i) dengan koefisien kolom kunci (a_{ij}), pilih yang terkecil (untuk masalah minimum atau maksimum). Rasio = $\frac{b_i}{a_{ij}}$, di mana rasio > 0.
5. Menentukan pivot dari perpotongan antara kolom kunci dan baris kunci yang dinamakan elemen kunci atau elemen penentu iterasi algoritma *simpleks* dan akan diubah nilainya menjadi 1.
6. Selanjutnya, melakukan operasi baris dasar (OBD) berdasarkan pivot untuk baris lainnya, termasuk baris $c_j - z_j$ dengan nilai elemen-elemen yang termasuk di dalam kolom kunci dijadikan nol (selain elemen yang dijadikan pivot).

7. Proses iterasi untuk masalah maksimum berhenti jika semua nilai pada baris $c_j - z_j \leq 0$, berarti solusi sudah optimal. Apabila masih ada $c_j - z_j > 0$ (positif), maka iterasi algoritma *simpleks* masih berlanjut. Untuk masalah minimum berhenti jika semua nilai pada baris $c_j - z_j \geq 0$. Apabila masih ada $c_j - z_j < 0$ (negatif), maka iterasi algoritma *simpleks* masih berlanjut (Khairunisa, 2015).

2.5 Metode *Bootstrap*

Metode *bootstrap* adalah metode berbasis *resampling* data sampel dengan syarat pengembalian pada data asli dengan harapan sampel tersebut dapat mewakili data populasi, biasanya metode *resampling* diambil secara ribuan kali agar dapat mewakili data populasinya. Metode *bootstrap* sangat cocok digunakan untuk mengestimasi parameter pada ukuran data sampel yang relatif kecil (Rodliyah, 2016). Metode *bootstrap* digunakan untuk mencari distribusi sampling dari suatu estimator dengan prosedur *resampling*. Metode *bootstrap* digunakan tanpa membutuhkan asumsi distribusi, hal ini dikarenakan dalam penggunaannya sampel asli digunakan sebagai populasi (Nababan dan Simamora, 2023).

Metode *resampling bootstrap* sangat cocok digunakan pada data nonparametric karena dapat membentuk berbagai model dan mudah diimplementasikan dalam berbagai model (Yanuar, dkk., 2019). Teknik *bootstrap* merupakan suatu metode *resampling* untuk memperkirakan distribusi probabilitas suatu statistik. *Bootstrap* diperkenalkan oleh Bradley Efron pada tahun 1979. Istilah *bootstrap* berasal dari *"pull oneself up by one's bootstrap"*, yang berarti berpijak diatas kaki sendiri, berusaha dengan sumber daya minimal. Dalam ilmu statistika, istilah itu diartikan sebagai data yang sedikit, data yang menyimpang, atau data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya (Nababan dan Simamora, 2023).

Metode *bootstrap* merupakan metode pendugaan parameter dengan cara *resampling* dari sampel asli sebanyak replikasi. Interval kepercayaan *bootstrap* kemudian digunakan sebagai uji konsistensi algoritma yang dibangun pada estimator oleh suatu model regresi (Saputri, 2018). Sampel asli kemudian diperlukan sebagai populasi dan diaplikasikan prosedur *monte carlo* pada sampel tersebut. Hal ini dilakukan dengan mengambil sejumlah besar sampel ulang (*Resample*) berukuran *n* dari sampel asli secara random dengan pengembalian. Proses *resampling* akan diperoleh sampel yang berukuran sama dengan sampel asli dan dengan pengembalian dimungkinan diperoleh *resample* yang sama lebih dari sekali (Monalisa, 2016).

Interval kepercayaan *bootstrap* yang ditingkatkan didasarkan pada kuantil distribusi replika *bootstrap*. Teknik ini memiliki keuntungan lebih stabil dari pada metode *resampling* lainnya, dan juga memiliki sifat cakupan teoretis yang lebih baik (Nababan dan Simamora, 2023). Dengan menggunakan metode intensif komputer, metode *bootstrap* dapat mengevaluasi signifikansi koefisien regresi melalui metode *resampling* (Abram, dkk., 2016). Metode *bootstrap* merupakan suatu teknik pendekatan nonparametrik untuk menaksir berbagai kuantitas statistik seperti mean, standar error, dan bias suatu estimasi atau untuk membentuk interval konfidensi dengan mengikuti algoritma tertentu.

Metode *bootstrap* tidak selalu memerlukan asumsi distribusi dan formulasi analitis yang rumit untuk mengestimasi parameter dari suatu populasi. Jika asumsi dari suatu distribusi tidak diketahui maka disebut kasus nonparametrik. Jika $\hat{\theta}$ merupakan mean (rata rata) hasil *resampling*, maka dapat ditentukan rata rata dan variansi *bootstrap* yaitu (Putri, 2019) :

$$\bar{\theta} *= \frac{\sum_{b=1}^{B} \hat{\theta} *_b}{B} \tag{2.14}$$

dan

$$\hat{V} * = \frac{\sum_{b=1}^{B} (\hat{\theta} *_b - \bar{\theta} *)^2}{B} \tag{2.15}$$

Selang kepercayaan yang dapat digunakan adalah selang kepercayaan persentil. Metode persentil didasarkan pada persentil ke α dan persentil ke (1−α) fungsi distribusi kumulatif dari estimasi parameter vektor *bootstrap* yaitu (Oktafia, dkk., 2016) :

$$[\ \hat{\beta}(\theta_q)_{lo}\ ,\ \hat{\beta}(\theta_q)_{up}\ ] = [\ \hat{\mathrm{F}}(\alpha), \hat{\mathrm{F}}(1-\alpha)] \tag{2.16}$$

Nilai *lo* dan *up* masing-masing merupakan batas bawah dan batas atas dari selang kepercayaan. Adapun langkah-langkah algoritma bootstrap residual adalah sebagai berikut (Putri, 2019):

1. Menentukan fit model berdasarkan sampel asli dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, diperoleh $\hat{Y} = X\hat{\beta}$
2. Menghitung nilai residual $e = Y - \hat{Y}$, diperoleh $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$
3. Mengambil sampel *bootstrap* berukuran n dari $e_1, e_2, \dots, e_n$ secara random dengan pengembalian, diperoleh sampel *bootstrap* pertama sebagai berikut $e^1 = (e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1)$
4. Menghitung nilai *bootstrap* untuk Y dengan menambahkan e^1 pada fit model, sehingga diperoleh $Y^1 = X\hat{\beta} + e^1$
5. Menghitung koefisien regresi untuk sampel *bootstrap* yang pertama dengan Y^1 dengan X, diperoleh $\hat{\beta}^1 = (X^T X)^{-1} X^T Y^1$
6. Mengulangi proses sebelumnya sebanyak B kali, diperoleh $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \dots, \hat{\beta}^B$
7. Pendekatan estimasi *bootstrap* untuk parameter regresi adalah mean dari distribusi $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \dots, \hat{\beta}^B$.

2.6 Outlier

Data *outlier* dapat didefinisikan sebagai amatan yang menyimpang sedemikian jauh dari pengamatan. Data *outlier* selain dapat membuat data tidak berdistribusi normal, juga dapat berefek bagi pengambilan suatu kesimpulan atau keputusan pada penelitian (Sihombing, 2022). Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi adanya *outlier* yang berpengaruh dalam koefisien regresi yaitu dengan scatter plot dan boxplot (Arda, 2022).

Data *outlier* pada data multivariat perlu dilakukan sebab walaupun data yang dianalisis menunjukkan tidak ada *outlier* pada tingkat univariat, tetapi nilai observasi tersebut dapat menjadi *outlier* bila sudah saling dikombinasikan. Jarak mahalanobis (*The Mahalanobis Distance*) untuk tiap observasi dapat dihitung dan akan menunjukan jarak sebuah observasi dari rata-rata semua variabel dalam sebuah ruang multidimensional. Jarak mahalanobis (*The Mahalanobis Distance*) dapat dihitung dengan rumus :

$$d = \sqrt{(x - \mu)' \, S^{-1} \, (x - \mu)} \qquad (2.17)$$

Nilai μ adalah vektor mean berukuran, dan *S* adalah matriks varian kovarian simetris dari populasi. Nilai mahalanobis dibandingkan dengan χ^2 α ; p dan p adalah jumlah variabel yang diobservasi. Jika jarak mahalanobis minimum atau maksimumnya kurang dari nilai χ^2 α; p maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat *outlier* multivariat (Bowo, dkk., 2013).