NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF GENERALISASI PETERSEN YANG DIMODIFIKASI

NUR ANNISA SYAHRON

H011171510

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF GENERALISASI PETERSEN YANG DIMODIFIKASI

NUR ANNISA SYAHRON
H011171510

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

SKRIPSI

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF GENERALISASI PETERSEN YANG DIMODIFIKASI

NUR ANNISA SYAHRON
H011171510

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Ujian Sarajana pada 5 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan
pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Megesahkan:
Pembimbing Utama

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

Mengesahkan:
Pembimbing Pertama

Jusmawati M, S.Si., M.Si.
NIP.19680601199512 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya menyatakan bahwa. skripsi berjudul "Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Generalisasi Petersen yang Dimodifikasi" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing (Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Pertama). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 16 Agustus 2024

METERAI TEMPEL 10000
5FE1DALX326569842

Nur Annisa Syahron
H011171510

Ucapan Terima Kasih

Alhamdulillahirobbil'alamin, Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul " Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Generalisasi Petersen yang Dimodifikasi" sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada program studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Salam dan shalawat penulis kirimkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW sebagai teladan terbaik dalam menjalani kehidupan.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan, bimbingan, dukungan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada Ayahanda Alm. Syahron Madjid dan Ibunda Andi Irma Pola yang telah bekerja keras membesarkan dan mendidik penulis dengan kesabaran dan penuh kasih sayang serta senantiasa memberikan doa dan dukungan sehingga dapat menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula atas doa dukungan dan doa kepada adik-adik Andi Amirah Luthfiah Ariqoh dan Andi Muhammad Dzasiliyah serta seluruh keluarga. Pada kesempatan ini pula, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
4. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulis skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si., M,Si. selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tuluus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
6. Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
7. Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si. selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
8. Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmunya kepada penulis. Serta seluruh staf yang telah membantu dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.

9. Terima kasih kepada Esty, Indah, Indy, Sarti, Fika, Lenny dan Matematika 2017 yang telah memberikan warna selama perkuliahan dan memberi semanagat kepada penulis.
10. Spesial untuk sahabat penulis Khairunnisa, Julia Hardianti, Aulia Kyntani, Deasy Ramadhani, dan Andika Anggriani yang selalu mendukung dan membantu penulis dalam hal apapun.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dan memberikan doa serta motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis. Aaamiin Ya Robbal Alamin.

Makassar, 16 Agustus 2024

Nur Annisa Syahron

ABSTRAK

NUR ANNISA SYAHRON. **Nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi** (dibimbing oleh Nurdin dan Jusmawati Massalesse).

Latar Belakang. Penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf telah banyak dilakukan, namun nilai total ketidakteraturan titik pada sebarang graf secara umum sangat sulit ditemukan. Hal ini dikarenakan setiap graf memiliki pola atau struktur yang berbeda, tetapi penelitian mengenai nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi belum dilakukan. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi.**Metode.** Penelitian dibagi jadi 4 tahap, yakni 1) identifikasi masalah untuk menentukan hal-hal yang akan dibahas dalam penelitian ini. 2) studi literatur terhadap jurnal-jurnal yang berkaitan dengan bidang penelitian, 3) menjelaskan definisi, teorema dan sifat-sifat pelabelan total ketidakteraturan titik pada $\mathbb{P}_n$, 4) membuat algoritma pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf $\mathbb{P}_n$. **Hasil.** Nilai total ketidakteraturan titik pada graf $\mathbb{P}_n$ dibagi menjadi tiga kasus, yakni 1) $n = 6k + 1, k = 2,3, ...,$ 2) $n = 6k + 3, k = 1,2,3, ...,$ 3) $n = 6k + 5, k = 1,2,3, \dots,$ untuk ketiga kasus tersebut merupakan pelabelan-k total tidak teratur titik. Dimana $k = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil$ dan diperoleh bahwa $\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil < tvs(\mathbb{P}_n)$. **Kesimpulan.** Penentuan nilai total ketidakteraturan titik graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi $\mathbb{P}_n$, untuk $n \geq 5$ dimana n adalah bilangan bulat ganjil. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

$$tvs\,(\mathbb{P}_n) = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil.$$

Kata kunci : Graf Generalisasi Petersen yang Dimodifikasi, Pelabelan Total Tidak Teratur Titik, Nilai Total Ketidakteraturan Tititk.

ABSTRACT

NUR ANNISA SYAHRON. **Total vertex irregularity strength of modifed generalized Petersen graph** (supervised by Nurdin and Jusmawati Massalesse).

Background. Research on the total vertex irregularity strength of graphs has been widely conducted. However, determining the total vertex irregularity strength for any general graph is very difficult. This is because each graph has a different pattern or structure. Nevertheless, research on the total vertex irregularity strength of modified generalized Petersen graphs has not yet been conducted.**Aim.** This research aims to determine the lower and upper bounds of the total vertex irregularity strength of modified generalized Petersen graphs. The research consisted of four serial steps, *i.e.* 1) identifying the issues to determine the topics that will be discussed in this research, 2) Conducting a literature review of journals related to the research field, 3) Explaining the definitions, theorems, and properties of total vertex irregularity labeling on $\mathbb{P}_n$, 4) Developing an algorithm for total vertex irregularity labeling on the graph $\mathbb{P}_n$. **Results.** The total vertex irregularity strength of the graph $\mathbb{P}_n$ is divided into three cases, i.e 1) $n = 6k + 1, k = 2,3, \ldots$, 2) $n = 6k + 3, k = 1,2,3, \ldots$, 3) $n = 6k + 5, k = 1,2,3,\ldots$, for all three cases, these represent $k-$labelings that result in total vertex irregularity. Where $k = \left\lceil\frac{2n+3}{6}\right\rceil$,it is found that $\left\lceil\frac{p+\delta}{\Delta+1}\right\rceil = \left\lceil\frac{2n+3}{6}\right\rceil < tvs(\mathbb{P}_n)$. **Conclusion.** Determination of the total vertex irregularity strength for the modifed generalized graph $\mathbb{P}_n$, where $n \geq 5$ and n is an odd integer. The result obtained is as follows:

$$tvs\ (\mathbb{P}_n) = \left\lceil\frac{2n+3}{6}\right\rceil.$$

Keywords : Modifed Generalized Petersen Graph, Total Vertex Irregular Labeling, Total Vertex Irregularity Strength.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf G
$\mathbb{P}_n$	Graf generalisasi petersen yang dimodifikasi
$G = (V, E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	Himpunan sisi dari graf G
$u, v \in V(G)$	Suatu titik anggota dari $V(G)$
$p(G)$	Orde atau banyaknya titik pada graf G
$q(G)$	Ukuran atau banyaknya sisi pada graf G
$N_G(v)$	Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G
$d(v_i)$	Derajat suatu titik v_i pada graf G
$\delta(G)$	Derajat minimum pada graf G
$\Delta(G)$	Derajat maksimum pada graf G
Wl_k	Jalan pada graf G dengan Panjang k
P_n	Graf lintasan
C_n	Graf siklus
K_n	Graf lengkap
$P(n, m)$	Graf petersen yang diperumum
$\mathbb{P}_n$	Graf generalisasi petersen yang dimodifikasi
$wt(v)$	Bobot titik v
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik v
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi uv
$tvs\ (G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf G

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler, seseorang matematikawan asal Swiss. Leonard Euler memperlihatkan Solusi dari masalah 7 buah jembatan yang ada do kota Könisberg (sekarang Bernama kota Kaliningrad) melalui pembuktian sederhana yaitu dengan menggambarkan titik untuk mewakili daratan dan sisi untuk mewakili jembatan. Hasil yang diperoleh adalah jembatan tidak dapat dilalui tepat satu kali apabila berawan daln berakhir di daratan yang sama. Walaupun tidak ditulis dalam bahasa graf, tetapi secara teoritis inilah konsep dasar lahirnya teori graf. Teori graf dapat digunakan untuk menyederhanakan berbagai persoalan dengan mempresentasikannya melalui suatu gambar yaitu menggambarkan titik untuk mewakili objek sedangkan hubungan antara objeknya digambarkan dengan garis yang biasa disebut sisi. (Hasmawati 2020)

Penelitian tentang teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), Stewart (1966), kemudian Kotzig dan Rosa (1970).

Pelabelan dari suatu graf adalah pemetaan elemen-elemen graf ke sutau bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah semua titik dan sisi maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*) dan jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). (Wallis 2001)

Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan tidak teratur (*irregular labelling*) yang diperkenalkan oleh Chatrand dkk (1988). Terinspirasi dari konsep nilai ketidakteraturan dan berbagai macam pelabelan total lainnya, Bača dkk., memperkenalkan dua parameter yang baru yaitu nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik graf. Selanjutnya, pelabelan total tidak teratur diklasifikasikan menjadi pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik.

Pelabelan tidak teratur pada graf G adalah suatu pemetaaan yang memetakan sisi G kehimpunan bilangan positif $\{1,2,\ldots,k\}$,sedemikian sehinnga semua titiknya mempunyai bobot yang berbeda. Bobot yang dimaksud adalah penjumlahan label titik dan label sisi-sisi yang terkait dengan titik tersebut. Adapun nilai total ketidakteraturan suatu graf G (*total vertex irregularity strength of graph*), dinotasikan dengan $tvs(G)$, yaitu suatu bilangan bulat positif terkecil k, sedemikian sehingga fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi dari suatu graf G pada himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,\ldots k\}$ menghasilkan bobot yang berbeda pada setiap titiknya. (Baca, et al. 2007)

Beberapa peneliti telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada beberapa graf. Nurdin dkk telah menentukan $tvs(T)$ dimana T merupakan graf pohon dengan n titik. Ahmad dkk (2016) telah menentukan $tvs(P(n,m))$ dimana $P(n,m)$ merupakan graf generalisasi Petersen. Badawi dkk (2018) telah menetukan $tvs(G_{n^2})$ dimana G_{n^2} merupakan graf *Grid.* Riskawati dkk (2019) telah menentukan $tvs\big(sp(m,r,2)\big)$ dimana $p(m,r,2)$ adalah graf *series parallel.* Mahaseng dkk (2020) telah mementukan $tvs(Wd_{5,m})$ dimana $Wd_{5,m}$ adalah graf kincir.

Walaupun penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf telah banyak dilakukan, namun nilai total ketidakteraturan titik pada sebarang graf secara umum sangat sulit ditemukan. Hal ini dikarenakan setiap graf memiliki pola atau struktur yang berbeda. Pola atau struktur ini sangat berpengaruh dalam pemberian label untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titiknya. Sehingga, penelitian ini masih terbuka untuk graf-graf lainnya yang belum diteliti. Selanjutnya, Ahmad dkk., telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen. Namun, belum ditentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi. Karena itu, dengan menggunakan pelabelan yang sama, maka dalam penelitian ini akan ditentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi dengan notasi $\mathbb{P}_n$ untuk n ganjil. Sehingga, yang menjadi judul penelitian ini adalah “Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Genralisasi Petersen yang Dimodifikasi,”

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana cara menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi ?
2. Bagaimana cara menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Peteresen ?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi untuk $n \geq 5, n$ adalah bilangan positif ganjil.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yaitu :

1. Untuk menambah wawasan dan pengetahuan tentang graf, khususnya pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik.
2. Sebagai referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait nilai total ketidakteraturan suatu graf.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab, sebagai berikut :

1. Bab I Pendahuluan, yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.
2. Bab II Tinjauan Pustaka, dalam bab ini disajikan secara singkat mengenai konsep dasar, yaitu berbagai macam definisi dan teorema-teorema pada teori graf yang relevan dengan pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi petersen, antara lain, pengertian graf, terminologi graf, jenis-jenis graf sederhana, operasi gabungan graf, pelabelan graf, dan pelabelan total ketidakteraturan titik.
3. Bab III Metodologi apaenelitian, yang memuat metode penelitian dan langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi petersen yang dimodifikasi.
4. Bab IV Pembahasan, dalam bab ini dibahas mengenai hasil utama dari tugas akhir ini yaitu menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf generalisasi petersen yang dimodifikasi.
5. Bab V Penutup, bab ini memuat kesimpulan dari pengerjaan tugas akhir secara keseluruhan serta terdapat saran yang ditujukan bagi peneliti lain agar bisa mengembangkan penelitian ini.

1.7 Kajian Pustaka

Definisi dan terminologi (istilah) graf yang digunakan dalam penelitian ini dikutip dari buku yang berjudul "Pengantar dan jenis-jenis graf". (Hasmawati 2020)

1.7.1 Pengertian Graf

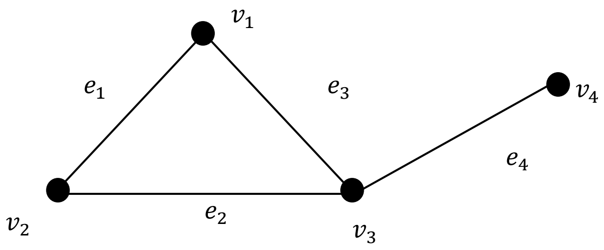
Secara sederhana, graf didefinisikan sebagai himpunan titik yang terhitung oleh garis/sisi. Jadi elemen-elemen dalam graf adalah titik dan sisi. Secara formal, definisi graf adalah sebagai berikut.

Definisi 1. Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan $G(V, E)$. Himpunan titik G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi G dinotasikan dengan $E(G)$, sehingga sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan juga dengan $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Banyaknya unsur dari $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur dari $E(G)$ disebut *size* (ukuran) dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungkan u dan v biasanya ditulis $e = (u, v)$

Penulisan sisi $e = (u, v)$ akan ditulis uv.

Contoh 1 :



Gambar 1. Graf G pada 4 Titik

Berdasarkan Gambar 1, himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dengan $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2, v_3, e_3 = v_1v_3$, dan $e_4 = v_3v_4$. Karena $p(G) = 4$ dan $q(G) = 4$, maka orde dan ukuran dari graf G masing-masing adalah 4.

1.7.2 Terminologi Graf

Terdapat banyak terminologi (istilah) yang digunakan dalam teori graf. Berikut beberapa terminologi graf yang akan digunakan pada bab pembahasan tugas akhir ini.

Definisi 2. Misalkan G adalah suatu graf dan $\mathrm{v_i}, \mathrm{v_j} \in \mathrm{V(G)}$ serta $\mathrm{e} \in \mathrm{E(G)}$. Jika $\mathrm{e} = \mathrm{v_i v_j}$, maka dikatakan bahwa :

1. Titik $\mathrm{v_i}$ bertetangga (adjacent) dengan titik $\mathrm{v_j}$.
2. Setiap e terkait (incident) dengan titik $\mathrm{v_i}$, demikian pula untuk titik $\mathrm{v_j}$.

Misalkan $\mathrm{e_1, e_2, e_3} \in \mathrm{E(G)}$ dan $\mathrm{v} \in \mathrm{V(G)}$. Sisi-sisi $\mathrm{e_1, e_2, e_3}$ dikatakan bertetangga apabila $\mathrm{e_1, e_2}$, dan $\mathrm{e_3}$ terkait dengan titik v.

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G, dinotasikan $N_G(v)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$$

Derajat suatu titik dalam graf menyatakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik tersebut. Adapun definisi derajat titik adalah sebagai berikut.

Definisi 3. Derajat suatu titik $\mathrm{v_i}$ dalam graf G, dinotasikan dengan $\mathrm{d(v_i)}$, adalah banyaknya sisi $\mathrm{e} \in \mathrm{E(G)}$ yang terkait dengan titik $\mathrm{v_i}$ atau $\mathrm{d(v_i)} = |\mathrm{N_G(v_i)}|$. Derajat minimum dari suatu graf G, dinotasikan $\delta(\mathrm{G})$ dan derajat maksimum suatu graf G dinotasikan dengan $\Delta(\mathrm{G})$.

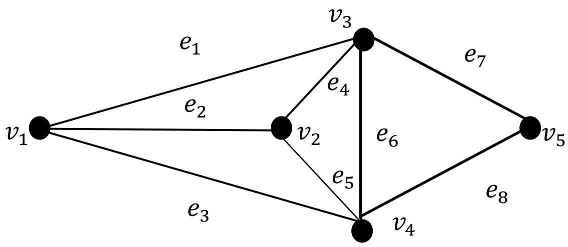
Definisi 4. Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $\mathrm{V(G)} = \{\mathrm{v_1, v_2, \dots v_{k,} v_n}\}$ dan himpunan sisi $\mathrm{E(G)} = \{\mathrm{e_i; e_i = v_i v_j}\ \text{untuk suatu}\ \mathrm{i, j}\}$. Jalan W pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi :

$$\mathrm{v_{0,} e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k} \text{ dengan } \mathrm{e_i = v_i v_{i+1}, i = 0,1,2, \dots, k-1}.$$

Jadi, panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jika $\mathrm{v_i} \neq \mathrm{v_j}$ untuk setiap $\mathrm{i, j} \in \{0,1,2, \dots, \mathrm{k}\}$, maka W disebut lintasan.

Definisi 5. Lintasan yang panjangnya k dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n pada graf G adalah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $\mathrm{v}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{v}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{\mathrm{k}-1}, \mathrm{e}_\mathrm{k}, \mathrm{v}_\mathrm{k}$ sedemikian sehingga $\mathrm{e}_1 = \mathrm{v}_0\mathrm{v}_1, \mathrm{e}_2 = \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{k} = \mathrm{v}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{v}_\mathrm{k}$ adalah sisi dari graf, dan semua titik yang dilalui berbeda.

Contoh 2 :



Gambar 2. Graf G

Himpunan titik dan himpunan sisi dari G adalah

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$$

Berdasarkan graf G diperoleh

i. Titik v_1 bertetangga dengan titik $v_2 v_3$, dan v_4. Titik v_1 dan titik v_2 dikatakan bertetangga karena terkait oleh sisi e_2, dengan kata lain, $e_2 = v_1v_2$. Titik v_1 dan titik v_4 bertetangga karena terkait oleh sisi e_3, dengan kata lain, $e_3 = v_1v_4$. Namun, titik v_1 dan v_5 tidak bertetangga karena tidak ada sisi yang mengaitkan keduanya.

ii. Sisi $e_1 = v_1v_3$ terkait dengan titik $v_1$dan v_3, sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan v_2, v_4 dan v_5.

iii. Sisi $e_1, e_2, dan\ e_3$ bertetangga karena terkait dengantitik yang sama yaitu v_1

iv. Derajat setiap titiknya adalah $\mathrm{d}(v_1) = d(v_2) = 3, d(v_3) = d(v_4) = 4$ dan $d(v_5) = 2$. Sedangkan derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G)$=4 dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 2$

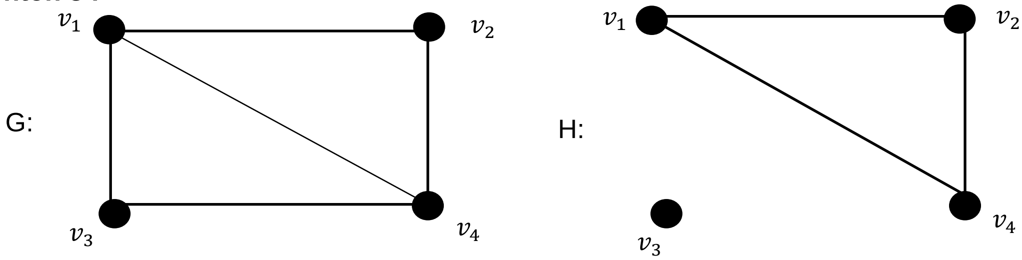
v. Salah satu jalan pada graf G tersebut adalah $v_1 - e_1 - v_3 - e_7 - v_5 - e_8 - v_4 - e_3 - v_1$. Panjang jalan W adalah 4.

vi. $v_1 - e_2 - v_2 - e_5 - v_4 - e_8 - v_5$ merupakan lintasan terbuka yang memiliki titik awal dan titik akhiryang berbeda dan $v_1 - e_3 - v_4 - e_8 - v_5 - e_7 - v_3 - e_1 - v_1$ merupakan lintasan tertutup yaitu lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang melalui keduanya.

Definisi 6. Misalkan G adalah graf sederhana, Graf G dikatakan graf terhubung apabila setiap dua titik $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{V(G)}$,terdapat suatu lintasan $\mathrm{u} - \mathrm{v}$. Jika tidak, maka G disebut graf tak-terhubung (disconnected graph).

Contoh 3 :



Gambar 3. Graf G Terhubung dan Graf tak terhubung H

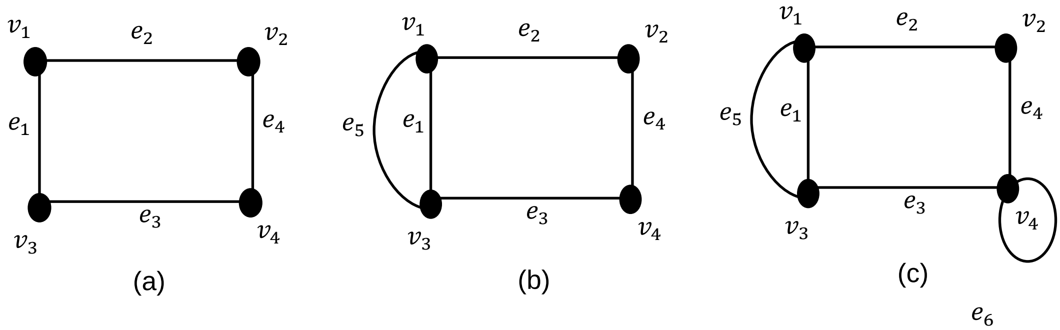
1.7.3 Jenis-Jenis Graf

Graf diklasifikasikan kedalam beberapa kategori berdasarkan syarat atau kondisi tertentu, seperti jumlah titik, keberadaan *loop* dan sisi ganda, serta orientasi arah pada sisi. Adapun graf yang dibahas pada sub bab ini hanyalah jenis graf yang terkait dengan penelitian.

Berdasarkan keberadaan *loop* dan sisi ganda, graf dibedakan menjadi dua yakni graf sederhana dan graf tak sederhana. *Loop* adalah sisi graf yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Sedangkan, disebut sisi ganda (*multiple edges)* apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama. Graf dengan sisi ganda disebut multigraf (*multigraph)* sedangkan graf dengan sisi ganda dan *loop* disebut graf palsu (*pseudograph).* Kedua jenis graf ini merupakan jenis graf tak sederhana. Sedangakan, graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi ganda.

Definisi graf sederhana dikutip dari (Hasmawati 2020) diberikan sebagai berikut:
Definisi 7. Graf sederhana G yaitu pasangan $(\mathrm{V(G)}, \mathrm{E(G)})$ dengan $\mathrm{V(G)}$ adalah himpunan diskrit bergingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex) dan $\mathrm{E(G)}$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $\mathrm{V(G)}$ yang disebut sisi (edge).

Contoh 4:

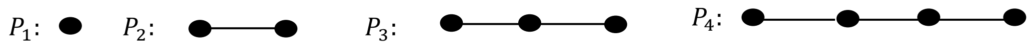


Gambar 4. (a)Graf sederhana, (b) multigraph, dan (c) pseudograph

Graf lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari tepat satu lintasan. Graf lintasan memiliki dua titik yang berderajat satu sedangkan titik lainnya berderajat dua. Berikut definisi graf dikutip dari (Chartrand and Zhang 2005).

Definisi 8. Graf G memiliki n titik yang dapat dilabelkan dengan $v_1, v_2 \dots v_n$ dan sisi $v_1v_2, v_2v_3, \dots v_{n-1}v_n$ maka G dinamakan graf lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

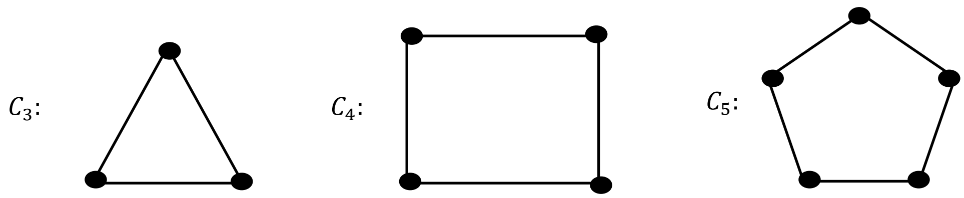
Contoh 5:



Gambar 5. Graf Lintasan P_1, P_2, P_3, dan P_4

Definisi 9. Graf Siklus merupakan graf yang memiliki n titik dan n sisi dimana ($\mathbf{n} \geq \mathbf{3}$) merupakan graf terhubung yang dibentuk dari lintasan tertutup yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, dimana setiap titiknya berderajat 2 dan masing-masing titiknya dilalui tepat satu kali.

Contoh 6:

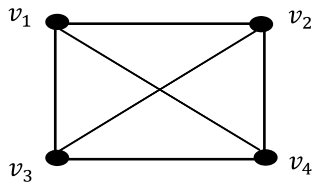


Gambar 6. Graf siklus $C_3, C_4, dan\ C_5$

Definisi 10. Graf G dikatakan lengkap jika setiap 2 titik yang berbeda dari G bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. (Chartrand dan Zhang 2005)

Graf lengkap K_n memiliki jumlah sisi maximum dari graf dengan n titik. Setiap 2 titik yang berbeda dari K_n terkait dengan suatu sisi, jumlah pasangan titik dari K_n adalah $\binom{n}{2}$ dan jumlah sisi pada K_n $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Contoh 7:



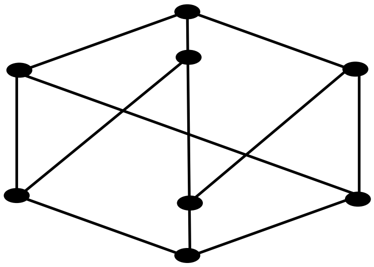
Gambar 7. Graf lengkap K_4

Pada Gambar 7. diberikan graf $G = K_4$, dimana graf K_4 mempunyai order $p(G) = 4$,dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan ukuran $u(G) = 6$, dengan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$.

Definisi 11. Graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur atau graf regular. Jika derajat setiap titik adalah r, maka G dikatakan sebagai graf regular-r. (Wilson 1996)

Jumlah sisi pada graf teratur berederajat r dengan n buah titik adalah $\frac{nr}{2}$.. Graf lingkaran C_n merupakan graf regular yang berderajat 2, dan graf lengkap K_n merupakan graf regular yang berderajat $n - 1$.

Contoh 8 :



Gambar 8. Graf 3-reguler

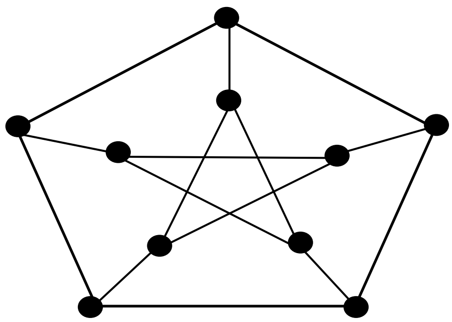
Graf petersen adalah graf 3-reguler yang memiliki 10 titik dan 15 sisi. Berikut definisi graf petersen yang dikutip dari (Hasmawati 2020)

Definisi 12. Graf G disebut graf petersen jika himpunan titik

$V(G) = V(C_5) \cup V(C_5)$ dan

$E(G) = E(C_5) \cup E(C_5) \cup \{v_iv_{i+2}: i = 0,1, \ldots ,4; 1 + 2\ mod\ 4\}$.

Contoh 9 :

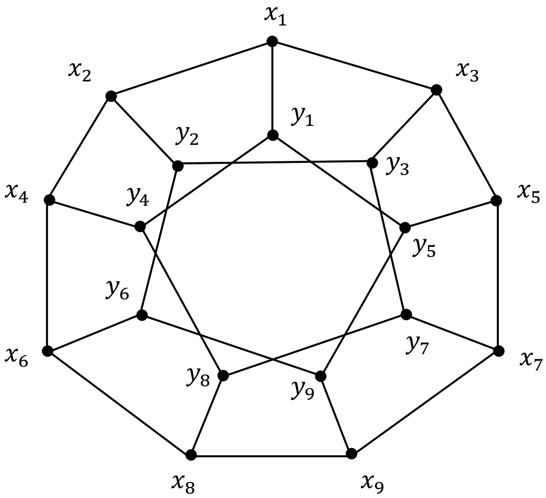


Gambar 9. Graf Petersen

Definisi 13. Graf Petersen diperumum (generalized Petersen graph) merupakan graf yang terdiri dari n titik luar $\mathrm{x_i}$, n sisi luar $\mathrm{x_i x_{i+1}}$, n jeruji $\mathrm{x_i y_i}$, n titik dalam $\mathrm{y_i}$, n sisi dalam $\mathrm{y_i y_{i+m}}, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$ dengan indeks merupakan modulo dari n. (Ginting and Banjarnahor 2016)

Graf Petersen diperumum dinyatakan sebagai $P(n, m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya titik luar (sama dengan banyaknya titik dalam) dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3, 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Graf petersen diperumum merupakan graf teratur berderajat 3.

Contoh 10:

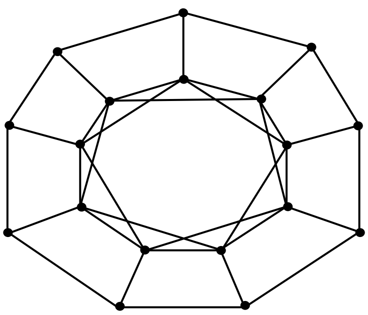


Gambar 10. Graf Generalisasi Petersen $P(9,2)$

Definsi 14. Graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi merupakan graf yang diperoleh dari graf generalisasi Petersen dengan menambahkan sisi $\mathrm{y_1 y_2, y_i y_{i+2}, \ldots y_{n-1} y_n}$ untuk setiap $\mathrm{i} = 1,2, \ldots \mathrm{n} - 2$.

Graf generalisasi Petersen yang dimodifikasi dinotasikan dengan $\mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ dimana $\mathbf{n} \geq \mathbf{5}$ dan n merupakan bilangan bulat ganjil.

Contoh 11:



Gambar 11. $\mathbb{P}_9$ – Graf generalisasi petersen yang dimodifikasi

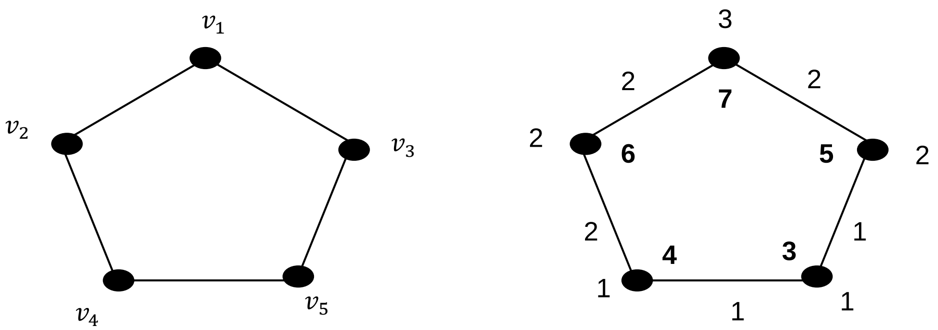
1.7.4 Pelabelan Graf

Pada bagian ini akan dipaparkan beberapa konsep yang terkait dengan pelabelan graf dan bobot dari elemen graf.

Definisi 15. Pelabelan dari suatu graf adalah pemetaan elemen-elemen graf ke suatu bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah semua titik dan sisi maka pelabelan disebut pelabelan total (total labeling). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (vertex labeling) dan jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (edge labeling). (Wallis 2001)

Definisi 16. Bobot (weight) dari titik v pada pelabelan total adalah label tiik v ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v. Bobot dari titik v, yaitu $\mathrm{wt(v)} = \mathrm{f(v)} + \sum_{\mathrm{uv} \in \mathrm{E}} \mathrm{f(uv)}$.

Contoh 12:



Gambar 12. Pelabelan total pada graf siklus C_5

Misal f adalah pelabelan total pada graf C_5 seperti pada gambar 2.4.1, yaitu:

$f(v_1) = 3$	$f(v_1v_2) = 2$
$f(v_2) = 2$	$f(v_1v_3) = 2$
$f(v_3) = 2$	$f(v_2v_4) = 2$
$f(v_4) = 1$	$f(v_3v_5) = 1$
$f(v_5) = 1$	$f(v_4v_5) = 1$

Bobot titik $v_1, v_2, v_3, v_4\ dan\ v_5$ masing- masing adalah :

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_3) = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_4) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_1v_2) + f(v_3v_5) = 2 + 2 + 1 = 5$$

$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_2v_4) + f(v_4v_5) = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$wt(v_5) = f(v_5) + f(v_3v_5) + f(v_4v_5) = 1 + 1 + 1 = 3$$

1.7.5 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Definisi 17. Misalkan Graf G(V,E) adalah suatu graf sederhana dan $f: V \cup E \to \{1,2,\dots k\}$ untuk suatu bilangan bulat positif k disebut pelablean-k total tidak teratur titik (total vertex irregularity k-labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik x dan y yang berbeda pada V, berlaku

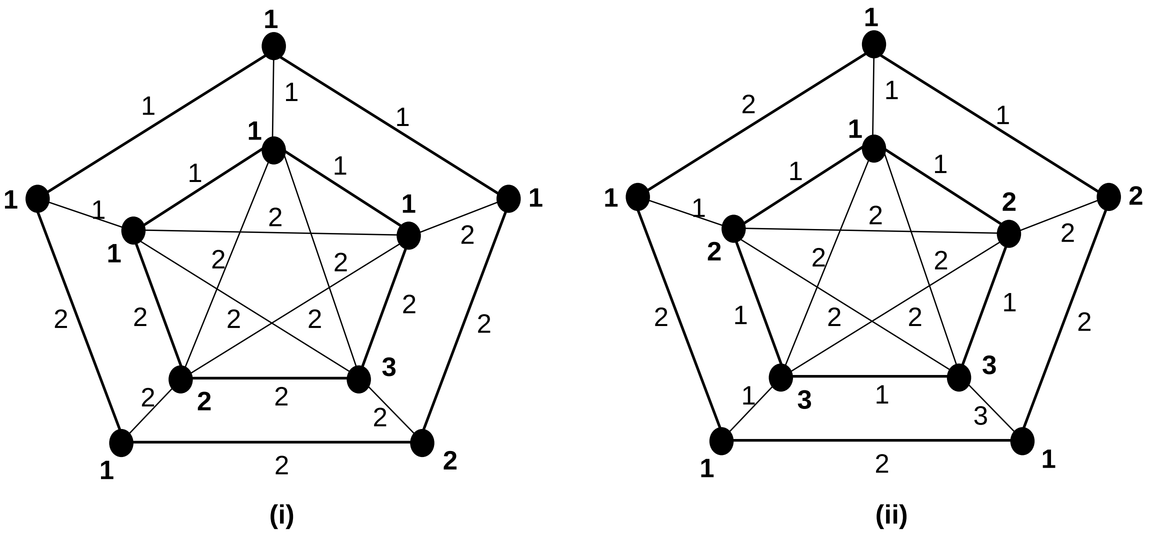
$$wt(x) \neq wt(y)$$

dimana

$$wt(x) = f(x) \sum_{u \in V(G)} f(xu).$$

Definisi 18. Misal $G(V,E)$ suatu graf sederhana. Nilai total ketidakteraturan titik dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikan sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$.

Contoh 13:



Gambar 13. Beberapa pelabelan total pada graf petersen yang dimodifikasi $\mathbb{P}_5$

Berdasarkan Gambar 13 diperoleh:

1. Gambar 13 (i) merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik pada $\mathbb{P}_5$.
2. Gambar 13 (ii) bukan merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik karena terdapat bobot titik yang sama yaitu $wt(x_2) = wt(x_4) = 6,\ wt(y_1) = wt(x_5) = 8, dan\ wt(y_3) = wt(y_4) = 10$

Namun, graf $\mathbb{P}_5$ tidak mempunyai pelabelan-1 dan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik, sehingga diperoleh k terkecil adalah 3. Oleh karena itu, nilai total ketidakteraturan titik pada graf $\mathbb{P}_5$ adalah 3. Dengan kata lain, $tvs(\mathbb{P}_5) = 3$

Batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik suatu graf G diberikan pada teorema berikut.

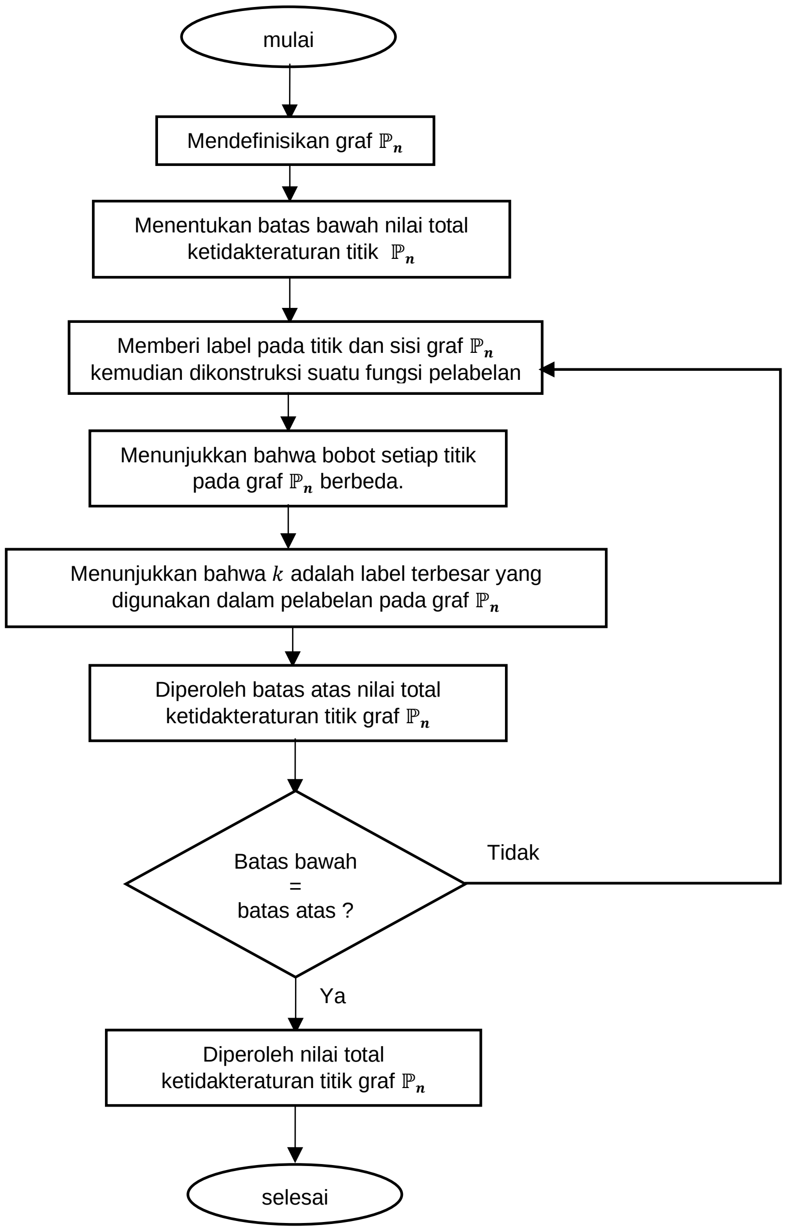
Teorema 1. Misal sebuah graf $\mathrm{G(V,E)}$ dimana n adalah banyaknya titik dengan derajat minimum $\delta(\mathrm{G})$ dan derajat maksimum $\Delta(\mathrm{G})$,maka berlaku

$$\left\lceil \frac{(\mathrm{n} + \delta(\mathrm{G}))}{(\Delta(\mathrm{G}) + 1)} \right\rceil \leq \mathrm{tvs}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{n} + \Delta(\mathrm{G}) - 2\delta(\mathrm{G}) + 1$$

BAB 2
METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur yaitu metode penelitian yang dilakukan dengan mempelajari jurnal atau skripsi yang berkaitan dengan topik penelitian, selanjutnta mengumpulkan informasi serta objek yang ada untuk digunakan dalam mendapatkan hasil penelitian.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf generalisasi petersen dibuat dalam alur kerja berikut :



Gambar 14. Diagram Alir Penelitian