

**TESIS**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL  
MODEL MATEMATIKA DINAMIKA PERCERAIAN**

Disusun dan diajukan oleh

**SYAMSIR  
H022191008**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2020**

**LEMBAR PENGESAHAN TESIS**  
**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL**  
**MODEL MATEMATIKA DINAMIKA PERCERAIAN**

Disusun dan diajukan oleh

**SYAMSIR**  
**H022191008**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Studi Program Magister Program Studi Matematika Fakultas  
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 07 Desember 2020

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

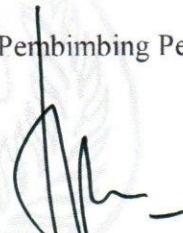
Menyetujui,

Pembimbing Utama,



**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**  
**NIP. 196801141994121001**

Pembimbing Pendamping



**Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 198009042003122001**

Ketua Program Studi



**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**  
**NIP. 196402071991031013**

Dekan Fakultas/Sekolah  
Pascasarjana



**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**  
**NIP. 197205151997021002**

## LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Syamsir  
NIM : H022191008  
Program Studi : Matematika  
Jenjang : S2

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

### **Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Perceraian**

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa Tesis yang saya tulis ini benar – benar merupakan hasil karya saya sendiri. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan Tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 07 Desember 2020

Yang menyatakan



Syamsir

## **PRAKATA**

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas izin dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan tesis ini sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister pada Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin. Gagasan yang melatarbelakangi penelitian ini timbul dari beberapa hasil penelitian terkait model dinamika perceraian. Penulis mendedikasikan tulisan ini kepada kedua orang tua tercinta, Muaraf dan Salma beserta adik – adik penulis, Fitriani, Rahmawati dan Saparuddin yang selalu mendo'akan, memberikan semangat dan dukungannya.

Dalam kesempatan ini penulis juga tidak lupa menyampaikan ucapan terimakasih yang tulus kepada :

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc, selaku pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktu, tenaga dan pikiran untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si, selaku pembimbing Pendamping yang telah meluangkan banyak waktu, tenaga dan pikiran untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat dan arahnya dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Prof. Jeffry Kusuma, Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc, dan Dr. Firman, S.Si., M.Si, selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tesis ini.
4. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
5. Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin Dr. Eng Amiruddin, M.Si, seluruh dosen dan staf administrasi pada Program Studi S2 Matematika Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan.
6. Rahmatiah, S.S, junior yang selalu setia menerjemahkan tesis saya. Terimakasih.

7. Teman – teman program studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin angkatan 2019 dan kepada semua pihak yang telah membantu baik langsung maupun tidak langsung, diucapkan terimakasih yang sebesar – besarnya.

Akhirnya semoga hasil tesis ini memberikan kontribusi berharga bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan member informasi ilmiah secara umum.

Makassar, 07 Desember 2020



**Syamsir**

## ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan, serta mengkaji aplikasi teori kontrol optimal pada sistem persamaan diferensial dari model matematika dinamika perceraian dengan empat kompartemen yaitu *Marriage* (M), *Separated* (S), *Divorce* (D), dan *Hardship* (H). Penelitian ini juga bertujuan untuk meminimumkan jumlah individu yang status cerai dengan biaya yang minimum.

Masalah kontrol optimal diturunkan dengan menggunakan prinsip minimum *Pontryagin* kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Diperoleh dua bentuk kontrol optimal dari model dinamika perceraian ini yaitu dengan memaksimalkan peran campur tangan pihak keluarga dan memaksimalkan peran pihak eksternal yaitu hakim dalam meminimalisir jumlah individu yang status cerai. Berdasarkan hasil simulasi numerik, jumlah individu yang bercerai tanpa kontrol yang awalnya mencapai 1.512.487 orang dapat ditekan menjadi hanya 53.681 orang dengan adanya penerapan kontrol yang optimal. Hal ini menunjukkan bahwa peran campur tangan pihak keluarga dan pihak eksternal yaitu hakim dalam meminimalisir jumlah individu yang bercerai memberikan hasil yang efektif.

**Kata Kunci:** *Dinamika Perceraian, Model Matematika, Titik Kesetimbangan, Analisis Kestabilan, Prinsip Minimum Pontryagin, Metode Forward-Backward Sweep, Kontrol Optimal.*

## **ABSTRACT**

*This study aims to determine the point of equilibrium, analyze stability, and examine the application of optimal control theory to systems of differential equations from the dynamic mathematical model of divorce with four compartments, namely Marriage (M), Separated (S), Divorce (D), and Hardship (H). . This study also aims to minimize the number of individuals who are divorced with minimum costs.*

*The optimal control problem is derived using the Pontryagin minimum principle then solved numerically using the Forward-Backward Sweep method. Obtained two forms of optimal control from this dynamic model of divorce, namely by maximizing the role of family interference and maximizing the war of external parties, namely judges in minimizing the number of individuals who are divorced. Based on the results of numerical simulations, the number of individuals who divorced without control which initially reached 1.512.487 people can be reduced to only 53,681 people with the implementation of optimal control. This shows that the role of the interference of the family and external parties, namely the judge in minimizing the number of divorced individuals, gives effective results.*

**Keywords:** *Divorce Dynamics, Mathematical Model, Equilibrium Point, Stability Analysis, Pontryagin Minimum Principle, Forward-Backward Sweep Method, Optimal Control.*

## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>PRAKATA</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xiii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	3
1.4 Manfaat Penelitian .....	3
1.5 Batasan Masalah .....	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>5</b>
2.1 Studi Review Perkembangan Pemodelan Dinamika Perceraian .....	5
2.2 Pemodelan Matematika .....	6
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa .....	7
2.4 Titik Keseimbangan .....	7
2.5 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan .....	7
2.6 Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> .....	8
2.7 Bilangan Reproduksi Dasar .....	10
2.8 Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalan .....	10
2.9 Prinsip Minimum Pontryagin .....	15



2.10 Metode <i>Forward-Backward Sweep</i> .....	19
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>22</b>
3.1 Identifikasi Masalah .....	22
3.2 Studi Literatur .....	22
3.3 Formulasi Model Matematika Dinamika Perceraian .....	22
3.4 Analisis Kestabilan .....	22
3.5 Formulasi Model Kontrol Optimal .....	22
3.6 Prinsip Minimum <i>Pontryagin</i> .....	23
3.7 Simulasi Numerik .....	23
3.8 Penarikan Kesimpulan .....	23
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>24</b>
4.1 Pengembangan Model Matematika Dinamika Perceraian .....	24
4.2 Titik Keseimbangann Model .....	27
4.3 Bilangan Reproduksi Dasar .....	29
4.4 Analisis Kestabilan Model .....	31
4.5 Penyelesaian Kontrol Optimal .....	36
4.6 Simulasi Numerik .....	42
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>51</b>
5.1 Kesimpulan .....	51
5.2 Saran .....	51
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>53</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>55</b>

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b> Sifat Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen .....	8
<b>Tabel 4.1</b> Daftar Variabel dan Parameter Model Dinamika Perceraian .....	26
<b>Tabel 4.2</b> Nilai Parameter untuk Simulasi Model .....	43

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Proses Pemodelan Matematika .....	6
<b>Gambar 2.2</b> Perbandingan Grafik Kontrol Otimal dan State Optimal .....	12
<b>Gambar 4.1</b> Diagram Kompartemen Model Matematika Dinamika Perceraian	25
<b>Gambar 4.2</b> Grafik Perubahan Individu Status Menikah dalam Populasi terhadap waktu ( $t = 50$ tahun) .....	44
<b>Gambar 4.3</b> Grafik Perubahan Individu Pisah Ranjang dalam Populasi terhadap waktu ( $t = 50$ tahun) .....	45
<b>Gambar 4.4</b> Grafik Perubahan Individu yang Bercerai dalam Populasi terhadap waktu ( $t = 50$ tahun) .....	46
<b>Gambar 4.5</b> Grafik Perubahan Individu yang Depresi atau Stres dalam Populasi terhadap waktu ( $t = 50$ tahun) .....	47
<b>Gambar 4.6</b> Grafik Perbandingan Fungsi Kontrol Optimal $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$	48

## DAFTAR SIMBOL

<b>Simbol</b>	<b>Nama / Arti</b>
$\varphi$	Phi ( <code>\varphi</code> )
$\psi$	Psi ( <code>\psi</code> )
$\Lambda$	Lambda ( <code>\lambda</code> )
$\mu$	Mu ( <code>\mu</code> )
$\beta$	Beta ( <code>\beta</code> )
$\delta$	Delta ( <code>\delta</code> )
$\gamma$	Gamma ( <code>\gamma</code> )
$\varepsilon$	Epsilon ( <code>\varepsilon</code> )
$\rho$	Rho ( <code>\rho</code> )

## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1.</b> Program 1 – simulasi.m .....	55
<b>Lampiran 2.</b> Program 2 – simulasi_thesis.m .....	64

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Dalam suatu perkawinan semua orang menghendaki kehidupan rumah tangga yang bahagia, kekal, dan sejahtera, sesuai dengan tujuan dari perkawinan yang terdapat dalam UU No.1 tahun 1974. Akan tetapi, tidak semua orang dapat membentuk suatu keluarga yang dicita-citakan tersebut, hal ini dikarenakan adanya perceraian, baik cerai mati, cerai talaq, maupun cerai atas putusan hakim.

Perceraian merupakan lepasnya ikatan perkawinan antara seorang pria dengan seorang wanita sebagai suami-isteri, yang dilakukan di depan sidang Pengadilan, yaitu Pengadilan Negeri untuk non muslim dan Pengadilan Agama bagi yang beragama Islam. Sedangkan pengertian perceraian menurut hukum perdata adalah penghapusan perkawinan dengan putusan hakim atas tuntutan salah satu pihak dalam perkawinan itu (Djumairi Achmad, 1990: 65). Untuk melakukan perceraian harus ada cukup alasan, sebagaimana yang tercantum dalam pasal 39 UU No.1 tahun 1974 dan pasal 19 PP No.9 tahun 1975. Pasal 39 UUP menyebutkan:

1. Perceraian hanya dapat dilakukan di depan sidang Pengadilan setelah Pengadilan yang bersangkutan berusaha dan tidak berhasil mendamaikan kedua belah pihak.
2. Untuk melakukan perceraian harus ada cukup alasan, bahwa antara suami-isteri itu tidak akan dapat hidup rukun sebagai suami-isteri.
3. Tata cara perceraian di depan sidang Pengadilan diatur dalam Peraturan Perundang-undangan tersendiri.

Sedangkan dalam pasal 19 PP No.9 tahun 1975 menyebutkan:

1. Salah satu pihak berbuat zina atau menjadi pemabok, pemadat dan lain sebagainya yang sukar disembuhkan.
2. Salah satu pihak meninggalkan pihak lain selama 2 (dua) tahun berturut-turut tanpa izin pihak lain dan tanpa alasan yang sah atau karena hal lain diluar kemampuannya.

3. Salah satu pihak mendapat hukuman penjara 5 (lima) tahun atau hukuman yang lebih berat setelah perkawinan berlangsung.
4. Salah satu pihak melakukan kekejaman atau penganiayaan yang membahayakan pihak lain.
5. Salah satu pihak mendapat cacat badan atau penyakit dengan akibat tidak dapat menjalankan kewajibannya sebagai suami/ isteri.
6. Antara suami dan isteri terus menerus terjadi perselisihan dan pertengkaran serta tidak ada harapan akan hidup rukun lagi dalam rumah tangga.

Disamping alasan tersebut di atas, terdapat faktor lain yang berpengaruh pada terjadinya perceraian yaitu: faktor ekonomi atau keuangan, faktor hubungan seksual, faktor agama, faktor pendidikan, faktor usia muda, bahkan faktor orang ketiga. Masalah dinamika epidemik perceraian adalah salah satu masalah yang tidak asing lagi ditengah-tengah masyarakat. Sehingga masalah ini menarik dikaji melalui pendekatan model matematika.

Pemodelan matematika merupakan konstruksi matematis yang didesain untuk memahami suatu fenomena atau sistem yang terjadi dalam kehidupan. Pemodelan matematika dapat berupa suatu grafik, simbol-simbol matematika, simulasi ataupun eksperimen. Pemodelan matematika yang merupakan tiruan dari suatu fenomena nyata adalah hasil dari proses yang tidak lepas dari asumsi-asumsi dan penyederhanaan (Toaha, 2013).

Beberapa penelitian sebelumnya telah memodelkan masalah yang berkaitan dengan dinamika perceraian ini. Seperti contoh model matematika dinamika perceraian yang dikembangkan oleh Patience Pokuaa Gambrah, dkk (2018) yang meneliti dampak konseling dalam kasus perceraian. Kemudian penelitian yang dilakukan oleh Patience Pokuaa Gambrah dan Yvonne Adzadu yang membagi model matematikanya menjadi 3 kompartemen yaitu marriage (M), separated (S), Divorced (D). Pada penelitian ini, peneliti menarik sebuah kesimpulan bahwa wabah perceraian tidak hanya dapat dikendalikan dengan mengurangi tingkat kontak antara perkawinan dan perceraian tetapi juga meningkatkan jumlah perkawinan yang masuk ke pemisahan dan mendidik terpisah untuk menahan diri dari perceraian yang dapat berguna dalam memerangi epidemi.

Oleh karena itu, peneliti akan melakukan modifikasi dengan cara menggabungkan dua model tersebut di atas serta menambahkan beberapa Kontrol untuk meminimalisir terjadinya perceraian. Peneliti akan mengkaji dinamika perceraian dengan Kontrol optimal dalam tulisan yang berjudul:

“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika  
Dinamika Perceraian”

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan model matematika pada dinamika perceraian?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika dinamika perceraian?
3. Bagaimana bentuk kontrol optimal dari dinamika perceraian dengan menggunakan empat kompartemen yaitu *Married (M)*, *Separated (S)*, *Divorce (D)*, dan *Hardship (H)*
4. Bagaimana perbandingan simulasi numerik dari model dinamika perceraian tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui model matematika dinamika perceraian yang dimodelkan.
2. Menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan pada model dinamika perceraian.
3. Menentukan bentuk kontrol optimal dari faktor pengaruh keluarga dan faktor eksternal (Hakim) pada model dinamika perceraian.
4. Menganalisis hasil simulasi numerik model matematika tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal pada dinamika perceraian.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman tentang model matematika dinamika perceraian sekaligus sebagai instrumen atau alat bantu dalam usaha memahami, mengembangkan serta meminimalisir adanya perceraian.



### **1.5 Batasan Masalah**

Model matematika dinamika perceraian yang digunakan dibatasi pada masalah interaksi antara individu yang telah menikah dengan individu yang telah menikah lainnya, individu yang berpisah dan individu yang telah bercerai. Kompartemen pada penelitian ini dibagi menjadi 4 kelas yaitu *Marriage (M)*, *Separated (S)*, *Divorce (D)*, serta *Hardship (H)*.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Study Review Perkembangan Pemodelan Dinamika Perceraian

Dalam penelitian ini disertakan beberapa jurnal yang berkaitan dengan pemodelan dinamika perceraian. Yang pertama oleh Patience Pokuaa Gambah and Yvonne Adzadu (2018), peneliti menggunakan model MSD untuk mempelajari dinamika perceraian sebagai epidemi. Disini peneliti membahas keberadaan dan stabilitas keseimbangan perceraian dan endemik yang bebas dari perceraian dan melakukan analisis sensitivitas angka-angka reproduksi. Berdasarkan data, jumlah reproduksi dasar dari keseimbangan bebas perceraian diperkirakan  $R_0 = 0,76923 < 1$ . Ini menyiratkan bahwa hanya populasi perkawinan yang hadir dan populasi yang dipisahkan dan bercerai berkurang menjadi nol ( $S = 0, D = 0$ ). Ini berarti bahwa model stabil asimtot pada  $R_0 < 1$ .

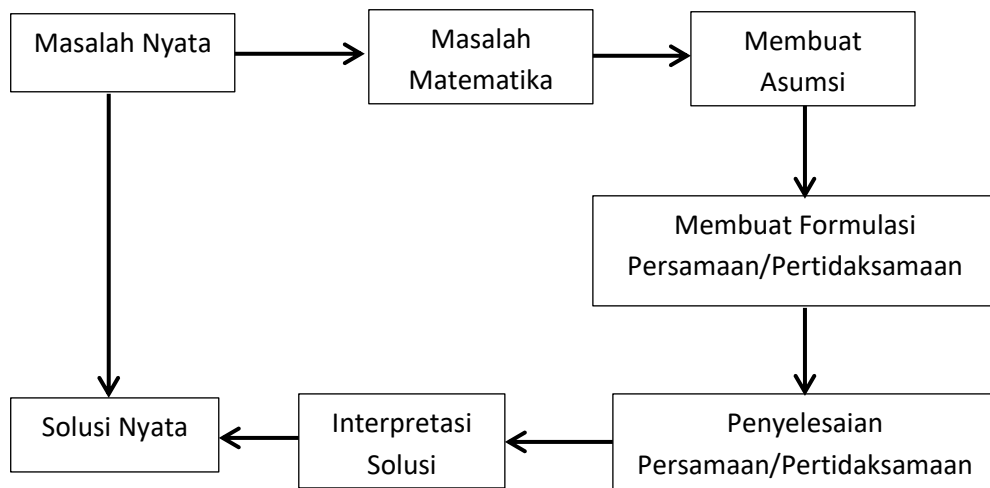
Selanjutnya Patience Pokuaa Gambah, dkk (2018), penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian sebelumnya oleh Patience Pokuaa Gambah and Yvonne Adzadu (2018). Pada model ini peneliti menggunakan model SMPD untuk mempelajari dinamika perceraian sebagai epidemi. Peneliti membahas keberadaan dan stabilitas keseimbangan bebas perceraian dan melakukan analisis sensitivitas angka reproduksi. Berdasarkan data yang digunakan, angka reproduksi dasar dari kesetimbangan bebas cerai diperkirakan  $R_0 = 0,4316 < 1$ . Ini menyiratkan bahwa keseimbangan bebas perceraian stabil asimtotik. Mempertimbangkan situasi ketika  $R_0 > 1$ , itu akan menyiratkan bahwa ada masalah epidemi yang menunjukkan situasi di mana yang Rentan, Menikah, Terpisah dan Bercerai hidup berdampingan dalam populasi. Pada penelitian ini peneliti berkesimpulan bahwa, epidemi perceraian tidak hanya dapat dikendalikan dengan mengurangi tingkat kontak antara Menikah dan Bercerai tetapi juga meningkatkan jumlah orang yang bercerai yang kembali ke pernikahan dan mendidik mereka yang rentan untuk tidak memasuki perkawinan yang mereka tidak yakin dengan masa depannya dan juga Menikah untuk menahan diri dari Perceraian dan Pemisahan dan ini bisa berguna dalam memerangi epidemi.

Berbeda dengan model yang dikonstruksikan oleh Agustina Adu, dkk (2018). Peneliti pada modelnya memeriksa dampak konseling dalam kasus perceraian. Kesulitan yang berhubungan dengan perceraian / penyakit memaksa individu untuk

pergi untuk konseling. Pada penelitian ini, peneliti berkesimpulan bahwa jumlah reproduksi dasar telah dihitung pada titik keseimbangan bebas perceraian dan sama dengan 0,34508 yang menunjukkan bahwa dengan konseling, perceraian tidak akan terjadi dan menjadi epidemi di masyarakat.

## 2.2 Pemodelan matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu studi tentang konsep matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan di dunia nyata ke dalam pernyataan matematika. Terdapat beberapa tahap dalam menyusun model matematika yang dapat dinyatakan dalam alur diagram berikut:



**Gambar 2.1** Proses Pemodelan Matematika

Dari Gambar 2.1, alur proses pemodelan matematika di atas dapat dijelaskan sebagai berikut (Widowati, 2007):

1. Memodelkan masalah dunia nyata ke dalam pengertian matematika Pada langkah ini dilakukan identifikasi variabel-variabel dari masalah nyata yang akan dimodelkan dan membentuk beberapa hubungan antar variabel-variabel tersebut.
2. Membuat asumsi Dalam mengkontruksi model, perlu dibuat asumsi. Proses pembuatan asumsi menggambarkan alur pemikiran sehingga model dapat berjalan dan mengarah pada situasi fisik sehingga masalah dapat diselesaikan.
3. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan Pada langkah ini dilakukan formulasi asumsi dan hubungan antara variabelvariabel yang dibentuk menjadi sebuah persamaan atau sistem persamaan matematika. Setelah

persamaan tersebut diformulasikan, langkah berikutnya yaitu menyelesaikan persamaan. Dalam proses penyelesaian masalah perlu berhati-hati dan fleksibel agar persamaan tersebut realistik.

4. Interpretasi solusi Langkah terakhir yaitu interpretasi solusi yang merupakan langkah yang menghubungkan formulasi matematika kembali ke masalah nyata sehingga didapatkan suatu solusi nyata. Hal ini dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya dengan grafik untuk menggambarkan solusi yang diperoleh.

### 2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Finizio dan Ladas, 1988).

### 2.4 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan atau biasa disebut solusi keseimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  dikatakan titik keseimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  sedemikian sehingga  $f(x^*) = 0$  dengan:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

atau dengan kata lain, jika  $x^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  merupakan titik keseimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , maka  $f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . (Wiggins, 1990).

### 2.5 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan

Linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial non linear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik keseimbangan.

**Definisi 2.1** (Hale & Kocak , 1991) *Jika  $x^*$  merupakan titik keseimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , maka persamaan diferensial linear*

$$\dot{x} = J(x^*)x \tag{2.2}$$

Disebut persamaan linearisasi dari vector field  $f$  pada titik kesetimbangan  $x^*$

Di mana  $f = f_1, f_2, \dots, f_n$  dan

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$J(x^*)$  disebut sebagai matriks Jacobi dari  $f$  di titik  $x^*$ .

Kestabilan titik kesetimbangan  $x^*$  dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu  $\lambda$  yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (2.3)$$

dengan  $I$  adalah suatu matriks identitas. Dalam Tabel 2.1 diberikan beberapa jenis dan sifat kestabilan yang dikategorikan berdasarkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik (2.3).

**Tabel 2.1** Kestabilan Titik Kesetimbangan dari sistem linear  $\dot{x} = f(x)$  dengan

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

No.	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
1.	$\lambda_i > \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
2.	$\lambda_i < \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
3.	$\lambda_i < 0 < \lambda_j$	Tidak Stabil
4.	$\lambda_i = \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
5.	$\lambda_i = \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
6.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$	$r > 0$ , Tidak Stabil
7.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$	$r < 0$ , Stabil Asimtotik
8.	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic$	Stabil

Sumber : Boyce dan DiPrima (2012)

## 2.6 Kriteria Routh – Hurwitz

Misal diberikan sistem linear berikut:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.4)$$

Dengan  $A$  adalah matriks  $n \times n$  yang diperoleh dari linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan yang disebut matriks Jacobi di titik kesetimbangan dan  $x$  adalah vektor yang berukuran  $n \times 1$ . Persamaan karakteristik dari sistem (2.4) yaitu:

$$|A - \lambda I| = 0$$

di mana  $I$  adalah matriks identitas. Uji kestabilan Routh-Hurwitz digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar dari persamaan karakteristik secara langsung. Nilai eigen dari matriks  $A$  adalah akar-akar dari polinomial karakteristik berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.5)$$

dengan  $a_i, i = 1, \dots, n$  adalah konstanta real. Persamaan tersebut mempunyai  $n$  buah akar  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Masing-masing akar dapat bernilai real atau kompleks yang memenuhi  $P(\lambda_i) = 0$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Adapun syarat perlu dan syarat cukup agar  $P(\lambda)$  semua nilai eigen dengan bagian real yang negatif adalah (Murray, 2002)

$$H_1 = a_1 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad (2.6)$$

untuk  $k = 1, 2, \dots, n$  dan  $a_n > 0$ .

## 2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Pada Model epidemiologi mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan tak endemik dan titik kesetimbangan endemik. Jika  $R_0 < 1$  maka dalam populasi tidak terjadi epidemik sehingga untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit. Sebaliknya, jika  $R_0 > 1$  maka dalam populasi telah terjadi epidemik dan apabila tidak segera dilakukan penanganan akan menjadi suatu endemik (wabah). Untuk  $R_0 = 1$  kestabilan dari kedua titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan.  $R_0$  dapat diperoleh melalui syarat kestabilan titik tak endemik (Watmough, 2002). Misalkan terdapat  $n$  kelas terinfeksi dan  $m$  kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula  $x$  menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan  $y$  menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan  $x \in R^n$  dan  $x \in R^m$ , untuk  $m, n \in N$ , sehingga:

$$\dot{x} = (x_i) - \psi_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{y} = (y_j) - \varphi_j \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m$$

dengan  $\varphi_i$  adalah laju infeksi sekunder yang bertambah pada kelas terinfeksi dan  $\psi_i$  adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi. Penghitungan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dilinearisasikan dari sistem persamaan diferensial yang didekati oleh titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan subpopulasi kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut:  $\dot{x} = (F - V)$

dengan  $F$  dan  $V$  adalah matriks berukuran  $n \times n$ , dan  $F = \partial \varphi_i / \partial u_j$

$(0, y_0)$  dan  $V = \partial \psi_i / \partial u_j (0, y_0)$ . Selanjutnya didefinisikan matriks  $K$  sebagai:  $K = FV^{-1}$ , dengan  $K$  disebut sebagai next generation matrix. Nilai harapan dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks  $K$  sehingga (Driessche & Watmough, 2002):

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}) \quad (2.7)$$

## 2.8 Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalan

Masalah kontrol optimal adalah memilih fungsi kontrol  $u(t)$  yang membawa sistem dari *state* awal  $x(t_0)$  pada waktu  $t_0$  ke *state* akhir  $x(t_f)$  pada waktu akhir  $t_f$ , sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk suatu fungsi

objektif (fungsi tujuan). *State* yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)), \quad (2.8)$$

dengan nilai awal  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Sistem tersebut bergantung pada fungsi  $u(t)$  yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.8). Jika nilai  $u(t)$  berubah maka solusi dari sistem (2.8) juga akan berubah. Masalah kontrol yang paling dasar adalah mencari fungsi kontrol  $u(t)$  dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.8) sehingga fungsi tujuan berikut dapat tercapai, yaitu

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (2.9)$$

dengan kendala  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$

Teknik prinsip untuk masalah kontrol optimal adalah menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol yang optimal dan *state* yang terkait. Syarat perlu yang diperoleh dikembangkan oleh pontryagin dan rekan kerjanya di Moskow pada tahun 1950-an. Pontryagin memperkenalkan gagasan fungsi *adjoint* untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi objektif. Fungsi *adjoint* mempunyai tujuan yang sama dengan pengganda Lagrange dalam kalkulus multivariabel yang menambahkan kendala pada fungsi beberapa variabel yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan (Lenhart & Workman, 2007). Misalkan fungsi tujuan dalam persamaan (2.9) dituliskan sebagai berikut :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (2.10)$$

dengan  $\mathbf{x}$  merupakan variabel *state*. Diasumsikan bahwa kontrol optimal dari masalah optimal (2.9) ada, yaitu  $u^*$  dengan  $\mathbf{x}^*$  adalah variabel *state* optimal yang memenuhi persamaan (2.8). Misalkan  $J(u^*) \leq J(u) < \infty$  untuk semua kontrol  $u$ . Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu  $h(t)$  dan  $\varepsilon \in R$  sedemikian sehingga

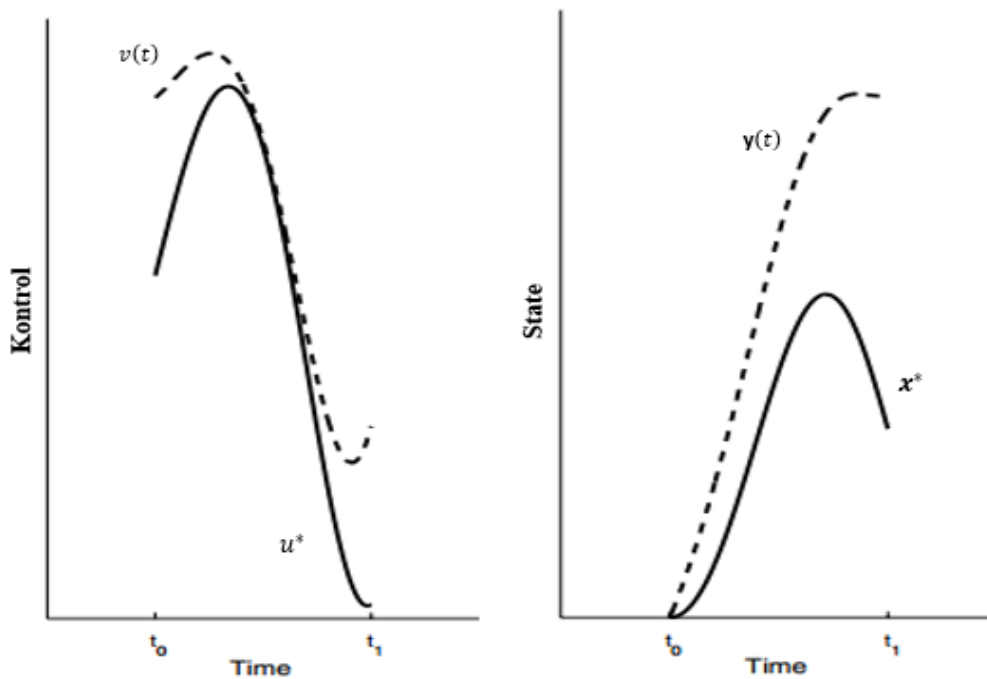
$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t). \quad (2.11)$$

dengan  $v(t)$  merupakan fungsi kontrol yang lain,  $\varepsilon$  adalah jarak untuk  $[t_0, t_f]$  dan  $h$  adalah *step size* dari persamaan (2.11). Misalkan  $\mathbf{y}$  merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan  $v$  yang memenuhi,



$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)). \quad (2.12)$$

di mana  $v(t)$  adalah kontinu dan dengan lintasan *state* berawal dari posisi yang sama, dipilih  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$  (lihat Gambar 2.1). Dalam gambar tersebut dapat dilihat bahwa  $v(t) \rightarrow u^*(t)$  untuk semua  $t$ , ketika  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Hal yang sama berlaku untuk  $\mathbf{y}$ , karena asumsi yang dibuat pada  $\mathbf{g}$  maka  $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*(t)$  untuk setiap  $t$  yang tetap, dengan kata lain turunan  $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{y}(t) \right|_{\varepsilon=0}$  ada untuk setiap  $t$ .



**Gambar 2.2** Perbandingan antara kontrol optimal  $u^*$  dengan  $v$  (kiri) dan state optimal  $v^*$  dengan  $y$  (kanan). Garis putus-putus menunjukkan sistem tanpa kontrol dan garis penuh menunjukkan sistem dengan kontrol optimal.

Fungsi tujuan dalam persamaan (2.10) yang dievaluasi di  $v$  adalah

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) dt. \quad (2.13)$$

Kemudian didefinisikan  $\lambda(t)$  yang merupakan fungsi *adjoint* yang akan ditentukan. Fungsi tersebut merupakan fungsi yang diturunkan dalam interval  $[t_0, t_f]$ . Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh,

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t)] dt = \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{y}(t_f) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{y}(t_0),$$

atau

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t)] dt + [\boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)] = 0. \quad (2.14)$$

Jika bentuk yang bernilai nol tersebut dijumlahkan ke dalam fungsi  $J(v)$  diperoleh

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t)) \right] dt \\ &+ [\boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{y}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))] dt \\ &+ [\boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)] \end{aligned}$$

dengan  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)) = \dot{\mathbf{y}}(t)$ . Karena nilai minimum dari  $J$  terhadap kontrol  $u$  terjadi pada  $u^*$ , saat turunan dari  $J(v)$  terhadap  $\varepsilon$  (dalam arah  $h$ ) adalah nol, yaitu

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0.$$

Dengan menggunakan teorema *Lebesgue Dominated Convergence*, bentuk limit (begitu pula dengan turunan) dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari  $J(v)$  terhadap  $\varepsilon$ , yaitu

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{y}(t) + \\ &\boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} + \\ &\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{y}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

Dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi  $f$  dan  $\mathbf{g}$  diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left[ f_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left( \mathbf{g}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon} + \mathbf{g}_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

dengan  $f_x, f_u, \mathbf{g}_x$  dan  $\mathbf{g}_u$  bergantung pada  $t, \mathbf{x}^*(t)$  dan  $u^*(t)$ . Jika persamaan (2.15) disederhanakan maka diperoleh :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \underbrace{\left( f_x + \lambda^T(t) \mathbf{g}_x + \dot{\lambda}^T(t) \right) \frac{dy}{d\varepsilon}(t)}_* \right]_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda^T(t) \mathbf{g}_u) h(t) dt - \underbrace{\lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f)}_{**} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.16)$$

Agar bentuk (\*) dan (\*\*) dalam persamaan (2.16) bernilai nol maka dipilih fungsi adjoint  $\lambda(t)$  yang memenuhi persamaan :

$$\dot{\lambda}(t) = -[f_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t) \mathbf{g}_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))] \quad (2.17)$$

Dan syarat batas  $\lambda(t_f) = \mathbf{0}$ . Syarat batas ini dikenal sebagai syarat transversalitas.

Persamaan (2.16) tereduksi menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))] h(t) dt = 0$$

Selanjutnya, karena persamaan (2.16) berlaku untuk sembarang fungsi variasi  $h(t)$  yang kontinu, maka dipilih fungsi

$$h(t) = f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))$$

akibatnya (2.16) menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} [f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0,$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi yang optimal, yaitu

$$\begin{aligned} f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \\ = 0, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Jadi persamaan (2.17) dan (2.18) yang diperoleh tersebut merupakan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.9) (Lenhart dan Workman, 2007).

Dalam praktiknya, syarat perlu di atas dapat dihasilkan dari Hamiltonian  $H$ , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$$

Akan memaksimumkan atau meminimumkan  $H$  pada saat  $u$  di  $u^*$  dan kondisi di atas dapat ditulis dalam persamaan Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ di } u^* \rightarrow f_u + \lambda g_u = 0 \quad (\text{kondisi optimal/syarat stasioner})$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow \dot{\lambda} = -(f_x + \lambda g_x) \quad (\text{persamaan adjoint})$$

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (\text{syarat transversalitas})$$

dengan diberikan persamaan *state* yaitu:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x} = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0.$$

## 2.9 Prinsip Minimum Pontryagin

Misalkan diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut :

$$\min J = \min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.19)$$

dengan kendala

$$\dot{x} = g(t, x(t), u(t)). \quad (2.20)$$

Fungsi  $J$  disebut fungsi tujuan dan kontrol  $u(t) \in U$ , dengan  $U$  merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol  $u(t)$  yang diperkenankan. Diasumsikan bahwa  $u(t)$  merupakan fungsi terhadap waktu sehingga  $f(t, x, u)$  dan  $g(t, x, u)$  juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam interval  $[t_0, t_f]$ . Pemilihan fungsi  $f$  bergantung pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan. Dalam sistem kontrol optimal, tujuan pengontrolan adalah untuk mengoptimalkan fungsi objektif (2.19). Masalah kontrol optimal adalah mencari  $u^*(t)$  yang menggerakkan sistem (2.20) ke trajektori  $x^*(t)$  sedemikian sehingga fungsi objektif pada persamaan (2.19) mencapai nilai yang optimal.

Pencarian fungsi kontrol  $u^*(t)$  yang mengoptimalkan  $J$  pada prinsipnya menggunakan metode pengali Lagrange. Sistem (2.20) menyatakan suatu fungsi kendala yang bergantung pada  $t \in [t_0, t_f]$ , sehingga diperlukan pengali Lagrange pada masing-masing waktu tersebut karena setiap kendala mempunyai satu pengali

Lagrange. Misalkan pengali Lagrange disimbolkan dengan  $\lambda(t) \in R^n$  maka bentuk perluasan dari  $J$  yang menyertakan kendala (2.20) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T(t)(\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u) - \dot{\mathbf{x}}(t))] dt. \quad (2.21)$$

Misalkan didefinisikan fungsi Hamiltonian sebagai berikut :

$$H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) = f(t, \mathbf{x}, u) + \lambda^T(t)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u). \quad (2.22)$$

dengan menggunakan fungsi Hamilton tersebut, persamaan (2.19) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [H(t, \mathbf{x}, u, \lambda) - \lambda^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t)] dt. \quad (2.23)$$

**Teorema 1** (Lenhart & Workman, 2007) *Jika  $u^*(t)$  dan  $\mathbf{x}^*(t)$  merupakan kontrol optimal dan state optimal untuk masalah berikut :*

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (2.24)$$

terhadap  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  maka terdapat variabel adjoint  $\lambda(t)$  yang terturunkan sedemikian sehingga

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), u(t), \lambda(t))$$

untuk semua fungsi kontrol  $u$  pada setiap  $t$  dengan fungsi Hamiltonian

$$H = f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) + \lambda^T(t)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t))$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial \mathbf{x}}, \quad \lambda(t_f) = \mathbf{0}.$$

**Teorema 2** (Lenhart & Workman, 2007) *Misalkan fungsi  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang terturunkan secara kontinu terhadap  $t, \mathbf{x}, u$  dan merupakan fungsi konveks terhadap  $u$ . Misalkan  $u^*$  adalah kontrol optimal untuk masalah optimasi (2.24), dengan state optimal  $\mathbf{x}^*$ , dan  $\lambda$  adalah fungsi yang terturunkan untuk setiap  $t$ . Misalkan untuk setiap  $t_0 \leq t \leq t_f$  berlaku  $H_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0$  maka untuk semua kontrol  $u$  dan untuk setiap  $t$  diperoleh*

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), u(t), \lambda(t)).$$

Secara ringkas, prinsip minimum Pontryagin dapat dituliskan sebagai berikut:

Model Sistem	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$	
Fungsional Objektif	$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt$	
Fungsi Hamiltonian	$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$	
Pengontrol Optimum		
▪ Persamaan <i>state</i>	$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$	(2.25)
▪ Persamaan <i>costate</i>	$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$	(2.26)
▪ Syarat Stationer	$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U$	(2.27)
▪ Syarat Transversalitas	$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$	

**Contoh 2.1** (Toni Bakhtiar, 2014)

Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan:

$$\min_u \int_0^1 u^2(t) dt$$

terhadap fungsi kendala  $\dot{x} = -2x + u$  dengan syarat awal  $x(0) = 1$  dan  $x(1) = 0$ .

Fungsi Hamilton dari masalah kontrol optimal tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= u^2 + \lambda(-2x + u) \\ &= u^2 - 2x\lambda + u\lambda \end{aligned}$$

Syarat stasionernya adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0,$$

Sehingga diperoleh:

$$u = -\frac{\lambda}{2}$$

Persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-2\lambda) = 2\lambda$$

Dengan mensubstitusi nilai  $u$  ke dalam fungsi kendala, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + u \\ &= -2x + \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -2x - \frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x - \frac{\lambda}{2} \\ \dot{\lambda}(t) &= 2\lambda\end{aligned}$$

Solusi dari  $\dot{x}(t)$  dan  $\dot{\lambda}(t)$  akan diselesaikan dengan menggunakan metode operator.

Persamaannya dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned}(D + 2)x + \frac{1}{2}\lambda &= 0 \\ (D - 2)\lambda &= 0\end{aligned}$$

atau dalam bentuk:

$$\begin{vmatrix} (D + 2) & \frac{1}{2} \\ 0 & (D - 2) \end{vmatrix} = 0$$

selanjutnya akan diperoleh nilai eigen  $D_1 = -2$  dan  $D_2 = 2$ . Sehingga diperoleh solusi:

$$\begin{aligned}x &= A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t} \\ \lambda &= B_1 e^{-2t} + B_2 e^{2t}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}Dx &= -2A_1 e^{-2t} + 2A_2 e^{2t} \\ D\lambda &= -2B_1 e^{-2t} + 2B_2 e^{2t}\end{aligned}$$

dimana  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ , dan  $B_2$  merupakan suatu konstanta. Selanjutnya, dilakukan system substitusi antar persamaan, maka diperoleh:

$$B_1 = 0 \text{ dan } B_2 = -8A_2$$

Solusi komplementer yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t} \\ \lambda(t) &= -8A_2 e^{2t}\end{aligned}$$

Kemudian substitusi nilai syarat awal ke dalam persamaan diperoleh:

$$x(0) = A_1 + A_2 = 1$$

$$x(1) = A_1 e^{-2} + A_2 e^2 = 0$$

Dari persamaan diperoleh  $A_1 = 1 - A_2$

Jika kedua persamaan dieliminasi, maka diperoleh  $A_2 = \frac{-1}{e^4 - 1}$

Jadi, diperoleh  $u$  dan  $x$  yang optimal:

$$u^*(t) = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{-8A_2 e^{2t}}{2} = -4A_2 e^{2t} = \frac{-4e^{2t}}{e^4 - 1}$$

$$x^*(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t} = \frac{e^{-2t+4} - e^{2t}}{e^4 - 1}.$$

## 2.10 Metode *Forward-Backward Sweep*

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (2.19) terhadap kendala pada persamaan (2.20). Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu

$$\min_{(x,u,\lambda)} \Gamma(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{(x,u,\lambda)} f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$$

dengan syarat keoptimalan

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal  $u^*$  menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk  $u$  di awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu  $[t_0, t_f]$  dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu  $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$  dan kontrol  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$ , di mana  $u_i \approx u(b_i)$ . Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk  $\mathbf{x}$  dan  $\boldsymbol{\lambda}$  yang bergantung pada  $u$ . Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk  $\mathbf{x}$  dan  $\boldsymbol{\lambda}$  tersebut.



Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi  $x(t)$ . Pada metode ini, diberikan kondisi awal yaitu pada persamaan (2.25), kemudian diberikan *step size* yaitu  $h$  dan persamaan (2.18) akan diselesaikan. Pendekatannya melalui  $x(t + h)$  dan  $x(t)$ , sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$x(t + h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.29)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x(t)) \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t + h, x(t) + hk_3) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir yaitu pada persamaan (2.26). Kemudian diberikan *step size* yaitu  $h$  dan persamaan (2.18) akan diselesaikan, pendekatannya melalui  $\lambda(t - h)$  dan  $\lambda(t)$  sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\lambda(t - h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.31)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, \lambda(t)) \\ k_2 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t - h, \lambda(t) - hk_3) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sedangkan nilai  $u$  diperbaharui setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai  $u$  yang lama dengan nilai  $u$  yang baru yaitu

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan  $u_{baru}$  diperoleh dari syarat keoptimalan  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ . Bentuk kombinasi konveks lain yang dapat digunakan adalah

$$u = u_{baru}(1 - c^k) + u_{lama}c^k$$

dengan  $k$  merupakan iterasi yang berjalan dan  $0 < c < 1$ . Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensinya telah dipenuhi diantaranya ketika nilai  $\|u - u_{lama}\| = \sum_{i=1}^{N+1} |u_i - u_{lama(i)}|$  menjadi sangat kecil, dengan  $u$  merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi yang sedang berjalan dan  $u_{lama}$  merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi sebelumnya. Bentuk uji konvergensi lain dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta,$$

atau  $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$ , dengan  $\delta$  merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart dan Workman, 2007).