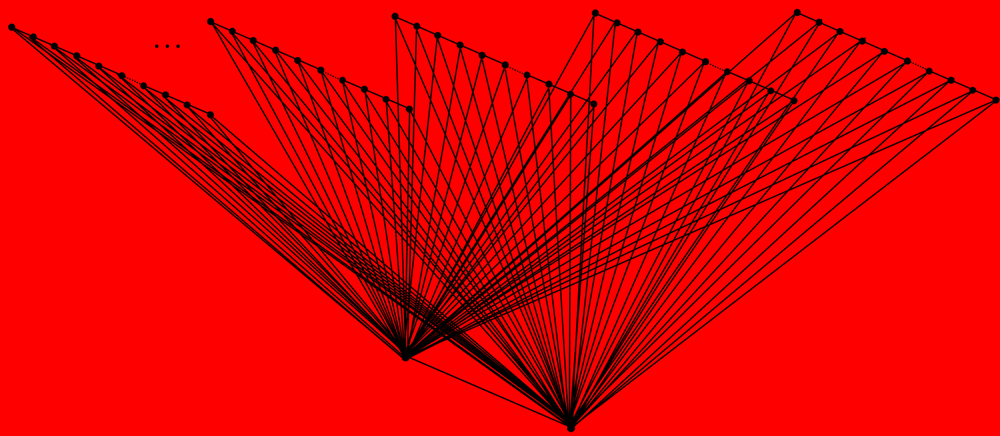
BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF BUKU B_n^m



ANDI RAFIKA REZKI

H011171317

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF BUKU B_n^m

ANDI RAFIKA REZKI

H011171317

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF BUKU B_n^m

ANDI RAFIKA REZKI

H011171317

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

HALAMAN PENGESAHAN

BASIS RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF BUKU B_n^m

ANDI RAFIKA REZKI
H011171317

Skripsi,

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Sarjana Program Studi Matematika pada tanggal 2 Agustus 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

Program Studi Matematika
Deparatemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan,	**Mengesahkan,**
Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP. 19700807 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Buku B_n^m**" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing (**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** sebagai Pembimbing Utama dan **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** sebagai Pembimbing Pertama). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 2 Agustus 2024

Andi Rafika Rezki
NIM H011171317

UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memeberikan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga penulisa tugas akhir dengan judul "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Buku B_n^m**" sebagai salah satu syarat untuk meraih gelar sarjana dalam program studi Matematika di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Salawat serta salam penulis curahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai teladan terbaik dalam menjalani kehidupan.

Dalam mengawali karya ini, penulis ingin menyampaikan penghargaan yang mendalam kepada semua pihak yang telah memberikan kontribusi serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini. Tanpa bantuan mereka, penyelesaian karya ini tidak akan menjadi mungkin terwujudkan. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada Ibunda **Hj. Andi Tungke Tanra** dan Ayahanda **Alm. H. Andi Suyuti P** yang telah bekerja keras membesarkan dan mendidik penulis dengan kesabaran dan penuh kasih sayang serta senantiasa memberikan doa dan dukungan sehingga dapat menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula kepada kakak-kakak penguji yaitu **Andi Dian Hardiyanti S.Sos.** sekeluarga, **Alm. Andi Masyita S**, **Andi Azwar Ashari S.T**, serta **Andi Muh. Ihsan S.H.** yang telah memberikan doa, dukungan serta pengorbanan yang banyak kepada penulis sebagai saudara bungsu. Pada kesempatan ini pula, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
4. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
6. **Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.

7. **Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
8. Para **dosen** dan **staf Departemen Matematika** yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmu kepada penulis. Juga, seluruh staf yang telah membantu dalam berbagai hal selama penulis menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
9. Teman-teman **Matematika 2017** yang telah memberi kenangan terindah dalam masa perkuliahan hingga penyusunan tugas akhir serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Saudara-saudara penulis, **Firda Irianti**, **A. Nursusilawaty**, dan **Miraya Tifani Hasri** yang telah selalu ada untuk memberikan canda tawa yang menghapus penat, obrolan panjang yang memperkaya pikiran, serta dukungan tulus yang selalu menguatkan hati penulis.
11. Saudara-saudari penulis **Ananda**, **Farah**, **Krisdayanti**, **Tasya**, **Miftahul**, serta teman-teman lainnya yang senantiasa menemani, menghibur, membantu, memberi semangat, membagi ilmu, membagi cerita selama masa perkuliahan. Semoga kita semua senantiasa diberi kesehatan dan kesempatan untuk bersama-sama lagi kedepannya.

Makassar, 2 Agustus 2024

Andi Rafika Rezki

ABSTRAK

Graf buku B_n^m adalah graf yang setiap titik pada P_2 dikaitkan dengan setiap titik pada $mP_n, n \geq 2$. Dengan demikian graf buku dapat ditulis $B_n^m = P_2 + mP_n$ yang memiliki orde $2 + mn$ dan ukuran $2(mn) + m(n-1) + 1$. Misalkan $A(B_n^m)$ adalah matriks ketetanggaan dari graf buku B_n^m, vektor-vektor eigen dari $A(B_n^m)$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor-vektor tak nol x yang memenuhi persamaan $A(B_n^m)\, x = \lambda x$. Maka, vektor-vektor eigen yang berkaitan dengan matriks $A(B_n^m)$ adalah vektor-vektor tak nol yang merupakan penyelesaian dari sistem $(A(B_n^m) - \lambda I)x = 0$. Himpunan (ruang) penyelesaian sistem tersebut dinamakan ruang eigen dari matriks ketetanggaan graf buku B_n^m yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Basis ruang eigen dari $A(B_n^m)$ adalah basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga x_i adalah suatu vektor eigen dari $A(B_n^m)$. Dalam menentukan pola umum basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku B_n^m, nilai eigen λ yang digunakan berbentuk bilangan bulat atau $\lambda \in N$.

Kata Kunci: Graf buku B_n^m, Matriks ketetanggaan, Nilai eigen, Basis ruang eigen

ABSTRACT

The book graph B_n^m is a graph where every vertex on P_2 is connected to every vertex on mP_n, with $n \geq 2$. The order of this graph is $2 + mn$ and its size is $2(mn) + m(n-1) + 1$. Let $A(B_n^m)$ be the adjacency matrix of the book graph B_n^m, the eigenvectors of $A(B_n^m)$ corresponding to the eigen value λ are non-zero vector x that satisfy the equation $A(B_n^m)\,x = \lambda x$. Therefore, the eigenvectors associated with matrix $A(B_n^m)$ are non-zero vectors that are solutions of the system $(A(B_n^m) - \lambda I) = 0$. The set of solutions of this system is called the eigenspace of the adjacency matrix of the book graph B_n^m corresponding to the eigenvalue λ. An eigenbasis of $A(B_n^m)$ is a basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ of $\mathbb{R}^n$ such that x_i is an eigenvector of $A(B_n^m)$. In determining the general form of the eigenbasis of the adjacency matrix of the book graph B_n^m, the eigen values λ used in this research are integers or $\lambda \in N$.

***Keywords**: Book graph B_n^m, Adjacency matrix, Eigen value, Eigenbasis*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah salah satu ilmu yang digunakan untuk memecahkan suatu masalah. Salah satunya adalah teori graf. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang mempelajari tentang graf yang merupakan struktur matematika yang sering digunakan untuk memodelkan suatu objek diskrit serta hubungannya dengan objek diskrit lainnya, dimana objek tersebut dapat dinyatakan sebagai *vertex* atau simpul dan hubungan antara suatu objek dengan objek yang lainnya dinyatakan sebagai *edge* atau sisi.

Dalam dunia modern yang penuh dengan koneksi dan interaksi, analisis graf telah menjadi area penelitian yang penting dalam berbagai disiplin ilmu, termasuk matematika diskrit, ilmu komputer, dan teori jaringan. Salah satu cara untuk mempermudah penyelesaian suatu graf adalah dengan menyajikannya dalam bentuk matriks yang disebut dengan matriks ketetanggaan. Secara umum, matriks dapat didefinisikan sebagai suatu susunan bilangan berbentuk persegi panjang atau bujur sangkar [1]. Matriks memiliki m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$ atau matriks yang memiliki ukuran $m \times n$. Banyaknya baris dan kolom suatu matriks disebut sebagai ordo matriks. Matriks ketetanggaan graf adalah matriks yang setiap elemememennya merepresentasikan hubungan antara simpul-simpul dalam suatu graf.

Karena suatu graf dapat disajikan dalam bentuk matriks, banyak konsep aljabar linier yang dapat diterapkan dalam graf. Aljabar linier merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang matriks, vektor, ruang vektor, transformasi linier dan sistem persamaan linier. Salah satu konsep yang penting dalam aljabar linier adalah basis ruang eigen. Basis ruang eigen adalah himpunan vektor eigen bebas linier yang terkait dengan nilai eigen yang sama dari suatu transformasi linier atau matriks. Dalam konteks ini, basis ruang eigen yang akan dicari diperoleh dari matriks ketetanggaan suatu graf.

Dalam teori graf, bahasan mengenai basis ruang eigen dari suatu graf merupakan bahasan yang masih jarang ditemukan. Graf buku B_n^m adalah suatu graf yang diperoleh dari graf jumlah antara graf lintasan P_2 dan m kopi graf lintasan P_n [2]. Graf ini dapat dianggap sebagai kasus khusus yang menarik untuk dianalisis dengan menggunakan konsep basis ruang eigen. Dengan demikian, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku B_n^m yang termuat dalam judul: "**Basis Ruang Eigen Matriks Ketetanggan Graf Buku $\boldsymbol{B_n^m}$**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, diketahui bahwa dari graf buku B_n^m diperoleh matriks ketetanggaan. Ada beberapa nilai eigen yang berbeda yang diperoleh dari matriks ketetangaan tersebut dan setiap nilai eigen yang berbeda terkait dengan satu ruang eigen. Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah menetapkan salah satu bentuk basis dari ruang eigen yang dimaksud

1.3 Batasan Masalah

Ada beberapa ruang eigen yang diperoleh dari matriks ketetangaan graf B_n^m. Pada penelitian ini, basis eigen yang dicari dibatasi pada ruang eigen tertentu saja yaitu basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen bulat atau $\lambda = N$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan masalah yang diangkat, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk salah satu bentuk basis dari ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku B_m^n.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memperluas pemahaman peneliti tentang graf, khususnya terkait basis ruang eigen dari matriks ketetanggaan pada graf buku B_n^m.
2. Sebagai media bagi peneliti untuk menerapkan ilmu matematika yang telah diperoleh dalam bidang keilmuan.
3. Menjadi referensi bagi matematikawan yang tertarik untuk melakukan penelitian mengenai basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf.

1.6 Landasan Teori

Berdasarkan masalah yang diajukan, berikut adalah landasan teori yang relevan untuk penelitian yang akan digunakan dalam bab hasil dan pembahasan.

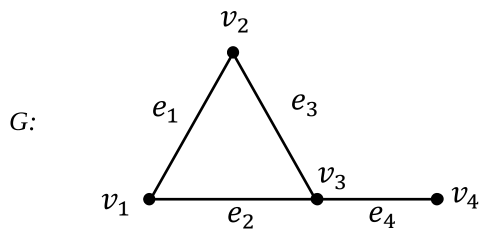
1.6.1 Teori Graf

Definisi 1.6.1.1 Graf adalah pasangan himpunan (V, E), dengan V disebut himpunan diskrit yang anggota-anggota disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi. [2]

Berdasarkan definisi 1.6.1, himpunan V merepresentasikan himpunan titik (*vertex set*) sedangkan E merepresentasikan himpunan sisi (*edge set*). Misalkan graf (V, E) dinotasikan G dengan himpunan titiknya yang dinotasikan $V(G)$ dan himpunan sisinya dinotasikan $E(G)$ maka graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan $G = \{u : u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v) : u, v \in V(G)\}$, dengan $e = (u, v)$ disebut sebagai sisi. Untuk lebih sederhananya $e = (u, v)$ hanya ditulis uv.

Banyaknya anggota $V(G)$ disebut sebagai orde dari graf G dan dinotasikan dengan $p(G)$ atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya anggota $E(G)$ disebut sebagai ukuran atau *size* dari graf G dan $q(G)$ atau $|E(G)|$.

Contoh 1.6.1



Gambar 1.6.1 Graf $\boldsymbol{G}$

Himpunan titik dan sisi graf G pada Gambar 1.6.1 masing-masing adalah: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_3$, $e_4 = v_3v_4$ sehingga order dan ukuran graf G masing-masing adalah 4 dan 3 atau secara formal ditulis $|V(G)| = 4$ dan $|E(G)| = 3$.

1.6.2 Terminologi Graf

Dalam teori graf, terdapat berbagai terminologi yang berkaitan dengan graf. Berikut adalah definisi dari terminologi dalam teori graf yang relevan dengan pembahasan tugas akhir ini.

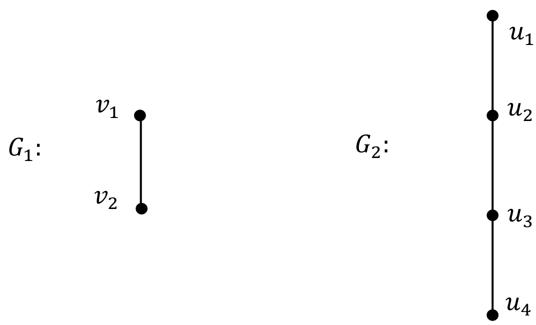
Definisi 1.6.2.1 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_iv_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_iv_j$, maka

1. Titik v_i **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik v_j,
2. Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j. [3]

1.6.3 Operasi Penjumlahan dalam Graf

Definisi 1.6.3.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka, graf jumlah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(G)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. [2]

Contoh 1.6.3.1 Misalkan graf G_1 adalah graf dengan $V(G_1) = \{v_{1,} v_2\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2\}$ serta G_1 dengan $V(G_2) = \{u_{1,} u_2, u_{3,} u_4\}$ dan $E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}$. Maka gambra graf G_1 dan G_2 adalah sebagai berikut



Gambar 1.6.2 Graf $\boldsymbol{G_1}$ dan $\boldsymbol{G_2}$

Graf jumlah $G_1 + G_2$ mempunyai

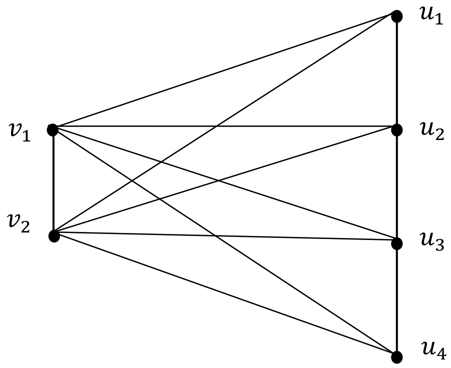
$$V(G_1 + G_2) = \{v_{1,}\, v_2, u_{1,}\, u_2, u_{3,}\, u_4\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G_1 + G_2) = \{v_1v_2, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\} \cup$$
$$\{v_1u_1, v_1u_2, v_1u_3, v_1u_4, v_2u_1, v_2u_2, v_2u_3, v_2u_4\}.$$

Graf jumlah $G_1 + G_2$ dapat digambarkan sebagai berikut

$G_1 + G_2$:



Gambar 1.6.3 Graf Jumlah $\boldsymbol{G_1 + G_2}$

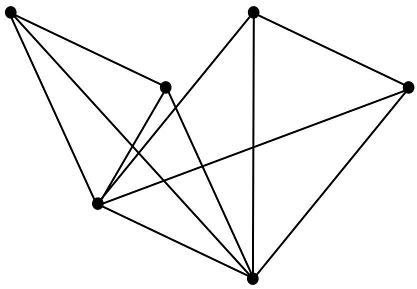
1.6.4 Jenis-Jenis Graf

Definisi 1.6.4.1 Graf sederhana adalah G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*). [2]

Definisi 1.6.4.2 Suatu graf lintasan dengan n titik, dinotasikan dengan P_n, $n \geq 2$, merupakan graf dengan titik $v_{1,}\, v_2, \dots, v_n$ dan sisinya adalah v_1v_2, $v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. [4]

Gambar 1.6.4 Graf lintasan $\boldsymbol{P_2}$ dan $\boldsymbol{P_3}$

Definisi 1.6.4.3 Graf buku B_n^m adalah graf yang setiap titik pada P_2 dikaitkan dengan setiap titik pada $mP_n, n \geq 2$. Dengan demikian graf buku dapat ditulis $B_n^m = P_2 + mP_n$ dengan orde $2 + mn$ dan ukuran $2(mn) + m(n-1) + 1.$ [2]



Gambar 1.6.5 Graf buku $\boldsymbol{B_2^2 = P_2 + 2P_2}$

1.6.5 Matriks

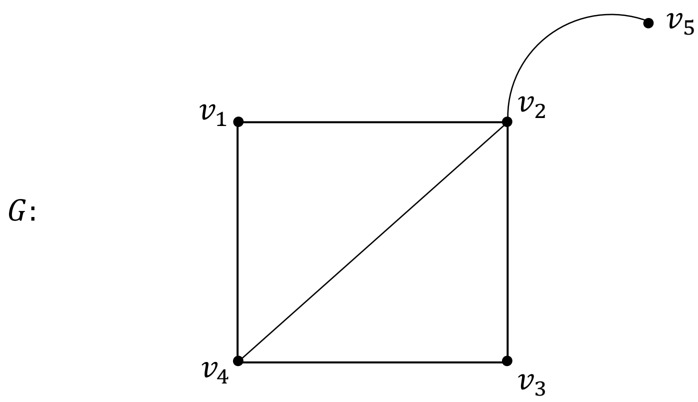
Definisi 1.6.5.1 Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom). Skalar itu disebut elemen matriks. [1]

Definisi 1.6.5.2 Matriks ketetanggan dari G adalah matriks $A = A(G)$ yang berukuran $n \times n$ dan entri-entrinya terdiri dari

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & jika\ v_i\ dan\ v_j\ bertetangga \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

[3]

Contoh 1.6.5.2 Misalkan graf G memiliki $V(G) = \{v_{1,}\ v_2, v_{3,}\ v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_{3,}\ v_2v_4, v_2v_5\}$. Graf G dapat digambarkan sebagi berikut



Gambar 1.6.6 Graf $\boldsymbol{G}$

Matriks ketetanggaan graf G adalah:

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.6.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 1.6.6.1 Jika A adalah sebuah matriks berukuran $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$, maka vektor x tak nol di R^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A. Jika Ax adalah suatu penggandaan skalar x yaitu

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut suatu vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. [1]

Contoh 1.6.6.1 Misalkan vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3X$$

Teorema 1.6.6.1 Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Ini disebut persamaan karakteristik dari A. [4]

Contoh 1.6.6.2 Perhatikan contoh 1.6.6.1, dapat dilihat bahwa $\lambda = 3$ nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Hal ini diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan karakteristik $det(\lambda I - A) = 0$, yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen A adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$. Dengan demikian, selain nilai eigen $\lambda = 3$, diperoleh nilai eigen lainnya yaitu $\lambda = -1$.

1.6.7 Basis Ruang Eigen

Definisi 1.6.7.1 Misalkan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan vektor pada suatu ruang vektor V, maka S dikatakan suatu basis untuk V jika S merentang V dan S bebas linear [1].

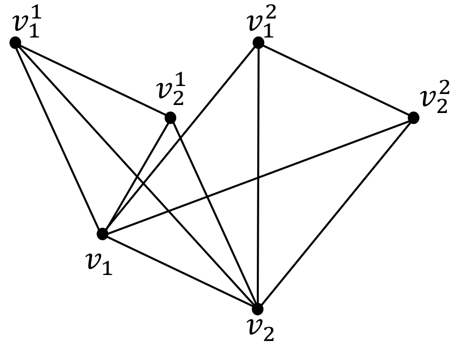
Contoh 1.6.7.1 Misalkan graf buku $B_2^2 = P_2 + 2P_2$ memiliki himpunan titik

$$V(B_2^2) = \{v_{1,} \, v_2, v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2\}$$

dan himpunan sisi

$$E(B_2^2) = \{v_1v_2, v_1v_1^1, v_1v_2^1, v_1v_1^2, v_1v_2^2, v_2v_1^1, v_2v_2^1, v_2v_1^2, v_2v_2^2\}.$$

Graf buku B_2^2 dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 1.6.7 Graf Buku $\boldsymbol{B_2^2}$

Berdasarkan gambar 1.6.7, matriks ketanggaannya dapat ditulis sebagai berikut:

$$A(B_2^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks ketetanggaan graf buku B_2^2, akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut dengan cara

$$det(A(B_2^2) - \lambda I) = 0$$

$$det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan *software* MATLAB, maka didapatkan persamaan polinomial karakteristik dari karakteristik dari $det(A(B_2^2) - \lambda I)$ yaitu

$$\lambda^6 - 11\lambda^4 - 16\lambda^3 + 3\lambda^2 + 16\lambda + 7 = 0.$$

Dan diperoleh pula nilai eigennya yaitu

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = 1 - 2\sqrt{2}, \lambda_6 = 1 + 2\sqrt{2}\ .$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen untuk $\lambda = -1$ dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $(A(B_2^2) - \lambda I)v = 0$, diperoleh sebagai berikut:

$$(A(B_2^2) - (-1)I)v = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dilakukan proses eliminasi dengan menggunakan Metode Gauss-Jordan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_2 = B_2 - B_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_3 = B_3 - B_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_4 = B_4 - B_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_5 = B_5 - B_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_6 = B_6 - B_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_6 = B_6 - B_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_2 \rightleftarrows B_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_2 = (-1)B_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1 = B_1 - B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_6 = B_6 + B_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_3 = (-1)B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1 = B_1 - B_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_4 = B_4 - B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh,

$x_5 + x_6 = 0$ $\quad$ $x_3 + x_4 = 0$ $\quad$ $x_1 + x_2 = 0$

$x_5 = x_6$ $\quad$ $x_3 = -x_4$ $\quad$ $x_1 = -x_2$

Misalkan $x_2 = p$, $x_4 = q$, $x_6 = r$ dimana $p, q, r \epsilon \mathbb{R}$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, p, q, r \epsilon \mathbb{R}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = -1$ adalah $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan

basis ruang eigenya adalah

$$BRE_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Selanjutnya akan dicari basis dari ruang vektor eigen untuk $\lambda = 1$ dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam $(A(B_2^2) - \lambda I)v = 0$ diperoleh sebagai berikut:

$$(A(B_2^2) - (1)I)v = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dilakukan proses eliminasi dengan menggunakan Metode Gauss-Jordan,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_1 = (-1)B_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_2 = B_2 - B_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_3 = B_3 - B_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_4 = B_4 - B_1]{}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[B_5 = B_5 - B_1]{} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[B_6 = B_6 - B_1]{}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_2 \rightleftarrows B_3]{} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_2 = \frac{1}{2}\cdot B_2]{}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_1 = B_1 - B_2]{} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_1 = B_1 + B_2]{}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_4 = B_4 - 2B_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_5 = B_5 - 2B_2]{}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[B_6 = B_6 - 2B_2]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[B_3 = \frac{1}{2}\cdot B_3]{}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[B_1 = B_1 + B_3]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[B_4 = B_4 - 2B_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_5 = B_5 - B_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_6 = B_6 - B_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_4 = \frac{1}{4} \cdot B_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_2 = B_2 - B_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_3 = B_3 - B_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_5 = B_5 + 2B_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_6 = B_6 + 2B_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_5 = (-1)B_5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_3 = B_3 - \frac{B_5}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_4 = B_4 - \frac{B_5}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_6 = B_6 - \frac{B_5}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh

$x_5 - x_6 = 0$ $\quad x_4 + x_6 = 0$ $\quad x_3 + x_6 = 0$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_1 = 0$

$x_5 = -x_6$ $\quad x_4 = -x_6$ $\quad x_3 = -x_6$

Misalkan $x_6 = t$, dimana $t\epsilon\mathbb{R}$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -t \\ -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t\epsilon\mathbb{R}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 1$ adalah $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan basis ruang eigenya adalah $BRE_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

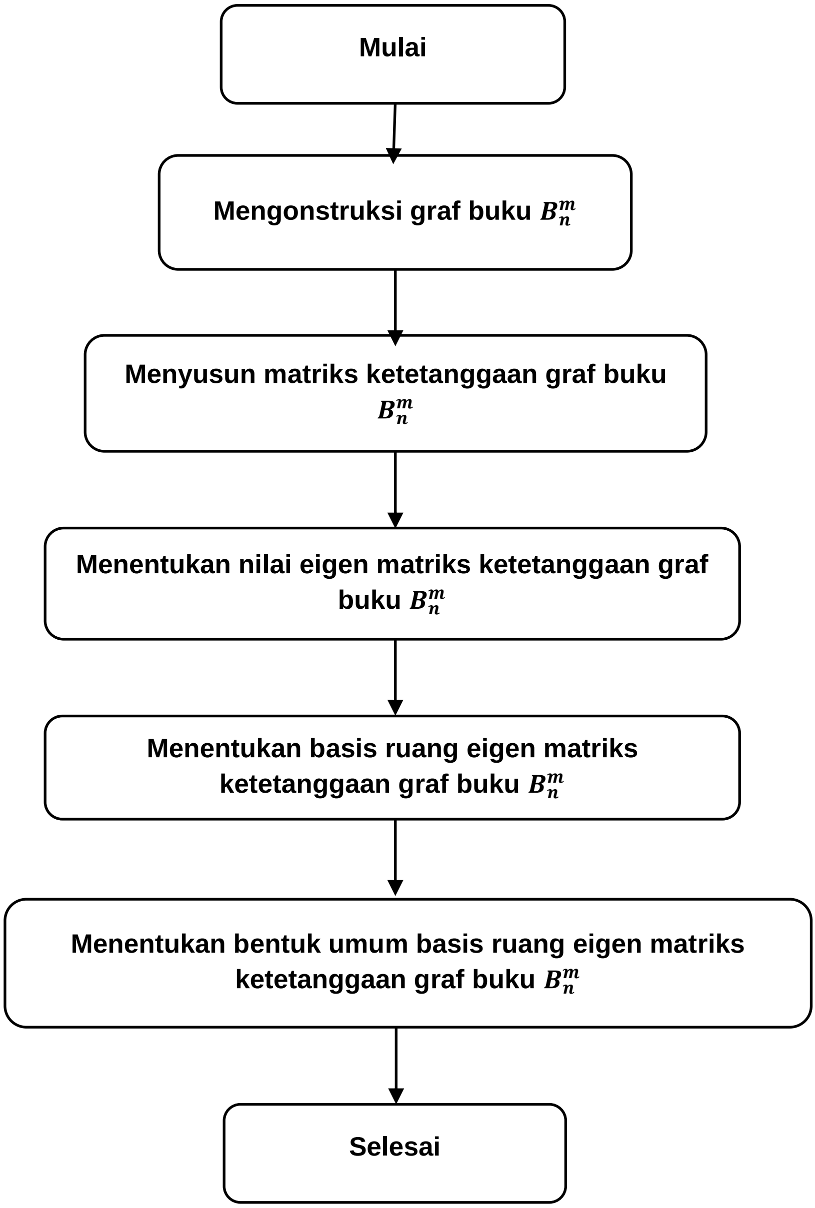
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yakni dengan menghimpun informasi yang relevan dengan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku segitiga B_n^m. Informasi tersebut dapat diperoleh dari buku, karya ilmiah, tesis, disertasi, serta sumber-sumber lainnya.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Perpustakaan, Laboratorium Aljabar dan Kombinatorika serta Laboratorium Terapan jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin pada bulan Juli 2023.

2.3 Tahapan Penelitian

1. Melakukan studi pustaka terkait dengan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku segitiga B_n^m.
2. Menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku segitiga B_n^m dengan alur seperti berikut:


Mulai
Mengonstruksi graf buku B_n^m
Menyusun matriks ketetanggaan graf buku B_n^m
Menentukan nilai eigen matriks ketetanggaan graf buku B_n^m
Menentukan basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku B_n^m
Menentukan bentuk umum basis ruang eigen matriks ketetanggaan graf buku B_n^m
Selesai