

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA TRANSMISI LANGSUNG DAN
TIDAK LANGSUNG PENYAKIT DEMAM TIFOID**

*STABILITY ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL FOR SPREADING
TYPHOID FEVER MODEL WITH DIRECT AND INDIRECT TRANSMISSIONS*

Ilmi Nurfaizah Rustam

H022221014



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA TRANSMISI LANGSUNG DAN
TIDAK LANGSUNG PENYAKIT DEMAM TIFOID**

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Megister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

ILMI NURFAIZAH RUSTAM

NIM: H022221014

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKUTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

TESIS

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA TRANSMISI LANGSUNG DAN
TIDAK LANGSUNG PENYAKIT DEMAM TIFOID**

ILMI NURFAIZAH RUSTAM

NIM : H022221014

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada 16 Agustus 2024 dan
dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

Program Studi Magister Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

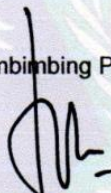
Mengesahkan:

Pembimbing Utama

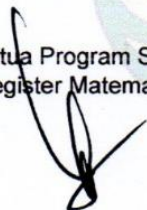


Prof. Dr. Svamsuddin Toaha, M.Sc.
NIP. 196801141994121001

Pembimbing Pendamping,



Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.
NIP. 198009042003122001

Ketua Program Studi
Magister Matematika

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 196402071991031013

Dekan Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 197205151997021002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Kontrol Optimal Model Matematika Transmisi Langsung Dan Tidak Langsung Penyakit Demam Tifoid" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing (Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. dan Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal (Semarak Ilmu) sebagai artikel dengan judul "*Stability Analysis and Optimal Control for Spreading Typhoid Fever Model with Direct And Indirect Transmissions*". Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, Agustus 2024



Ilmi Nurfaizah Rustam
NIM H022221014

Ucapan Terima Kasih

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, kalimat pertama yang penulis ucapkan kepada-Nya sebagai rasa syukur yang dalam. Allah subhanahu wata'ala, Maha Pemberi, yang menggerakkan hati dan pikiran serta menggelorakan semangat dalam diri Hamba-Nya. Shalawat dan salam kepada baginda Rasulullah, Nabi Muhammad saw yang membimbing umatnya menuju kebaikan dan kebenaran.

Penulis telah menyelesaikan tesis yang berjudul "Kontrol Optimal Model Matematika Transmisi Langsung Dan Tidak Langsung Penyakit Demam Tifoid". Tujuan utama penulisan karya ini untuk memenuhi persyaratan akademik dalam rangka memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis sangat sadar bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada kedua orang tua yang tercinta **Ibunda Dra. Rahmawati MD.** Dan **Ayahanda Drs. Rustam Borahim** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang tiada henti mengalir dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Terima kasih atas segala aspek dukungan yang tidak terkira nilainya. Semoga Allah swt memberikan balasan atas segala kebaikan kedua orang tua saya.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**, selaku pembimbing utama dan Ibu **Prof. Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, beserta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya mendampingi penulis sehingga karya ini dapat terselesaikan.
2. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.** selaku anggota tim penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.
3. Terima kasih kepada adikku tersayang **Vera Syafirah Rustam, Alifah Alesha Agung** dan Keluarga, yang terus menjadi pemacu bagi penulis untuk semakin giat berusaha.
4. Titiek Israwati sudah menjadi kakak dan teman, yang memberikan semangat, motivasi, canda tawa serta dukungan.
5. Annisa Arfiani dan Cantikka Nurhasanah Fortuna, yang selalu memberikan dukungan.
6. Fitriyani, St. Nurhilmah Busrah, dan Waode Nurlaelah yang telah menemani berjuang selama dibangku perkuliahan, yang selalu memberi semangat, dukungan, motivasi, dan telah memberikan berbagai kisah cerita, baik suka maupun duka yang kita lalui bersama.
7. **Teman-teman Prodi Matematika S2 Lemma 22**, yang telah membantu penulis, senantiasa kebersamai dan menyayangi.

8. **Teman-teman S2** atau Penghuni Ruang S2 yang telah menemani dan menyemangati penulis.

Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu persatu. Semoga segala bantuan beserta kebaikan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini memberi manfaat kepada para pembaca dan seluruh pihak yang membutuhkan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, Agustus 2024

Penulis



Ilmi Nurfaizah Rustam

Abstrak

Ilmi Nurfaizah Rustam. Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran langsung dan tidak langsung Penyakit Demam Tifoid (Dibimbing oleh Syamsuddin Toaha dan Kasbawati)

Demam tifoid merupakan penyakit yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Salmonella Typhi* dan bersifat endemik. Dalam penelitian ini proses penularan demam tifoid yaitu melalui transmisi langsung dan transmisi tidak langsung. Meningkatnya kasus carrier merupakan salah satu permasalahan yang dihadapi dalam menangani demam tifoid yang berdampak pada semakin sulitnya upaya pengobatan dan pencegahan. Dalam menangani permasalahan tersebut teori kontrol optimal diterapkan pada model matematika dengan pemberian variasi kontrol berupa kampanye kesehatan (u_1), pengobatan pada individu terinfeksi (u_2) dan pengobatan pada individu carrier chronic (u_3), dengan tujuan untuk meminimumkan jumlah individu terinfeksi dan individu *carrier chronic*. Penentuan bentuk kontrol optimal menggunakan prinsip Minimum Pontryagin. Dalam menentukan strategi kombinasi kontrol yang efektif yaitu dengan menerapkan tujuh strategi pemberian kontrol. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Forward-Backward Sweep Runge-Kutta orde 4. Hasil simulasi numerik yang dilakukan diperoleh strategi terbaik dalam mengurangi jumlah individu terinfeksi dan individu *carrier chronic* yaitu dengan menerapkan kombinasi kontrol berupa kampanye kesehatan (u_1), pengobatan pada individu terinfeksi (u_2) dan pengobatan pada individu carrier chronic (u_3) secara bersamaan.

Kata Kunci: Demam Tifoid, Kampanye kesehatan, Pengobatan, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, *Forward-Backward Sweep*.

Abstract

Ilmi Nurfaizah Rustam. Optimal Control Mathematical Model for Direct and Indirect Transmission of Typhoid Fever (mentored by Syamsuddin Toaha and Kasbawati).

Typhoid fever is a malady stemming from a *Salmonella Typhi* bacterial infection and is characterized by its endemic nature. Within the scope of this investigation, the transmission process of typhoid fever is elucidated, involving both direct and indirect modes of transmission. A pronounced challenge in the management of typhoid fever revolves around the burgeoning cases of carriers, which in turn, impede treatment and prevention endeavors. To confront these challenges, we have employed optimal control theory to the mathematical model. This involves introducing variable controls in the form of health campaigns (u_1), treatment for infected individuals (u_2), and treatment for chronic carrier individuals (u_3), with the overarching objective of minimizing the prevalence of infected individuals and chronic carriers. The determination of the optimal control configurations is achieved through the application of the Pontryagin Minimum principle. In pursuit of an effective amalgamation of control strategies, we have explored seven distinct strategies. Subsequently, numerical simulations have been conducted employing the 4th order Forward-Backward Sweep Runge-Kutta method. The outcomes of these simulations have illuminated that the most efficacious approach for reducing the number of infected individuals and chronic carrier individuals involves the simultaneous application of a combination of controls, encompassing health campaigns (u_1), treatment of infected individuals (u_2), and treatment of chronic carrier individuals (u_3).

Keyword: Typhoid Fever, Health Campaign, Treatment, Optimal Control, Minimum Contryagin Principle, Forward-Backward Sweep.

Daftar Isi

HALAMAN SAMPUL.....	i
PERNYATAAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	iv
Ucapan Terima Kasih	v
Abstrak.....	vii
Abstract	viii
Daftar Isi	ix
Daftar Simbol.....	xii
Daftar Tabel.....	xiii
Daftar Gambar	xiv
BAB I Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
1.5 Batasan Masalah	3
1.6 Teori.....	3
1.6.1 Studi Review Perkembangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid	3
1.6.2 Epidemiologi Demam Tifoid	4
1.6.3 Manifestasi Klinis Demam Tifoid	5
1.6.4 Pencegahan Demam Tifoid	5
1.6.5 Diagnosis dan Pengobatan Demam Tifoid.....	6
1.6.6 Titik Keseimbangan.....	6
1.6.7 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan	7
1.6.8 Kriteria Routh-Hurwitz	8
1.6.9 Bilangan Reproduksi Dasar.....	9
1.6.10 Teori Kontrol Optimal.....	10
1.6.11 Prinsip Minimum Pontryagin.....	11

1.6.12	Metode Forward-Backward Sweep	13
BAB II Metodologi Penelitian		19
2.1	Jenis Penelitian	19
2.2	Waktu dan Tempat Penelitian.....	19
2.3	Langkah Penelitian	19
2.4	Penarikan Kesimpulan.....	20
2.5	Diagram Alur Penelitian	20
BAB III Hasil Penelitian		21
3.1	Pengembangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid	21
3.2	Titik Keseimbangan Sistem	25
3.2.1	Titik Keseimbangan Non Endemik.....	25
3.2.2	Bilangan reproduksi dasar.....	25
3.2.3	Analisis Sensitivitas Parameter	28
3.2.4	Titik Keseimbangan Endemik	29
3.3	Analisis Kestabilan Model	32
3.3.1	Analisis kestabilan lokal titik setimbang non endemik.....	32
3.3.2	Analisis kestabilan lokal titik setimbang endemik	35
3.4	Formulasi dan Penyelesaian Kontrol Optimal	37
3.5	Simulasi Numerik Sistem Tanpa Kontrol dan dengan Kontrol Optimal	41
3.5.1	Efektifitas Strategi I dengan Pemberian Kontrol Kampanye kesehatan (u1)	43
3.5.2	Efektifitas Strategi II dengan Pemberian Kontrol Pengobatan pada Individu Terinfeksi (u2)	45
3.5.3	Efektifitas Strategi III dengan Pemberian Kontrol Pengobatan pada Individu Carrier Chronic (u3).....	47
3.5.4	Efektifitas Strategi IV dengan Pemberian Kontrol Kampanye kesehatan (u1) dan Pengobatan pada Individu Terinfeksi (u2).....	49
3.5.5	Efektifitas Strategi V dengan Pemberian Kontrol Kampanye kesehatan (u1) dan Pengobatan pada Individu Carrier Chronic (u3)	52
3.5.6	Efektifitas Strategi VI dengan Pemberian kontrol Pengobatan pada Individu Terinfeksi (u2) dan Pengobatan pada Individu Carrier Chronic (u3).....	54

3.5.7 Efektifitas Strategi VII dengan Pemberian kontrol Kampanye kesehatan (u1), Pengobatan pada Individu Terinfeksi (u2) dan Pengobatan pada Individu Carrier Chronic (u3).....	56
BAB IV Penutup.....	60
4.1 Kesimpulan	60
4.2 Saran	61
Daftar Pustaka	62
Lampiran.....	65

Daftar Simbol

Simbol	Deskripsi
Λ	Laju kelahiran manusia
μ	Laju kematian alami pada manusia
β_1	Laju infeksi dari populasi (<i>I</i>) ke populasi (<i>S</i>)
β_2	Laju infeksi dari populasi (<i>C</i>) ke populasi (<i>S</i>)
β_3	Laju individu mengkonsumsi makanan dan minuman yang terkontaminasi bakteri <i>Salmonella Thypi</i> (<i>B</i>)
α	Laju pengobatan pada populasi (<i>I</i>)
ρ	Laju pengobatan pada populasi (<i>C</i>)
θ	Laju perpindahan dari populasi (<i>I</i>) ke populasi (<i>C</i>) karena kegagalan pengobatan
δ	Laju kematian karena penyakit
η_1	Tingkat pembuangan bakteri <i>Salmonella Thypi</i> dari populasi (<i>I</i>)
η_2	Tingkat pembuangan bakteri <i>Salmonella Thypi</i> dari populasi (<i>C</i>)
μ_b	Kematian alami pada populasi Bakteri <i>Salmonella Thypi</i>

Daftar Tabel

Tabel 1.1 Kestabilan sistem linear $\dot{x} = f(x)$	7
Tabel 3.1 Variabel Pada Model Penyebaran Penyakit Demam Tifoid.....	24
Tabel 3.2 Parameter Pada Model Penyebaran Penyakit Demam Tifoid	24
Tabel 3.3 Hasil analisis uji sensitivitas parameter model	29
Tabel 3.4 Nilai Parameter Simulasi Numerik	41

Daftar Gambar

Gambar 3.1 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Demam Tifoid	23
Gambar 3.2 Simulasi Numerik Strategi I ($u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0$)	43
Gambar 3.3 Grafik Fungsi Kontrol Strategi I ($u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0$)	45
Gambar 3.4 Simulasi Numerik Strategi II ($u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$)	46
Gambar 3.5 Grafik Fungsi Kontrol Strategi II ($u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$)	47
Gambar 3.6 Simulasi numerik Strategi III ($u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$)	48
Gambar 3.7 Grafik Fungsi Kontrol Strategi III ($u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$)	49
Gambar 3.8 Simulasi numerik Strategi IV ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$)	50
Gambar 3.9 Grafik Fungsi Kontrol Strategi IV ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$)	51
Gambar 3.10 Simulasi numerik Strategi V ($u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$)	53
Gambar 3.11 Grafik Fungsi Kontrol Strategi V ($u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$)	54
Gambar 3.12 Simulasi numerik Strategi VI ($u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$)	55
Gambar 3.13 Grafik Fungsi Kontrol Strategi VI ($u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$)	56
Gambar 3.14 Simulasi numerik Strategi VII ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$)	58
Gambar 3.15 Grafik Fungsi Kontrol Strategi VII ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$)	59

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan dan kemajuannya ilmu pengetahuan akan mempermudah dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Matematika dapat memecahkan permasalahan pada bidang teknik, perekonomian, sains dan permasalahan lainnya khususnya pada kesehatan. Kesehatan merupakan hal yang sangat penting dalam kehidupan manusia. Perkembangan ilmu pengetahuan matematika pada kesehatan memberikan peranan penting dalam menganalisa dan mengontrol penyebaran penyakit yang dapat dianalisa dalam bentuk model matematika.

Pemodelan matematika merupakan pengembangan dari aljabar, analisis dan persamaan diferensial karena pemodelan matematika tentang penerapan atau aplikasi di bidang tersebut. Salah satu model matematika dalam kesehatan yaitu penyebaran suatu penyakit (Side & Rangkuti, 2016). Masalah kesehatan yang sering menjadi perhatian masyarakat adalah penyakit menular karena masyarakat harus waspada terhadap penyebaran penyakit tersebut melalui interaksi didalam rantai infeksi baik secara langsung maupun tidak langsung. Diantaranya penyebaran Demam Tifoid karena tingkat penyebarannya yang cepat dan banyaknya kasus kematian yang terjadi.

Demam tifoid merupakan penyakit yang disebabkan oleh bakteri *Salmonella Thypi* (Tresna dkk, 2022; Shaikh & Sooppy Nisar, 2019). Manusia adalah satu-satunya reservoir dan inang yang diketahui untuk demam tifoid (Ahmed dkk, 2023; Chang dkk, 2019). Penyebaran demam tifoid dapat terjadi secara langsung (manusia ke manusia), atau penularan tidak langsung, yang terjadi melalui konsumsi makanan atau air yang terkontaminasi oleh bakteri *Salmonella Thypi* (Matsebula dkk, 2021; Mushanyu dkk, 2018; Peter dkk, 2021; Aji dkk, 2019).

Berdasarkan World Health Organization (WHO) tahun 2018 demam tifoid masih banyak ditemukan di beberapa negara berkembang. Setiap tahunnya, sekitar 21 juta kasus dan 220.000 kematian di seluruh dunia disebabkan oleh tifus, dan diperkirakan menyebabkan antara 9,8 dan 13,9 juta patogen (Moyer dkk, 2017; Ahmed dkk, 2023). Sebagian besar kasus terjadi di negara-negara berpendapatan rendah dan menengah yaitu Asia Selatan, Asia Tenggara, dan Afrika sub-Sahara yang dimana terdapat sanitasi yang buruk serta terbatasnya akses terhadap suplai air bersih (Ahmed, dkk, 2023; Antillón, dkk, 2017; Irena & Gakkhar, 2021).

Gejala dari demam tifoid berupa demam tinggi, lemas, sakit perut, pusing, kehilangan nafsu makan, dan ruam pada tubuh (Ahmed dkk, 2023). Demam tifoid membutuhkan waktu 7-14 hari untuk bermanifestasi pada orang yang terinfeksi. Pasien diberikan pengobatan antibiotik, setelah itu orang tersebut mungkin merasa lebih baik beberapa hari kemudian. Namun, dalam kasus yang lebih buruk, orang yang terinfeksi tanpa perawatan yang tepat dapat mengalami komplikasi yang mengakibatkan kematian (Kailan Suhuyini & Seidu, 2023; Rashid dkk, 2023)

Penelitian yang dilakukan oleh Olsen (2017), menyebutkan bahwa sumber penularan Bakteri *Salmonella Typhi* ada dua, yaitu pasien demam tifoid dan individu *carrier chronic*. Individu *carrier chronic* merupakan seseorang yang kotorannya (feses atau urin) mengandung bakteri *Salmonella Typhi* setelah satu tahun pasca demam tifoid tanpa gejala klinis. Bakteri *Salmonella Typhi* tidak memiliki reservoir lingkungan yang diketahui, akan tetapi individu *carrier chronic* yang bersifat asimtomatik, memiliki peran dalam penyebaran bakteri pada populasi manusia (Masuet-Aumatell & Atouguia, 2021).

Menurut Gunn, dkk (2014) demam tifoid merupakan permasalahan yang kompleks hal ini dikarenakan meningkatnya kasus *carrier chronic*, relaps dan resistensi terhadap obat. Hal ini menyulitkan upaya pengobatan dan pencegahan. Setelah pengobatan tidak semua pasien sembuh total, 4% pasien berpotensi menjadi karier kronis. Pasien-pasien ini tetap asimtomatik setelah pengobatan akut, tetapi mereka dapat mengeluarkan Bakteri *Salmonella Typhi* hingga 1 tahun melalui tinja dan urin (Gupta dkk, 2018). Beberapa orang yang baru sembuh dari penyakit ini dapat terus membawa bakteri tersebut di usus dan kantong empedunya. Meskipun bakteri masih ada di dalam tubuh, pembawa penyakit kronis ini tidak mengalami gejala dan bersifat asimtomatik. Demam tifoid harus ditangani dengan cepat dan tuntas karena akan menjadi lebih serius jika tidak segera diobati. Dengan adanya pengobatan yang tepat dapat mengurangi kemungkinan individu untuk bisa menjadi *carrier chronic* (Aji dkk, 2019).

Model matematika telah digunakan secara meluas sebagai suatu metode pendekatan untuk mengenali dengan baik mekanisme penyebaran suatu penyakit (Toaha, 2013). Model matematika telah menjadi alat manajemen yang sangat berharga bagi para ahli epidemiologi, baik yang menjelaskan mekanisme yang mendasari dinamika yang diamati maupun membuat prediksi kuantitatif tentang efektivitas berbagai tindakan pengendalian (Mushayabasa, 2016).

Dalam hubungan dengan permasalahan diatas pemodelan matematika dapat digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit. Dengan demikian dapat ditentukan strategi yang efektif untuk mengendalikan penyakit tersebut. Kontrol optimal merupakan suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dari suatu sistem dinamik kontinu.

Adapun penelitian mengenai penyebaran penyakit demam tifoid seperti yang telah dilakukan oleh Peter, dkk (2021) yang meneliti mengenai penyebaran langsung (*direct transmission*) dan penyebaran tidak langsung (*indirect transmission*). Pada penelitian ini model matematika yang dikembangkan yaitu dengan menambahkan *carrier chronic* sebagai salah satu variabel dalam penelitian serta menambahkan kontrol optimal berupa pengobatan pada individu terinfeksi, pengobatan pada individu *carrier chronic* dan kampanye kesehatan, dengan judul penelitian "Kontrol Optimal Model Matematika Transmisi Langsung dan Tidak Langsung Penyakit Demam Tifoid".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

- 1.2.1 Bagaimana pengembangan model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid dengan menambahkan populasi *carrier chronic* sebagai kompartemen?

- 1.2.2 Bagaimana penentuan kontrol optimal dari model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid dengan kontrol berupa kampanye kesehatan, pengobatan pada individu terinfeksi dan pengobatan pada individu *carrier chronic*?
- 1.2.3 Bagaimana penentuan solusi optimal dari masalah optimasi model matematika penyebaran penyakit demam tifoid melalui metode *forward-backward sweep*?
- 1.2.4 Bagaimana hasil analisis dari perbandingan solusi numerik model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

- 1.3.1 Mengembangkan model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid dengan menambahkan populasi *carrier chronic* sebagai kompartemen.
- 1.3.2 Menentukan kontrol optimal dari model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid dengan kontrol berupa kampanye kesehatan , pengobatan pada individu terinfeksi dan pengobatan pada individu *carrier chronic*.
- 1.3.3 Menentukan solusi optimal dari masalah optimasi model matematika penyebaran penyakit demam tifoid melalui metode *forward-backward sweep*.
- 1.3.4 Menganalisis perbandingan solusi numerik model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid tanpa kontrol dan dengan kontrol optimal.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberi gambaran tentang model matematika transmisi langsung dan tidak langsung penyakit demam tifoid serta pengendalian optimalnya dengan kontrol berupa kampanye kesehatan (u_1), pengobatan pada individu terinfeksi (u_2) dan pengobatan pada individu *carrier chronic* (u_3).

1.5 Batasan Masalah

Model matematika penyebaran penyakit demam tifoid yang digunakan dibatasi pada penyakit yang disebabkan oleh bakteri *Salmonella Thypi* . Populasi dibagi menjadi lima kompartemen yaitu *Susceptibles* (S), *Infected* (I), *Carrier Chronic* (C) , *Recovered* (R) dan Bakteri pada lingkungan (B).

1.6 Teori

1.6.1 Studi Review Perkembangan Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Tifoid

Beberapa peneliti telah mengkaji permasalahan mengenai demam tifoid. Penelitian yang dilakukan Peter, dkk (2021) meneliti tentang penyebaran langsung dan

penyebaran tidak langsung penyakit demam tifoid, dengan membagi kompartemen menjadi, populasi manusia rentan (S), sub populasi individu yang telah terinfeksi demam tifoid (I), populasi individu yang telah terinfeksi demam tifoid tetapi tidak menunjukkan adanya gejala demam tifoid (I_c) dan populasi individu yang telah sembuh dari demam tifoid (R). Transmisi langsung terjadi akibat adanya individu (I) dan (I_c) yang melakukan kontak dengan individu (S) dan Populasi (B) yang terdapat pada lingkungan merupakan penyebab terjadi transmisi tidak langsung.

Selanjutnya yang dilakukan oleh Shaikh & Soopy Nisar (2019) dalam penelitiannya membagi populasi manusia kedalam empat populasi yaitu, populasi manusia rentan (S), populasi individu terinfeksi (I), populasi individu terinfeksi tanpa gejala (Q), Transmisi langsung terjadi akibat adanya individu (I) dan (Q) yang melakukan kontak dengan individu (S). Populasi bakteri pada lingkungan (W) merupakan penyebab terjadi transmisi tidak langsung dan populasi individu yang telah sembuh dari demam tifoid (R).

Adapun penelitian yang dilakukan Tilahun, dkk (2017) meneliti mengenai pemodelan matematika dan kontrol optimal penyebaran penyakit demam tifoid dengan strategi hemat biaya kontrol yang digunakan berupa tingkat efektivitas kampanye kesehatan, screening dan pengobatan. Model matematika yang dikembangkan membagi populasi menjadi dua yaitu populasi bakteri *Salmonella Typhi* (B) dan populasi manusia yang terdiri dari sub populasi individu rentan (S), sub populasi individu yang terinfeksi demam tifoid namun belum menunjukkan gejala (C), sub populasi terinfeksi demam tifoid (I) dan sub populasi individu sembuh setelah melakukan pengobatan (R).

Selanjutnya penelitian yang dilakukan Matsebula, dkk (2021) mengenai model matematika penyebaran penyakit demam tifoid membagi populasi menjadi populasi bakteri *Salmonella Typhi* (B) dan populasi manusia yang terdiri dari populasi individu rentan (S), populasi terinfeksi (I) dan populasi individu sembuh (R).

Penelitian Mushanyu, dkk (2018) membagi populasi menjadi populasi bakteri (B) dan populasi manusia yang terbagi menjadi populasi individu rentan (S) populasi individu terinfeksi demam tifoid (I) dan populasi individu carier chronic (C), (T) merupakan populasi individu yang melakukan pengobatan serta (R) merupakan populasi individu yang sembuh setelah melakukan pengobatan.

Penelitian yang dilakukan oleh Karunditu, dkk (2019) penelitian yang dilakukan membagi populasi menjadi individu rentan (S), individu eksposed (E), individu terinfeksi demam tifoid (I) dan sub populasi individu sembuh setelah melakukan pengobatan (R).

1.6.2 Epidemiologi Demam Tifoid

Demam tifoid disebabkan oleh bakteri *Salmonella Typhi*. Penyakit demam tifoid sering terjadi di perkotaan dengan sanitasi yang buruk. Meskipun penularan secara langsung terjadi melalui *fecal-oral* atau rute *fecal-oral* (*fecal* : kotoran, *oral* : mulut) dianggap sebagai cara penularan utama, terdapat bukti terbaru yang menunjukkan bahwa penularan juga terjadi secara tidak langsung yaitu dari lingkungan dan memiliki kontribusi terhadap penyebaran penyakit demam tifoid (Akullian dkk, 2015). Faktor risiko

penularan bakteri tifoid dapat disingkat menjadi 5F : food (makanan), fly (lalat), fingers (jari yang kotor), feces (kotoran), dan fomit (muntahan).

Penyakit demam tifoid menyebar dengan cara fekal-oral. Bakteri berasal dari tinja atau urin penderita atau *carrier* (pembawa bakteri yang tidak sakit) yang masuk ke dalam tubuh manusia melalui air dan makanan. Selain itu bakteri ini juga dapat menular melalui sayuran mentah dan buah-buahan yang pohonnya dipupuk menggunakan kotoran manusia. Serangga (lalat) juga berperan dalam penularan penyakit ini (WHO, 2018).

Dalam penelitian yang dilakukan oleh (Olsen, 2017) menyebutkan bahwa sumber penularan Bakteri *Salmonella Typhi* ada dua, yaitu pasien demam tifoid dan individu *carrier chronic*. Individu *carrier chronic* merupakan seseorang yang kotorannya (feses atau urin) mengandung bakteri *Salmonella Typhi* setelah satu tahun pasca demam tifoid tanpa gejala klinis. Bakteri *Salmonella Typhi* tidak memiliki reservoir lingkungan, manusia adalah satu-satunya reservoir organisme ini, akan tetapi individu *Carrier Chronic* yang bersifat asimtomatik, memiliki peran dalam penyebaran bakteri pada populasi manusia (Masuet-Aumatell & Atouguia, 2021).

Individu yang terinfeksi membawa *Salmonella Typhi* di saluran usus dan aliran darah mereka dan secara berkala “menumpahkan” bakteri dalam tinja mereka dan lebih jarang lagi dalam urin mereka. Penularan dari inang ke inang terjadi jika makanan atau air yang terkontaminasi kotoran tersebut yang tertelan. Dikenal sebagai jalur *fecal-oral*. Darah dari orang yang terinfeksi juga dapat menularkan bakteri tersebut ke orang lain. Setelah menelan makanan atau air yang terkontaminasi, *Salmonella Typhi* memasuki usus kecil, berkembang biak, dan menyebar ke aliran darah. Infeksi yang diakibatkannya bersifat sistemik. Kantung empedu, hati, usus, dan limpa biasanya terkena.

1.6.3 Manifestasi Klinis Demam Tifoid

Penyakit demam tifoid akan menyebabkan seseorang mengalami demam hingga 39° – 40°C dan demam akan menetap pada minggu kedua infeksi. Gejala infeksi pada demam tifoid tidak spesifik dan seperti infeksi lainnya, gejalanya berupa sakit kepala, mual, nyeri perut, nyeri otot, nyeri sendi, demam, kurang nafsu makan serta susah BAB (Levani & Prastya, 2020).

Menurut Ahmed dkk (2023), terdapat beberapa gejala yang muncul pada penderita demam tifoid, yaitu berupa demam tinggi, lemas, sakit perut, pusing, kehilangan nafsu makan, dan ruam pada tubuh. Demam tifoid membutuhkan waktu 7-14 hari untuk bermanifestasi pada orang yang terinfeksi. Pasien diberikan pengobatan antibiotik, setelah itu orang tersebut mungkin merasa lebih baik beberapa hari kemudian. Namun, dalam kasus yang lebih buruk, orang yang terinfeksi tanpa perawatan yang tepat dapat mengalami komplikasi yang mengakibatkan kematian (Kailan Suhuyini & Seidu, 2023).

1.6.4 Pencegahan Demam Tifoid

Usaha yang dapat dilakukan untuk mencegah penyakit demam tifoid adalah sebagai berikut:

1. Vaksinasi
2. Pendidikan kesehatan kepada masyarakat
3. Penyediaan air minum yang memenuhi syarat kesehatan.
4. Tempat pembuangan kotoran manusia yang higienis.
5. Pemberantasan lalat
6. Pengawasan terhadap makanan (Zulkoni, 2010).

Menurut Elisabeth Purba dkk (2016), terdapat beberapa pengendalian demam tifoid yang dapat dilakukan antara lain

1. Melakukan skrining tifoid berbasis serologi
2. Mengoptimalkan pasokan air bersih
3. Penyimpanan dan pengolahan air rumah tangga dan penyediaan sarana sanitasi yang memenuhi syarat kesehatan,
4. Melakukan penyuluhan tentang pencegahan tifoid,
5. Pelatihan tenaga kesehatan, dan
6. Vaksinasi tifoid

Menurut Elisabeth Purba dkk (2016) menyebutkan bahwa Di Indonesia, masalah rumit yang sering timbul adalah masalah karier (carrier) atau relaps dan resistensi terhadap obat-obat yang dipakai sehingga menyulitkan upaya pengobatan dan pencegahan. Penyakit ini dapat sembuh sempurna, tetapi jika tidak ditangani dengan baik, maka selain dapat menyebabkan seseorang menjadi karier atau relaps, dan resistensi, juga menimbulkan komplikasi seperti perforasi dan kematian. Sehingga untuk mengurangi individu menjadi *carrier chronic* diperlukan pengobatan yang tepat.

1.6.5 Diagnosis dan Pengobatan Demam Tifoid

Menurut Aji dkk (2019) demam tifoid harus ditangani dengan cepat dan tuntas karena demam tifoid akan menjadi lebih serius jika tidak segera diobati. Beberapa orang yang baru sembuh dari penyakit demam tifoid dapat terus membawa bakteri *Salmonella Thypy* di usus dan kantong empedunya. Meskipun bakteri *Salmonella Thypy* masih ada di dalam tubuh individu *carrier chronic* tidak menunjukkan gejala apa pun. Dengan adanya pengobatan yang tepat dapat mengurangi kemungkinan individu untuk bisa menjadi *carrier chronic*.

1.6.6 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan merupakan solusi yang diperoleh ketika sistem (1) memenuhi kondisi setimbang dalam artian sistem (1) tidak mengalami perubahan apapun terhadap waktu. Dari model yang dikembangkan Titik keseimbangan terdiri dari dua, yaitu titik keseimbangan non endemik (bebas penyakit atau E_0) dan titik keseimbangan endemik (bebas terinfeksi atau E_1). Titik keseimbangan non endemik merupakan suatu kondisi ketika penyakit tidak menyebar dalam populasi, hal ini terjadi ketika populasi terinfeksi adalah nol. Sedangkan titik keseimbangan endemik merupakan suatu kondisi ketika populasi terinfeksi tidak nol. Titik ekuilibrium didefinisikan sebagaimana Definisi 2.1.

Definisi 1.1. (Wiggins, 1990) Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$. Titik $x^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(x^*) = 0$.

1.6.7 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem persamaan dalam penelitian ini berbentuk non linear. Linearisasi sistem bertujuan untuk mengubah suatu sistem persamaan diferensial non linear menjadi sistem persamaan diferensial linear dengan menggunakan Matriks Jacobian.

Definisi 1.2 (Hale & Kocak, 1991) Jika x^* merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$ maka persamaan diferensial linear

$$\dot{x} = J(x^*)x, \quad (1.1)$$

disebut persamaan linearisasi pada titik kesetimbangan x^* dimana $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dengan $J(x^*)$ disebut matriks Jacobi dari f yang di evaluasi di titik x^* .

Kestabilan titik kesetimbangan x^* dapat ditentukan dengan cara menyelesaikan persamaan karakteristik

$$|J(x^*) - \lambda I| = 0, \quad (1.2)$$

dengan I merupakan matriks identitas. Misalkan akar-akar persamaan karakteristik dari (1.1) adalah λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ dan λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ maka sifat kestabilan dari $J(x^*)$ yang dilinearkan disekitar titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan sifat kestabilan pada Tabel 1.1, (Boyce & Diprima, 2012).

Tabel 1.1 Sifat Kestabilan dari Sistem Linear

NO.	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
1	$\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$	Tidak Stabil
2	$\lambda_i < 0, \forall i = 1, \dots, n$	Stabil Asimtotik
3	$\lambda_i < 0 < \lambda_j, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	Tidak Stabil
4	$\lambda_i = \lambda_j > 0, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	Tidak Stabil
5	$\lambda_i = \lambda_j < 0, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	Stabil Asimtotik
6	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	$r > 0$, tidak Stabil
7	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	$r < 0$, stabil Asimtotik
8	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	Stabil

1.6.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk mempermudah dalam menentukan sifat kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan, jika nilai eigen dari matriks Jacobi $J(x^*)$ sulit diselesaikan secara eksplisit. Analisis dilakukan dengan memperhatikan koefisien-koefisien dari persamaan karakteristik.

Teorema 1.1 (Edelstein, 2005) *Misalkan diberikan suatu polinomial,*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n, \quad (1.3)$$

dengan $a_i, i = 1, \dots, n$ adalah konstanta real. Persamaan ini mempunyai k buah akar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Masing-masing akar dapat bernilai real atau kompleks yang memenuhi $P(\lambda_i) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Misalkan diberikan sistem linear yaitu

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (1.4)$$

dengan x merupakan vektor kolom yang berukuran $n \times 1$ dan A merupakan matriks berukuran $n \times n$. Misalkan persamaan (2.2) merupakan persamaan karakteristik dari sistem (2.3), maka nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $P(\lambda)$.

Untuk menentukan jenis nilai eigen dari matriks A , yaitu melalui determinan dari matriks H_n . Dalam bentuk umum, matriks H_n atau matriks *Hurwitz* merupakan matriks dengan entri sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1),$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

⋮

$$H_j = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{pmatrix},$$

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix},$$

dengan syarat setiap unsur (l, m) pada matriks H_j adalah

$$H_k = \begin{cases} a_{2l-m}, & \text{untuk } 0 < 2l - m \leq k \\ 1, & \text{untuk } 2l = m \\ 0, & \text{untuk } 2l < m \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}.$$

Titik kesetimbangan x^* dikatakan stabil jika dan hanya jika $|H_j| > 0$, untuk setiap $j = 1, 2, 3, \dots, k$.

Sebagai contoh, misalkan diberikan persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (1.5)$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan (1.5) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$H_1 = |a_1| > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \text{ atau} \\ a_1a_2 > 0 \text{ dan memenuhi } a_1, a_2 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \text{ atau} \\ a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0 \text{ dan memenuhi } a_1, a_2, a_3 > 0.$$

1.6.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dilambangkan dengan R_0 , didefinisikan sebagai ekspektasi banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat dari kasus primer dalam populasi yang virgin. Populasi yang virgin adalah populasi rentan yang tidak memuat individu yang terinfeksi. R_0 berfungsi sebagai parameter ambang batas yang memprediksi tingkat penyebaran suatu penyakit (Diekmann dkk, 1990).

Model epidemiologi mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan tak endemik dan titik kesetimbangan endemik. Jika $R_0 < 1$ maka dalam populasi tidak terjadi epidemik sehingga untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka dalam populasi telah terjadi epidemik dan apabila tidak segera dilakukan penanganan akan menjadi suatu endemik (wabah). Untuk $R_0 = 1$ kestabilan dari kedua titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan. R_0 dapat diperoleh melalui syarat kestabilan titik tak endemik (Van Den Driessche & Watmough, 2002).

Misalkan terdapat n populasi terinfeksi dan m populasi tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan sub populasi populasi terinfeksi dan y menyatakan sub populasi populasi tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga:

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{y} = \eta_j(x, y), \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m$$

dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder yang bertambah pada populasi terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari populasi terinfeksi. Penghitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dilinearisasikan dari sistem persamaan diferensial yang didekati oleh titik ekuilibrium bebas penyakit.

Persamaan sub populasi populasi terinfeksi yang telah di linearisasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = (F - V)\mathbf{x},$$

dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$, dan $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai:

$$K = FV^{-1},$$

dengan K disebut sebagai *Next Generation Matrix* (NGM). Menurut Van Den Driessche & Watmough (2002), Nilai harapan dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks K yaitu

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}). \quad (1.6)$$

1.6.10 Teori Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal adalah mencari nilai fungsi kontrol $u(t)$ yang membawa sistem dinamik dari state awal $\mathbf{x}(t_0)$ pada waktu t_0 ke state akhir $\mathbf{x}(t_f)$ pada waktu akhir t_f , sehingga dapat memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi objektif (Lenhart & Workman, 2007).

Misalkan $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, atau dalam notasi vektor $\mathbf{x}(t) \in R^n$ merupakan variabel state. *State* yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)), \quad (1.7)$$

dengan nilai awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, serta \mathbf{g} merupakan fungsi kontinu yang bergantung pada variabel \mathbf{x} dan kontrol u yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (1.7). Jika nilai $u(t)$ berubah maka solusi dari sistem (1.7) juga akan berubah. Masalah kontrol optimal adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (1.7) yaitu fungsi tujuan:

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (1.8)$$

dengan f fungsi yang bergantung pada variabel \mathbf{x} dan kontrol u (Lenhart & Workman, 2007)

Fungsi J merupakan fungsi tujuan dan kontrol $u(t) \in U$, dengan U merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol $u(t)$. Fungsi $u(t)$, $f(t, \mathbf{x}, u)$ dan $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$

merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi pada interval $[t_0, t_f]$. Pemilihan fungsi f bergantung pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan (Lenhart & Workman, 2007).

1.6.11 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum Pontryagin menyatakan bahwa persamaan Hamiltonian akan diminimumkan sepanjang U yang merupakan himpunan kontrol yang mungkin. Berikut langkah-langkah penerapan prinsip minimum Pontryagin untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$$

Dengan $f(t, \mathbf{x}, u)$ merupakan fungsi tujuan yang akan dioptimalkan dan $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$ merupakan persamaan state.

2. Minimumkan H terhadap kontrol u dengan menggunakan syarat stasioner yaitu:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh

$$u^* = u^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

3. Menyelesaikan persamaan state

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$$

dan persamaan costate

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Dengan adanya dua turunan yaitu $\dot{\mathbf{x}}$ dan $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, untuk menentukan solusi optimal dibutuhkan dua kondisi batas. Jika diberikan nilai awal $\mathbf{x}(0)$ dan nilai akhir $\mathbf{x}(t_f)$ maka secara langsung dapat ditentukan $\mathbf{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ apabila tidak diberikan kondisi akhir $\mathbf{x}(t_f)$ maka digunakan kondisi transversaliti yaitu $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$ sebagai kondisi akhir

4. Mensubstitusi hasil dari langkah 3 ke u^* untuk menentukan kontrol optimal. (Lenhart & Workman, 2007):

Berikut komponen dari prinsip minimum Pontryagin dapat diringkas sebagai berikut:

Model Sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Fungsional Objektif

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt$$

Fungsi Hamiltonian

$$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u) \quad (1.9)$$

Pengontrol Optimum

- Persamaan *state* $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u)$ (1.10)

- Persamaan *costate* $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ (1.11)

- Syarat *Stationer* $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U$ (1.12)

- Syarat *Transversalitas* $\lambda(t_f) = 0$ (1.13)

Contoh 2.1: (Lenhart & Workman, 2007) Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan:

$$\min_u \int_0^1 u^2(t) dt$$

terhadap fungsi kendala $\dot{x} = -2x + u$ dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $x(1) = 0$. Fungsi Hamilton dari masalah kontrol optimal tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= u^2 + \lambda(-2x + u) \\ &= u^2 - 2x\lambda + u\lambda \end{aligned}$$

Syarat stasionernya adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0,$$

sehingga diperoleh:

$$u = -\frac{\lambda}{2} \quad (1.14)$$

Persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-2\lambda) = 2\lambda$$

Dengan mensubstitusi nilai u pada persamaan (2.13) ke dalam fungsi kendala, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + u \\ &= -2x + \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -2x - \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

dapat ditulis kembali menjadi:

$$\dot{x}(t) = -2x - \frac{\lambda}{2}$$

$$\dot{\lambda}(t) = 2\lambda$$

Solusi dari $\dot{x}(t)$ dan $\dot{\lambda}(t)$ akan diselesaikan dengan menggunakan metode operator. Persamaannya dapat ditulis kembali menjadi:

$$(D + 2)x + \frac{1}{2}\lambda = 0 \quad (1.15)$$

$$(D - 2)\lambda = 0 \quad (1.16)$$

atau dalam bentuk:

$$\begin{vmatrix} (D + 2) & \frac{1}{2} \\ 0 & (D - 2) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

Dengan penyelesaian persamaan (1.17), maka diperoleh nilai eigen $D_1 = -2$ dan $D_2 = 2$, sehingga diperoleh solusi:

$$x = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t}, \quad (1.18)$$

$$\lambda = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{2t}, \quad (1.19)$$

dan

$$Dx = -2A_1 e^{-2t} + 2A_2 e^{2t}, \quad (1.20)$$

$$D\lambda = -2B_1 e^{-2t} + 2B_2 e^{2t}, \quad (1.21)$$

dimana A_1 , A_2 , B_1 , dan B_2 merupakan suatu konstanta. Selanjutnya, substitusi persamaan (1.17), (1.18), dan (1.19) ke dalam persamaan (1.14), maka diperoleh:

$$B_1 = 0 \text{ dan } B_2 = -8A_2.$$

Jadi, diperoleh solusi komplementer sebagai berikut :

$$x(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t}, \quad (1.22)$$

$$\lambda(t) = -8A_2 e^{2t}, \quad (1.23)$$

Kemudian substitusi nilai syarat awal ke dalam persamaan (1.22), diperoleh:

$$x(0) = A_1 + A_2 = 1 \quad (1.24)$$

$$x(1) = A_1 e^{-2} + A_2 e^2 = 0 \quad (1.25)$$

Dari persamaan (1.24) diperoleh $A_1 = 1 - A_2$.

Jika persamaan (1.24) dan (1.25) dieliminasi, maka diperoleh $A_2 = \frac{-1}{e^4 - 1}$.

Jadi, diperoleh u dan x yang optimal yaitu:

$$u^*(t) = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{-8A_2 e^{2t}}{2} = 4A_2 e^{2t} = \frac{-4e^{2t}}{e^4 - 1}$$

$$x^*(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{2t} = \frac{e^{-2t+4} - e^{2t}}{e^4 - 1}.$$

1.6.12 Metode Forward-Backward Sweep

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (1.8) terhadap kendala pada persamaan (1.7). Dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin, masalah optimasi dengan kendala dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t, x, u, \lambda) = \min_{(x,u,\lambda)} (f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u)) \quad (1.26)$$

dengan syarat keoptimalan

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \quad \forall u \in U.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal u^* menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk u pada awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu $[t_0, t_f]$ dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$ dan kontrol $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$, dimana $u_i \approx u(b_i)$. Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk \mathbf{x} dan $\boldsymbol{\lambda}$ yang bergantung pada \mathbf{u} . (Lenhart dan Workman, 2007).

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi $\mathbf{x}(t)$. Pada metode ini, diberikan kondisi awal yaitu pada persamaan (1.9), kemudian diberikan *step size* yaitu h . Pendekatannya melalui $\mathbf{x}(t+h)$ dan $\mathbf{x}(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\tag{1.28}$$

dengan

$$k_1 = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))\tag{1.29}$$

$$k_2 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = \mathbf{f}(t+h, \mathbf{x}(t) + hk_3).$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir yaitu pada persamaan (1.10). Kemudian diberikan *step size* yaitu h pendekatannya melalui $\boldsymbol{\lambda}(t-h)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\boldsymbol{\lambda}(t-h) = \boldsymbol{\lambda}(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\tag{1.30}$$

dengan

$$k_1 = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\lambda}(t))\tag{1.31}$$

$$k_2 = \mathbf{f}\left(t - \frac{h}{2}, \boldsymbol{\lambda}(t) - \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t - h, \lambda(t) - hk_3)$$

Selanjutnya nilai u diperbaharui pada setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai u yang lama dengan nilai u yang baru yaitu

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2},$$

dengan u_{baru} diperoleh dari syarat keoptimalan $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Bentuk kombinasi konveks yang lain adalah

$$u = u_{baru}(1 - c^k) + u_{lama}c^k$$

dengan k merupakan iterasi yang berjalan dan $0 < c < 1$. Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensi terpenuhi yaitu ketika nilai $\|u - u_{lama}\| = \sum_{i=1}^{N+1} |u_i - u_{lama(i)}|$ menjadi sangat kecil, dan u merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi yang sedang berjalan dan u_{lama} merupakan nilai fungsi kontrol pada iterasi sebelumnya. Bentuk uji konvergensi lain dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta$$

atau $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$, dengan δ merupakan toleransi yang diperkenankan (Lenhart dan Workman, 2007).