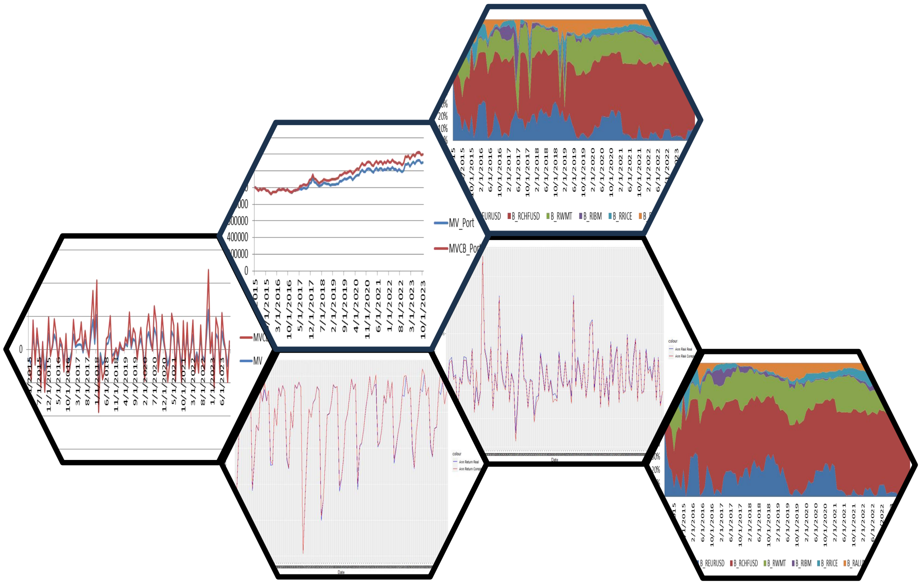
OPTIMASI PORTOFOLIO MENGGUNAKAN METODE *MEAN VARIANCE* BERBASIS RETURN BILANGAN KOMPLEKS



IZZA ANIS MAJIDAH

H022221009

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

OPTIMASI PORTOFOLIO MENGGUNAKAN METODE *MEAN VARIANCE* BERBASIS *RETURN* BILANGAN KOMPLEKS

PORTFOLIO OPTIMIZATION USING MEAN VARIANCE METHOD BASED ON COMPLEX NUMBER RETURN

Izza Anis Majidah
H022221009

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

OPTIMASI PORTOFOLIO MENGGUNAKAN METODE *MEAN VARIANCE* BERBASIS *RETURN* BILANGAN KOMPLEKS

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Megister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

IZZA ANIS MAJIDAH

NIM: H022221009

Kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKUTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

TESIS

OPTIMASI PORTOFOLIO MENGGUNAKAN METODE MEAN VARIANCE BERBASIS RETURN BILANGAN KOMPLEKS

IZZA ANIS MAJIDAH

NIM : H022221009

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada tanggal 22 bulan 7 tahun 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

Program Studi Magister Matematika
Departemen Matematika
Fakutas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Utama

Dr. Amran, S.Si., M.Si.
NIP. 197011011998021001

Pembimbing Pendamping,

Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si.
NIP. 197012311998021001

Ketua Program Studi
Megister Matematika

Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 196402071991031013

Dekan Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 197205151997021002

iii

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Optimasi Portofolio Menggunakan Metode Mean Variance Berbasis *Return* Bilangan Kompleks" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing (Dr. Amran, S.Si., M.SI. dan Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si.). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal (*Statistics, Optimization, and Information Computing*) sebagai artikel dengan judul "*Mean Variance Complex-Based Portfolio Optimization*". Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 20 Agustus 2024

IZZA ANIS MAJIDAH
NIM H022221009

v

UCAPAN TERIMA KASIH

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, kalimat pertama yang penulis ucapkan kepada-Nya sebagai rasa syukur yang dalam. Allah subhanahu wata'ala, Maha Pemberi, yang menggerakkan hati dan pikiran serta menggelorakan semangat dalam diri Hamba-Nya. Shalawat dan salam kepada baginda Rasulullah, Nabi Muhammad saw yang membimbing umatnya menuju kebaikan dan kebenaran.

Penulis telah menyelesaikan tesis yang berjudul "Optimasi Portofolio Menggunakan Metode Mean Variance Berbasis *Return* Bilangan Kompleks". Tujuan utama penulisan karya ini untuk memenuhi persyaratan akademik dalam rangka memperoleh gelar magister pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis sangat sadar bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada kedua orang tua yang tercinta **Ibunda Sitti Hartati** dan **Ayahanda Mushiruddin** atas setiap bait doa yang tidak pernah putus serta kasih sayang yang tiada henti mengalir dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis dengan sabar dan ikhlas. Terima kasih atas segala aspek dukungan yang tidak terkira nilainya. Semoga Allah swt memberikan balasan atas segala kebaikan kedua orang tua saya.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku rektor Universitas Hasanuddin dan Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Kepala Departemen Matematika dan penguji dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan Penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak **Dr. Amran, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi Bahri, S.Si., M.Si.**, selaku pembimbing pertama untuk segala ilmu, nasehat, beserta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis, serta bersedia meluangkan waktunya mendampingi penulis dalam semua proses penyelesaian studi magister dan penyusunan tesis ini.
4. Ibu **Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.** selaku Penguji yang telah bersedia untuk meluangkan waktu dan pikiran dalam memberikan saran sekaligus arahan dalam penyusunan tesis ini.
5. Keluarga besar **H. M. Saleh Giling** dan Keluarga besar **La Tang** yang senantiasa mendukung dan mendoakan dalam penyelesaian tugas akhir.

6. Terima kasih kepada adik-adik tersayang, Faiz Ghazi Abdillah, Nahlah Mujibah, Muhammad Sabri, Ahmad Shidiq, Hafidz Ahmad Saud, dan Fatima Azzahra yang terus menjadi pemacu bagi penulis untuk semakin giat berusaha.
7. Para kawan S2 **Aprilia Pratiwi S., Aswal Aryadi Pangga,** dan **Weldi Trianto,** yang sama-sama berjuang berempat dalam menguasai Hilbert Transform dan yang telah menemani penulis dari awal perkuliahan di Magister S2 Matematika Universitas Hasanuddin, meluangkan waktu untuk mendengarkan keresahan dan memberi nasehat serta dukungan sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Para kawan **SR**, yang kiranya terus memberi dukungan kepada penulis, baik moril hingga tenaga.
9. **Teman-teman Prodi Matematika S2 Lemma 22,** yang telah membantu penulis, senantiasa membersamai dan menyayangi.
10. **Teman-teman S2** atau Penghuni Ruang S2 yang telah menemani dan menyemangati penulis.

Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu persatu. Semoga segala bantuan beserta kebaikan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini memberi manfaat kepada para pembaca dan seluruh pihak yang membutuhkan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 20 Agustus 2024

Penulis

Izza Anis Majidah

ABSTRAK

Izza Anis Majidah. **Optimasi Portofolio Menggunakan Metode Mean Variance Berbasis Return Bilangan Kompleks** (Dibimbing oleh Amran Rahim dan Mawardi Bahri)

Latar belakang. *Mean Variance* (MV) adalah suatu metode penentuan bobot aset keuangan dalam suatu portofolio dengan mempertimbangkan besarnya risiko terhadap *return* yang diharapkan. Metode MV bekerja dengan baik pada kondisi pasar keuangan yang stabil. Namun, pada Kondisi pasar saham yang sangat fluktuatif, metode MV tidak dapat bekerja dengan baik sebab penggunaan nilai rata-rata pada matriks kovarians yang tidak representatif. Oleh karena itu, pengembangan matriks kovarians yang dapat merepresentasikan fluktuasi pasar dengan baik adalah masalah yang penting dalam metode MV. **Tujuan.** Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode MV dengan pendekatan *return* berbasis bilangan kompleks pada konstruksi matriks kovarians dalam optimasi portofolio. **Metode.** Penelitian ini mengusulkan metode MV Berbasis Return Bilangan Kompleks (MVBK) untuk mendapatkan bobot optimal suatu portofolio. Metode MVBK menggunakan return berbasis bilangan kompleks yang diperoleh dari hasil transformasi Hilbert terhadap *return* riil. Matriks kovarians dari return bilangan kompleks digunakan untuk mendapatkan bobot optimal dalam optimisasi MV. *Expected Return Portfolio* dan Varian Portofolio yang diperoleh dari metode MVBK dibandingkan dengan metode MV konvensional menggunakan uji *Risk Adjusted return*, uji *Sharpe Ratio*, dan uji *Omega Ratio*. **Hasil.** Kinerja portofolio metode MVBK dan MV yang diterapkan pada enam aset yang terdiri dari dua tipe indeks saham yaitu *Walmart* dan *Internatioal Business Machines Corporation*, dua tipe komoditas yaitu *Rough Rice Futures* dan Aluminium, dan dua tipe mata uang yaitu EURO/USD dan Swiss Franc (CHF)/USD periode November 2013 hingga Oktober 2023 menunjukkan bahwa metode MVBK mengungguli metode MV yang diukur dari nilai *Expected Return* portofolio, risiko portofolio, uji *Risk Adjusted Return*, uji *Sharpe Ratio*, dan uji *Omega Ratio*. **Kesimpulan.** Optimasi portofolio metode MVBK yang diusulkan memiliki kinerja yang lebih unggul dibandingkan metode MV. Metode MVBK dapat bekerja dengan baik pada berbagai koleksi *return* yang berfluktuasi.

Kata Kunci : *Mean Variance*, Portofolio, Matriks kovarians, Transformasi Hilbert, Bobot Optimal, *Mean Variance* Berbasis *Return* Bilangan Kompleks (MVBK)

ABSTRACT

Izza Anis Majidah. **Portfolio Optimization Using Mean Variance Method Based On Complex Number Return** (Supervised by Amran Rahim and Mawardi Bahri)

Background: Mean Variance (MV) is a method of determining the weight of financial assets in a portfolio by considering the amount of risk against the expected return. The MV method works well in stable financial market conditions. However, in highly volatile stock market conditions, the MV method cannot work well because of the use of average values in an unrepresentative covariance matrix. Therefore, the development of a covariance matrix that can represent market fluctuations well is an important issue in the MV method. **Aim:** This research aims to develop MV method with complex number-based return approach in covariance matrix construction in portfolio optimization. **Methods:** This research proposes the MV-Complex Based (MVCB) method to obtain the optimal weight of a portfolio. The MVCB method uses complex number-based returns obtained from the Hilbert transformation of real returns. The covariance matrix of complex number returns is used to obtain optimal weights in MV optimization. Expected Return Portfolio and Portfolio Variance obtained from MVCB method are compared with conventional MV method using Risk Adjusted return test, Sharpe Ratio test, and Omega Ratio test. **Results:** The portfolio performance of MVCB and MV methods applied to six assets consisting of two types of stock indices namely Walmart and Internatioal Business Machines Corporation, two types of commodities namely Rough Rice Futures and Aluminum, and two types of currencies namely EURO/USD and Swiss Franc (CHF)/USD for the period November 2013 to October 2023 shows that the MVCB method outperforms the MV method as measured by the portfolio Expected Return value, portfolio risk, Risk Adjusted Return test, Sharpe Ratio test, and Omega Ratio test. **Conclusion:** The proposed MVCB method portfolio optimization has superior performance compared to the MV method. The MVCB method can work well on a wide collection of fluctuating returns.

Keywords: Mean Variance (MV), Portfolio, Covariance Matrix, Hilbert Transform, Optimal Weights, Mean Variance Complex-Based (MVCB)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode *Mean Variance* (MV) merupakan suatu metode pembentukan portofolio yang memaksimalkan rata-rata keuntungan yang diharapkan atau *expected return* pada tingkat risiko tertentu. Portofolio MV dibentuk dengan menempatkan alokasi modal berdasarkan proses optimasi memaksimumkan *expected return* dan meminimumkan risiko. Hubungan antara *expected return* dengan risiko dalam metode MV berbentuk linear. Semakin tinggi nilai *expected return* portofolio MV maka semakin tinggi tingkat risikonya.

Metode MV memiliki banyak pengembangan karena memiliki beberapa keterbatasan. Pada situasi di mana kondisi pasar cenderung stabil atau fluktuasi pasar masih dalam batas yang dapat diterima, metode konvensional atau MV dapat memberikan *expected return* dan risiko yang wajar. Namun, berdasarkan penelitian Sugitomo dan Maeta (2020), sejak tahun 2013 pasar saham sangat berfluktuasi, sehingga metode MV perlu dikembangkan. Sementara itu, berdasarkan penelitian Robbani dan Jain (2016), MV bukan portofolio yang efisien untuk indeks S&P100. Artinya, dengan berinvestasi pada indeks S&P100, investor mungkin tidak akan mendapatkan return tertinggi untuk risiko tertentu atau pada risiko terendah untuk nilai return tertentu.

Salah satu konsep dalam pembentukan portofolio MV adalah matriks kovariansi. Matriks kovariansi merupakan nilai kovariansi antar aset dalam portofolio yang dinyatakan dalam bentuk matriks. Elemen diagonal matriks kovarians dapat digunakan untuk mengukur sejauh mana risiko aset pada suatu portofolio. Pembentukan matriks kovariansi pada metode MV menggunakan nilai return konvensional atau return berbentuk bilangan riil.

Penelitian yang mengkaji tentang portofolio MV telah diteliti sebelumnya, diantaranya: Markowitz (1952), ilmuwan ekonomi yang meneliti tentang investasi sehingga muncul ide untuk membuat portofolio. Dalam pembentukan portofolio, data *return* diasumsikan berdistribusi normal, kemudian dipertimbangkan pengembalian berupa return yang optimal dan mereduksi risiko. Metode *Mean varians portfolio* mencakup keuntungan yang diinginkan disertai risiko tertentu atau keuntungan bervariasi sesuai risiko.

Tobin (1958) mengusulkan investor agar dapat mereduksi risiko dengan mengikuti prinsip MV untuk memaksimalkan keuntungan. Berdasarkan aturan efisiensi MV, investor rasional akan melakukan pemilihan portofolio yang memberikan pengembalian tertinggi dengan risiko tertentu atau risiko terendah untuk pengembalian tertentu.

Fisher dan Statman (1997) meneliti tentang kerangka kerja optimasi mean-varians Markowitz. Portofolio MV merupakan model standar konstruksi portofolio akan tetapi jarang digunakan investor karena model ini sangat dibatasi sehingga portofolio lebih mencerminkan batasan daripada optimasi. Selain itu, tujuan investor sangat berbeda dari optimasi portofolio MV. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa portofolio yang dioptimalkan melalui metode MV tidak intuitif karena portofolio tersebut tidak mencerminkan preferensi investor.

Penelitian Kurbatsky et al. (2014) membahas tentang *signal processing* dan *machine learning* dimana data yang telah ditransformasi menggunakan transformasi Hilbert, dapat menangkap menangkap pola aset dinamis. Uchiyama et al. (2019) adalah peneliti pertama yang memasukkan informasi aset dinamis ke dalam portofolio pengoptimalan dengan pendekatan *Complex Valued Risk Diversification* (CVRD). Hasil penelitian menunjukkan bahwa Kinerja konstruksi portofolio *CVRD* lebih unggul dibandingkan dengan kinerja konstruksi portofolio *Risk Parity* (RP) dan *Maximum Risk Diversification* (MRD). Rigamonti (2020) meneliti perbandingan MV dengan *mean semi-variance*. Hasil penelitian Rigamonti menunjukkan seberapa baik optimasi portofolio MV bekerja. Li et al. (2022) meneliti tentang mean-variance (MV) menggunakan teori matriks dimensi besar. Istilah "matriks dimensi besar" mengacu pada matriks dengan dimensi besar dan ukuran data yang besar. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimasi yang dikonversi secara spektral memberikan hasil yang lebih baik dalam hal risiko dan keuntungan portofolio.

Nilai return dapat dikonversi menjadi return kompleks melalui transformasi hilbert. Uchiyama et al. (2019) menyatakan bahwa metode dengan return kompleks dalam pembentukan matriks kovarians lebih stabil terhadap fluktuasi yang terjadi, karena nilai matriks kovariansnya lebih rendah, dibandingkan dengan metode yang menggunakan return konvensional atau return riil. Uchiyama et al. menunjukkan bahwa metode dengan return kompleks memberikan keuntungan yang lebih tinggi dan kerugian yang lebih rendah daripada metode yang menggunakan *return* riil. Sugitomo et al. (2020) menggunakan return bilangan kompleks dalam konstruksi return quaternion untuk menentukan bobot optimum suatu portofolio. Penelitian Sugitomo menunjukkan bahwa penggunaan return kompleks dalam bentuk quaternion memberikan kinerja yang lebih baik dibandingkan dengan pendekatan return bilangan riil.

Dimensi return bilangan kompleks memiliki dua komponen yaitu komponen riil dan imajiner. Kedua komponen return bilangan kompleks dapat mengidentifikasi pola siklus yang tersembunyi dalam data aset yang mungkin tidak terlihat pada *return* bilangan riil. Kedua komponen return bilangan kompleks dapat mengungkap pola *return* lebih detil. Pendekatan optimasi portofolio berbasis *return* bilangan kompleks merupakan pengembangan baru dari sejarah konstruksi portofolio metode MV.

Sejauh ini belum ditemukan adanya penelitian yang menggunakan return bilangan kompleks pada metode MV. Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini mengusulkan metode *Mean Variance* Berbasis Return Bilangan Kompleks (MVBK) yang dikembangkan dari penelitian Uchiyama et al. Penelitian ini menggunakan MV yang mentransformasi return riil menjadi return kompleks dengan menggunakan transformasi Hilbert untuk membangun portofolio MV yang optimal dan kemudian menemukan alokasi aset dinamisnya. Penelitian yang diusulkan berjudul “Optimasi Portofolio Menggunakan Metode Mean Variance Berbasis Return Bilangan Kompleks”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut :

1.2.1 Bagaimana konstruksi portofolio optimal menggunakan metode *Mean Variance* Berbasis Return Bilangan Kompleks (MVBK)?
1.2.2 Bagaimana perbandingan kinerja optimasi portofolio menggunakan metode MV dengan metode MVBK?

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

1.3.1 Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh optimasi portofolio menggunakan metode *Mean Variance* Berbasis Return Bilangan Kompleks (MVBK) dan perbandingan hasil antara optimasi portofolio menggunakan metode MVBK dengan metode MV.
1.3.2 Manfaat penelitian pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Sebagai kontribusi dalam perkembangan dan kemajuan ilmu matematika pada umumnya dan matematika keuangan, aktuaria, dan ekonomi pada khususnya.
b. Sebagai salah satu rujukan bagi investor.
c. Sebagai referensi kepada pembaca yang ingin melakukan penelitian yang terkait dengan investasi atau kontruksi portofolio MV optimal.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1.4.1 Jumlah aset yang digunakan dalam portfolio sebanyak enam yang terdiri dari dua tipe indeks saham yaitu *Walmart* dan *Internatioal Business Machines Corporation*, dua tipe komoditas yaitu *Rough Rice Futures* dan Aluminium, dan dua tipe mata uang yaitu EURO/USD dan Franc Swiss(CHF)/USD.
1.4.2 Data aset yang digunakan dalam portofolio memiliki return yang dapat dihampiri dengan distribusi normal.
1.4.3 Konversi return riil ke return kompleks menggunakan transformasi Hilbert diskrit.

1.5 Teori

1.5.1 Mean Variance Portofolio

Landasan teori portofolio Markowitz (1952) adalah pendekatan mean dan standar deviasi. Nilai mean mengukur *expected return* dan nilai standar deviasi mengukur risiko. Sehingga model portofolio Markowitz disebut model portofolio Mean-Variance (MV). Untuk memilih dan membangun portofolio yang optimal, model ini sangat menekankan upaya untuk memaksimalkan return yang diharapkan dan meminimalkan risiko (Hilmi & Gubu, 2024).

Investor yang rasional selalu mencari portofolio yang memiliki risiko minimum untuk tingkat pengembalian tertentu atau portofolio yang memiliki pengembalian tertinggi untuk tingkat risiko tertentu. Ini menunjukkan bahwa beberapa investor mungkin ingin meminimalkan risiko sementara yang lain mungkin memutuskan untuk memaksimalkan keuntungan. Keputusan ini, tentu saja, bergantung pada strategi keseluruhan investor tergantung pada toleransi risiko dan tujuan investasinya. Untuk mencapai efisiensi ini, investor melakukan keputusan yang hati-hati mengenai alokasi aset mereka (Robbani dan Jain, 2016).

Selama beberapa dekade terakhir, teori keuangan telah berkembang secara signifikan dan tersedia banyak pengetahuan untuk aplikasi praktis. Literatur keuangan telah dikhususkan untuk membangun teori yang masuk akal tentang varians minimum portofolio yang juga dikenal sebagai perbatasan efisien. Perbatasan yang efisien ditentukan dengan meminimalkan risiko pada tingkat pengembalian yang diharapkan. Dengan demikian untuk mencapai efisien perbatasan pada setiap tingkat pengembalian, risiko untuk setiap tingkat pengembalian tersebut harus diminimalkan tergantung pada kondisi jumlah proporsi yang diinvestasikan tersebut dalam semua aset sama dengan satu (Markowitz, 1952).

Portofolio optimal dilakukan berdasarkan perhitungan model Markowitz, dengan langkah-langkah yang dilakukan antara lain:

1.5.1.1 Realized Return

Return adalah salah satu tujuan investor dalam berinvestasi, karena dengan melihat *return,* investor dapat melihat hasil investasi yang dimana investasi tersebut menguntungkan atau merugikan (Mulyati & Murni, 2018). Sedangkan, *Realized return* adalah persentase perubahan harga penutupan aset. Persamaan (1) menunjukkan cara menghitung *realized return* aset:

$$r_{t(i)} = \frac{P_{t(i)} - P_{t-1(i)}}{P_{t-1(i)}} \tag{1}$$

dengan:

$r_{t(i)}$: *Return* aset ke-i pada waktu ke- $t, t = 1, \dots, T$ dan $i = 1, \dots, N,$ T menyatakan banyaknya waktu pengamatan dan N menyatakan banyaknya aset yang termasuk dalam portofolio.

$P_{t(i)}$: *Closing price* aset ke-i pada waktu ke- $t.$

$P_{t-1(i)}$: C*losing price* aset ke-i pada waktu ke-$(t-1)$.

Selanjutnya return portofolio sebagai berikut:

$$R_t = \sum_{i=1}^{N} w_i r_{t(i)} \tag{2}$$

dengan:

R_t : Return portofolio waktu ke-t.

w_i : Bobot koefisien portofolio untuk aset ke-*i*.

$R_{t(i)}$: *Return* aset ke-$i,$ waktu ke-t.

1.5.1.2 Matriks kovariansi

Di sektor keuangan, risiko selalu signifikan karena memengaruhi perdagangan, yang bergantung pada penetapan harga risiko pasar dan efektivitas teknik investasi yang berbeda. Di sektor keuangan, khususnya dalam optimasi portofolio, risiko diwakili oleh matriks kovariansi dalam konteks ini. Volatilitas pasar yang lebih besar ditunjukkan oleh nilai kovariansi yang tinggi, sementara nilai kovariansi yang menurun menunjukkan hal yang sebaliknya.

Matriks kovariansi digunakan oleh hampir semua teknik desain portofolio untuk mengestimasi risiko portofolio dan berfungsi sebagai fungsi tujuan optimasi (Sugitomo dan Maeta, 2020). Persamaan (3) menunjukkan cara menghitung matriks kovariansi (Uchiyama, et al., 2019):

$$\sum = E[(R_{t(i)} - E[R_i])(R_{t(l)} - E[R_l])^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

dengan:

$\sum$: matriks varinsi-kovariansi return i (R_i) dan return l (R_l)

$R_{t(i)}$: *Return* aset i

$R_{t(l)}$: *Return* aset l

$E(R_i)$: Nilai *expected return* aset i

$E(R_l)$: Nilai *expected return* aset l

1.5.1.3 Membuat proporsi saham atau bobot

Portofolio yang efisien dicapai melalui proses optimalisasi MV menggunakan fungsi Lagrange sebagai berikut (Basuki, et al., 2016):

$$\text{Maks } (2\tau\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \sum \boldsymbol{w}) \quad (4)$$

dengan kendala

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{w} = 1 \quad (5)$$

dengan $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}} = (1,1, \dots, 1)$, $\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu}$, dan $\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{w}$ dan parameter τ menyatakan nilai toleransi risiko. Fungsi Lagrange dari persamaan (4), dengan λ adalah kostanta pengganda, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{w}, \lambda) = (2\tau\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\textstyle\sum\boldsymbol{w}) + \lambda(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e} - 1) \quad (6)$$

Pehitungan bobot optimal didapatkan dengan penurunan Persamaan (6) terhadap $\boldsymbol{w}$ $\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = 0\right)$ dan λ $\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0\right)$. Turunan dari suatu fungsi bernilai 0 di titik tertentu jika fungsi tersebut mencapai nilai maksimum.

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = 0 \\ 2\tau\boldsymbol{\mu} - 2\textstyle\sum\boldsymbol{w} + \lambda\boldsymbol{e} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e} - 1 = 0 \end{gathered} \quad (7)$$

Kemudian, persamaan (7) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{gathered} 2\tau\boldsymbol{\mu} - 2\textstyle\sum\boldsymbol{w} + \lambda\boldsymbol{e} = 0 \\ 2\textstyle\sum\boldsymbol{w} = 2\tau\boldsymbol{\mu} + \lambda\boldsymbol{e} \end{gathered}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\Sigma^{-\mathbf{1}}(2\tau\boldsymbol{\mu} + \lambda\boldsymbol{e}) \quad (8)$$

Subtitusi persamaan (8) ke persamaan (5) diperoleh

$$\boldsymbol{e^T}\left(\frac{1}{2}\Sigma^{-\mathbf{1}}(2\tau\boldsymbol{\mu} + \ \lambda\boldsymbol{e})\right) = 1$$

$$\boldsymbol{e^T}\left(\tau\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\lambda\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}\right) = 1$$

$$\tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e} = 1$$

$$\frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e} = 1 - \tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}$$

$$\lambda = \frac{1 - \tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}}{\frac{1}{2}\ \boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}}$$

$$\lambda = \frac{2 - 2\tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}} \qquad (9)$$

Subtitusi Persamaan (9) ke Persamaan (8) diperoleh

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\Sigma^{-\mathbf{1}}(2\tau\boldsymbol{\mu} + \left(\frac{2 - 2\tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}}\ \right)\boldsymbol{e})$$

$$\boldsymbol{w} = \tau\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e} - \tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}\,\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}}$$

$$\boldsymbol{w} = \tau\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu} + \frac{\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e^T}\ \Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}} - \frac{\tau\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}\,\Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e^T}\ \Sigma^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{e}}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e} + \tau\left\{\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{e^T}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}\right\};\ \tau \geq 0 \qquad (10)$$

dengan :

$\boldsymbol{w}$: Vektor bobot masing-masing aset
$\Sigma^{-\mathbf{1}}$: Invers matriks kovarians
$\boldsymbol{\mu}$: Vektor rata-rata
$\boldsymbol{e}$: Vektor 1 sebanyak jumlah aset
τ : konstanta toleransi risiko

Pada saat $\tau = 0$ persamaan (10) menghasilkan portofolio variansi minimum seperti yang ditunjukkan persamaan (11) berikut:

$$\boldsymbol{w}^{Min} = \frac{1}{\boldsymbol{e}^T\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}}\Sigma^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e} \qquad (11)$$

dengan :
$\boldsymbol{w}^{Min}$: Bobot minimum yaitu ketika $\tau = 0$
$\sum^{-1}$: Invers matriks kovarians
$\boldsymbol{e}$: Vektor 1 sebanyak jumlah aset

Pendekatan model Markowitz dalam persoalan optimisasi memiliki beberapa keuntungan, yaitu:

- Toleransi risiko τ ditentukan
- Keuntungan (μ_i) dan risiko (σ_{ij}) yang diperlukan dari *return* aset (Basuki, et al., 2016).

1.5.1.4 Expected Return Portofolio

Return harapan portofolio atau *expected return portfolio* $(E[R_p])$ merupakan rata-rata dari seluruh hasil yang mungkin diperoleh, dengan asumsi bahwa beberapa hasil memiliki peluang yang lebih besar terjadi dibandingkan dengan hasil yang lain dari berbagai skenario investasi (Basuki, et al., 2016), dihitung dengan menggunakan persamaan (12) berikut:

$$E[\boldsymbol{R_p}] = \boldsymbol{w^T \mu_i} = \sum_{i=1}^{N} w_i . E[R_i] \qquad (12)$$

dengan:
$E[\boldsymbol{R_p}]$: *Expected return* portofolio
$\boldsymbol{w^T}$: Vektor transpos koefisien bobot
w_i : Proporsi dana saham ke i
$E[R_i]$: Rata-rata saham ke i.

1.5.1.5 Variansi Portofolio

Variansi merupakan ukuran rata-rata selisih kuadrat antara *return* aktual dengan rata-rata *return*. Jika nilai variansi semakin besar, maka selisih *return* aktual dengan rata-rata *return* semakin besar, begitupun sebaliknya (Basuki, et al., 2016). Variansi portofolio optimal dihitung dengan menggunakan persamaan (13) (Rosadi, et al., 2020):

$$\sigma^2 = \boldsymbol{w^T} \sum \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} w_i w_l \sigma_{il} \qquad (13)$$

dengan:
σ^2 : Variansi portofolio
$\boldsymbol{w}$: Vektor koefisien bobot
w_i : Bobot saham ke-i
w_l : Bobot saham ke-l
σ_{il} : $cov(r_i, r_l)$.

1.5.1.6 Risiko Portofolio

Risiko merupakan ukuran penyimpangan antara *expected return* dengan tingkat pengembalian yang diperoleh. Semakin jauh penyimpangannya berarti semakin besar risikonya (Mulyati & Murni, 2018). Risiko pada aset terdiri dari dua hal, yaitu risiko sistematis dan risiko tidak sistematis. Risiko sistematis atau risiko pasar merupakan faktor risiko yang memengaruhi pasar secara keseluruhan. Pergerakan harga saham tertentu pada risiko sistematis akan dipengaruhi oleh pergerakan bursa saham secara keseluruhan. Risiko ini tidak dapat di kontrol oleh investor, serta tidak dapat dihilangkan melalui portofolio. Sementara itu, risiko tidak sistematis atau *specific risk* merupakan risiko bahwa kejadian tertentu yang terjadi pada industri atau perusahaannya yang kemudian akan memengaruhi harga saham perusahaan tersebut. Risiko tidak sistematis dapat dikurangi oleh investor pada suatu investasi saham dengan melakukan pembentukan portofolio saham (Kewal, 2013).

Risiko portofolio, volatilitas, atau standar deviasi portofolio (σ_p) merupakan rata-rata tertimbang dari standar deviasi aset pembentuk portofolio. Risiko portofolio dihitung dengan menggunakan persamaan (14) berikut:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2} \tag{14}$$

dengan.

σ_p : Standar deviasi portofolio

σ^2 : Variansi portofolio.

1.5.2 Uji Performa Portofolio

1.5.2.1 Uji *Risk Adjusted Return*

Perhitungan keuntungan atau potensi keuntungan suatu investasi yang mempertimbangkan tingkat risiko yang terlibat dalam memperoleh keuntungan tersebut dikenal sebagai pengembalian yang disesuaikan dengan risiko. Metode standar untuk mengevaluasi kinerja portofolio adalah *Risk-Adjusted Return*. Persamaan (15) menunjukkan cara menghitung *Risk Adjusted Return*:

$$Risk\ Adjusted\ Return = \frac{E[\boldsymbol{R_p}]}{\sigma_p} \tag{15}$$

dengan:

$E[\boldsymbol{R_p}]$: *Expected return* portofolio

σ_p : Standar deviasi portofolio

1.5.2.2 Uji Sharpe Ratio

Uji *Sharpe Ratio* pertama kali diperkenalkan oleh Sharpe pada tahun 1966. Rasio ini dihitung sebagai return portofolio dikurangi return tingkat bebas risiko atau yang disebut kelebihan return terhadap risiko portofolio, yang ditandai dengan volatilitasnya (Gunning & Vuuren, 2020).

Sharpe Ratio mengukur hubungan antara return dengan volatilitas (Guo et al., 2017). Namun, *Sharpe Ratio* memiliki beberapa kekurangan, yaitu jika kinerja standar deviasi atau volatilitas buruk, maka akan menyebabkan buruknya kinerja *Sharpe Ratio* (Kapsos et al., 2014). Persamaan (16) merupakan bentuk Uji *Sharpe Ratio*:

$$Sharpe\ Ratio = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p} \tag{16}$$

dengan:
$E[R_p]$: *Expected return* portofolio
R_f : *Risk free rate*
σ_p : Standar deviasi rortofolio.

1.5.2.3 Uji Omega Ratio

Omega Ratio digunakan karena dapat mencakup semua informasi statistik dari portofolio (Guo et al., 2017). *Omega Ratio* adalah rasio tertimbang probabilitas dari keuntungan versus kerugian terhadap suatu prospek atau rasio upside return (baik) dibandingkan dengan downside return (buruk). *Omega Ratio* menawarkan representasi yang komprehensif dari atribut risk-return dalam distribusi hasil investasi (Keating & Shadwik, 2002). Mereka menyarankan metrik yang mempertimbangkan keuntungan dan kerugian tertimbang probabilitas (Malhotra et al., 2023). Persamaan (17) menunjukkan uji *Omega Ratio* (Yu et al., 2022) :

$$\omega = \frac{E[R_p] - AB}{E[R_t]^+} + 1 \tag{17}$$

dengan:
ω : Uji Omega Ratio
$E(R_p)$: Expected Return Portfolio
AB : Ambang batas *return* yang ditentukan oleh investor
$E[R_t]^+$: Rata-rata nilai mutlak R_t < 0.

1.5.3 Bilangan Kompleks

Definisi dan rumus *euler* bilangan kompleks diuraikan sebagai berikut:

Definisi 1
Suatu bilangan kompleks z dapat dikatakan sebagai bilangan kompleks jika dapat ditulis sebagai $z = a + ib$ dengan a dan b adalah bilangan riil dan i adalah unit imajiner dengan $i^2 = -1$.
Jika nilai $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka $z = a + ib$, merupakan bagian riil dari bilangan kompleks. Jika nilai $a = 0$ dan $b \neq 0$ maka $z = a + ib$, merupakan bilangan imajiner murni. Bilangan kompleks disimbolkan dengan $\mathbb{C}$, sehingga $z \in \mathbb{C}$. (Zetriuslita, 2014).

$$z = \{z | z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Rumus euler bilangan kompleks diuraikan dari deret tak berhingga berikut:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

jika $x = i\theta$ maka $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$. Kemudian suku-suku deret tersebut dipisahkan berdasarkan pangkat n. Suku-suku dengan pangkat genap $n = 2k$, dengan k adalah bilangan asli, diperoleh:

$$\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} = \frac{i^{2k}\theta^{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}$$

Suku-suku pangkat genap dari deret Taylor dinyatakan sebagai $cos(\theta)$ sedangkan, suku-suku dengan pangkat ganjil $n = 2k + 1$, dengan k adalah bilangan asli, diperoleh:

$$\frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{i^{2k+1}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{i(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

suku-suku dengan pangkat ganjil dari deret Taylor untuk $sin(\theta)$.Selanjutnya kedua suku digabungkan diperoleh:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + i\,\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sehingga

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i\, sin(\theta) \qquad (18)$$

persamaan (18) dinamakan persamaan *Euler*. Selanjutnya, persamaan (18) diperumum menjadi:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\, sin\, y)$$

untuk $y = 0$ diperoleh e^x(Martono, 1987).

1.5.4 Transformasi Hilbert

Transformasi Hilbert memainkan peran penting dalam bidang sains dan teknologi seperti optik, gelombang dalam fluida bertingkat, pemprosesan sinyal dan sebagainya (Zhou et al., 2009).

Definisi 2

Transformasi Hilbert suatu fungsi dari deret waktu $u(t)$, dengan $u(t)$ adalah sinyal *real*, pada $t \in [0, \infty)$ dapat dianggap sebagai konvolusi $u(t)$ dengan kernel cauchy $\mathrm{h(t)} = \frac{1}{\pi \mathrm{t}}$. Pengintegralan $\frac{1}{t}$ pada $t = 0$ tidak dapat diintegralkan, sehingga integral yang menentukan konvolusi tidak selalu konvergen. Akan tetapi, transformasi Hilbert didefinisikan dengan menggunakan prinsip utama cauchy (notasi $p.v$), yang menjamin keberadaan hasil integral.

Secara eksplisit, transformasi Hilbert dari suatu fungsi (atau sinyal) $u(t)$ diberikan oleh:

$$\mathcal{H}[u(t)] = (u(t) * h(t))(t)$$

$$= \int_0^{\infty} u(\tau)\,.\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} u(\tau)\,.\,\frac{1}{\pi(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{u(\tau)}{\pi(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi} p.v \int_0^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

deret waktu empiris dikoleksi di setiap interval waktu dengan durasi Δt yang menghasilkan waktu diskrit $t_n = n\Delta t$ dengan n adalah bilangan bulat. Transformasi Hilbert untuk deret waktu diskrit diberikan oleh:

$$\mathcal{H}_D[x_i] =- j\, sgn(j - \frac{N}{2}) \sum_{t=0}^{T-1} x_{i,t} e^{j\frac{2\pi t}{N}} \tag{19}$$

dengan:

$\mathcal{H}_D[x_i]$	: Transformasi Hilbert untuk deret waktu diskrit pada aset ke-i
x_i	: Vektor observasi pada aset ke-i
j	: Akar kuadrat dari (-1)
$sgn\left(j - \frac{N}{2}\right)$	: Fungsi tanda (signum) bernilai 1 jika $\left(j - \frac{N}{2}\right)$ positif dan (-1) jika $\left(j - \frac{N}{2}\right)$ negatif
$x_{i,t}$	: Data deret waktu aset ke-i pada waktu ke-t
$e^{j\frac{2\pi t}{N}}$	: Eksponensial bilangan kompleks yang digunakan dalam proses transformasi Hilbert yang melibatkan j dan $\frac{2\pi t}{N}$, di mana t adalah indeks waktu diskrit dan N adalah banyaknya deret waktu diskrit.

Transformasi Hilbert diterapkan pada Persamaan (19) di *return* portofolio pada Persamaan (2) dan kemudian diperoleh sinyal analitik, sebagai berikut (Uchiyama et al., 2019):

$$z_{i,t} = r_{i,t} + j\mathcal{H}_D[r_i] \tag{20}$$

dengan:

$z_{i,t}$	: Sinyal analitik yang dihasilkan. Sinyal analitik adalah representasi sinyal kompleks dari sinyal real
$r_{i,t}$	: Nilai return riil aset ke-i pada periode waktu ke-t.
$\mathcal{H}_D[r_i]$	: Nilai transformasi Hilbert pada aset ke-i.

1.5.5 Portofolio Investasi Saham

Investasi dilakukan dengan berbagai cara, seperti membeli aset-aset riil seperti emas, tanah, dan bangunan serta membeli surat-surat berharga di pasar modal. Pasar modal adalah pasar untuk surat berharga jangka panjang (lebih dari satu tahun). Contoh surat berharga yang diperjualbelikan di pasar modal adalah reksadana, saham, obligasi, dan lainnya. Investasi di pasar modal memiliki peran penting dalam perekonomian, yakni memungkinkan perusahaan maupun pemerintah mendapatkan dana dengan memperdagangkan surat berharga. Bursa Efek Jakarta (BEJ) dan Bursa Efek Surabaya (BES) merupakan pasar modal pertama di Indonesia dan pada tahun 2007 bergabung membentuk Bursa Efek Indonesia (BEI).

Berdasarkan prinsip ekonomi, terdapat prinsip *high risk, higher return*, atau keuntungan lebih besar memiliki risiko lebih tinggi, atau risiko lebih rendah memiliki keuntungan lebih rendah. Sehingga investor melakukan diversifikasi dalam berinvestasi, yakni pembentukan portofolio yang terdiri dari sejumlah aset. Akibat dari dilakukannya diversifikasi adalah pada saat salah satu aset mengalami penurunan harga, investor tetap memperoleh keuntungan dari aset-aset lain dalam portofolionya. Penentuan proporsi bobot masing-masing aset dalam suatu portofolio umumnya dilakukan dengan pendekatan matematis yang pertama kali dikemukakan oleh Markowitz, dan dikenal sebagai teori *mean-variance*. Teori ini menghitung risiko investasi yang diukur melalui nilai ragam (*variance*) dari tingkat pengembalian (*return*) (Setiawan & Rosadi, 2019).

1.5.6 Distribusi Normal

Pengujian asumsi distribusi normal dalam metode MV dilakukan pada *return* setiap aset untuk dapat menggunakan rasio mean terhadap variansi return aset. Rasio mean terhadap variansi ini menghasilkan nilai variansi yang megoptimumkan mean return. Pengujian distribusi return menggunakan uji normalitas Shapiro Wilk (Shapiro & Wilk, 1965).

Fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal dengan rata-rata dan standar deviasi sebagai berikut (Hermansah, 2017):

$$f(x_{i,t}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_{i,t}-\mu}{2}\right]^2}$$

dengan:

$f(x_{i,t})$: Fungsi kepadatan peluang distribusi normal
σ : Standar deviasi aset
π : Konstanta ≈ 3.14…
$x_{i,t}$: Data observasi aset ke-i pada waktu ke-t
μ : Rata-rata aset.

Pengujian distribusi normal disebut uji normalitas. Berdasarkan penelitian Sintia et al., 2022 bahwa uji normalitas yang menghasilkan tingkat konsistensi terbaik adalah uji Shapiro-Wilk, selanjutnya Kolmogorov-Smirnov, dan yang memiliki konsistensi terendah adalah uji Anderson-Darling. Bedasarkan hal tersebut, penelitian ini menggunakan uji Shapiro Wilk untuk uji distribusi normalitas return setiap aset.

Metode Shapiro-Wilk ditemukan pertama kali oleh Samuel Stanford Shapiro dan Martin Wilk di tahun 1965. Metode ini didapat sebagai alternatif prosedur statistik yang menguji sampel lengkap untuk uji normalitas. Statistik uji diperoleh dengan membagi kuadrat dari kombinasi linear yang sesuai dari sampel statistik terurut dengan estimasi variansi simetris yag biasa (Sintia et al., 2022). Uji Shapiro Wilk ditunjukkan oleh Persamaan (21) berikut:

$$SW = \frac{1}{D}\left[\sum_{t=1}^{T} a_i (x_{t-q+1} - x_{i,t})\right]^2 \tag{21}$$

Dimana

$$D = \sum_{i=1}^{N} (x_{i,t} - \mu_i)^2$$

SW : Uji Shapiro Wilk
a : Koefisien uji Shapiro Wilk
$x_{i,t}$: Data aset ke-i pada waktu ke-t
μ_i : Rata-rata aset ke-i
x_{t-q+1} :Jarak data aset dengan distribusi normal baku.

BAB II
METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian pada penelitian ini adalah menggunakan penelitian kuantitatif yaitu penelitian ilmiah yang secara sistematis terhadap bagian-bagian dan fenomena serta kausalitas hubungan-hubungannya terkait portofolio MV.

2.2 Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang didapatkan dari *website investing.com*. Data yang diambil berupa data harga penutupan (*closing price*) mulai dari November 2013 hingga Oktober 2023.

2.3 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di kampus Universitas Hasanuddin Makassar, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan April 2023 hingga Mei 2024.

2.4 Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang digunakan pada penelitian ini *return* harga penutupan indeks pasar saham.

2.5 Langkah Analisis

Langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Mencari data aset bulanan selama 10 tahun, yaitu :

Tabel 1. Penomoran aset penelitian

No. aset	Nama Aset
1	EUR USD
2	Franc Swiss (CHF) USD
3	Walmart
4	International Business Machiness (IBM)
5	Rice
6	Aluminium

Sumber : *investing.com*, 2023.

2. Menghitung *realized return* aset ke-i

$$r_{t(i)} = \frac{P_{t(i)} - P_{t-1(i)}}{P_{t-1(i)}}$$

dengan :

$r_{t(i)}$: *Return* aset ke-i, $i = 1, \ldots, 6$, dan $t = 1, \ldots, 119$

$P_{t(i)}$: *Closing price* aset ke-i pada hari ke-t

$P_{t-1(i)}$: *Closing price* aset ke-i pada hari ke-$(t-1)$.

3. Statistik deskriptif return

Uji Distribusi Normal

$$SW = \frac{1}{D}\left[\sum_{t=1}^{T} a_i(x_{t-q+1} - x_{i,t})\right]^2$$

dimana $D = \sum_{i=1}^{N}(x_{i,t} - \mu_i)^2$

dengan:

SW : Uji Shapiro Wilk

a : Koefisien uji Shapiro Wilk

$x_{i,t}$: Data aset ke-i pada waktu ke-t

μ_i : Rata-rata aset ke-i

x_{t-q+1} :Jarak data aset dengan distribusi normal baku.

Rata-Rata

$$E(R_i) = \frac{\sum r_{t(i)}}{T} \tag{22}$$

dengan:

$E(R_i)$: *Expected Return* aset ke-i

$r_{t(i)}$: *Return* aset ke-i

T : Banyaknya waktu pengamatan

Standar Deviasi

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{[(r_{t(i)} - E(R_i))^2]}{T}} \tag{23}$$

dengan:

σ_i : Standar Deviasi aset ke-i

$r_{t(i)}$: Nilai *return* saham ke- i periode ke-t, $t = 1, \ldots, 119$

$E(R_i)$: E*xpected return* aset ke-i

T : Banyaknya waktu pengamatan

4. Mentransformasi *realized return* menjadi *realized return* kompleks dengan menggunakan transformasi Hilbert

Transformasi Hilbert

$$\mathcal{H}_D[x_i] =- j\,sgn(j - \frac{N}{2}) \sum_{t=0}^{T-1} x_{i,t} e^{j\frac{2\pi t}{N}}$$

dengan :

$\mathcal{H}_D[x_i]$: Transformasi Hilbert untuk deret waktu diskrit pada aset ke-i

x_i : Vektor observasi pada aset ke-i

j : Akar kuadrat dari (-1)

$sgn\left(j-\frac{N}{2}\right)$: Fungsi tanda (signum) bernilai 1 jika $\left(j-\frac{N}{2}\right)$ positif dan (-1) jika $\left(j-\frac{N}{2}\right)$ negatif

$x_{i,t}$: Data deret waktu aset ke-i pada waktu ke-t

$e^{j\frac{2\pi t}{N}}$: Eksponensial bilangan kompleks yang digunakan dalam proses transformasi Hilbert yang melibatkan j dan $\frac{2\pi t}{N}$, di mana t adalah indeks waktu diskrit dan N adalah banyaknya deret waktu diskrit.

Return Kompleks melalui transformasi hilbert sebagai berikut:

$$z_{i,t} = r_{i,t} + j\mathcal{H}_D[r_i]$$

dengan :

$z_{i,t}$: Sinyal analitik aset ke-i pada waktu ke-t

$r_{i,t}$: Nilai return real aset ke-i pada waktu ke-t

$\mathcal{H}_D[r_i]$: Trasformasi Hilbert pada aset ke-i

5. Menghitung matriks kovariansi

$$\sum = E[(R_{t(i)} - E[R_i])(R_{t(j)} - E[R_j]^T]$$

dengan :

$\sum = \sigma_{il}$: Matriks kovarians

$R_{t(i)}$: *Return* aset ke-i pada periode ke-t,

$R_{t(l)}$: *Return* aset ke-l pada periode ke-t,

$E(R_i)$: Rata-rata aset ke-i

$E(R_l)$: Rata-rata aset ke-l

6. Menghitung bobot optimal

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\boldsymbol{e^T}\sum^{-1}\boldsymbol{e}}\sum^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\tau}\left\{\sum^{-1}\boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{e^T}\sum^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{e^T}\sum^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}}\sum^{-1}\boldsymbol{e}\right\};\ \tau \geq 0$$

dengan :

$\boldsymbol{w}$: Vektor Bobot

$\boldsymbol{e^T}$: $(1,1,\dots,1,1)$

$\sum^{-\mathbf{1}}$: Invers Matriks kovarians

$\boldsymbol{\mu}$: Vektor Rata-Rata

τ : Toleransi Risiko

7. Menghitung *Expected Return* Portofolio

$$E[R_p] = \boldsymbol{w^T}\boldsymbol{\mu_i} = \sum_{i=1}^{N} w_i.\,E[R_i]$$

dengan :

$E[R_p]$: *Expected Return* portofolio

$\boldsymbol{w^T}$: Vektor transpos bobot

w_i : Bobot Aset ke i

$E[R_i]$: Rata-rata aset ke i.

8. Menghitung Variansi Portofolio

$$\sigma^2 = \boldsymbol{w^T} \sum \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} w_i w_l \sigma_{il}$$

dengan :

σ^2 : Variansi portofolio

$\boldsymbol{w}$: Vektor bobot

w_i : Bobot aset ke-i

w_j : Bobot aset ke-l

$\sum$: Matriks kovarians

9. Menghitung Risiko Portofolio

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2}$$

dengan :

σ_p : Standar deviasi portofolio

σ^2 : Variansi portofolio.

10. Menghitung aset dinamis portofolio
11. Menghitung return portofolio

$$R_t = \sum_{i=1}^{n} w_i r_{t(i)}$$

dengan :

R_t : Return Portofolio

w_i : Bobot aset ke-i

$r_{t(i)}$: *Return* aset ke-i.

12. Uji performa portofolio

Uji *Risk Adjusted-Return*

$$Risk\ Adjusted\ Return = \frac{E[R_p]}{\sigma_p}$$

dengan :

$E[R_p]$: E*xpected return* portofolio

σ_p : Standar deviasi portofolio

Uji *Sharpe Ratio*

$$Sharpe\ Ratio = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p}$$

dengan :

R_p : *Expected return* portofolio

R_f : *Risk free rate*

σ_p : Standar deviasi portofolio.

Uji *Omega Ratio*

$$\omega = \frac{E[R_p] - \mathrm{T}}{E[\mathrm{T} - r]^+} + 1$$

dengan :

ω : Uji Omega Ratio

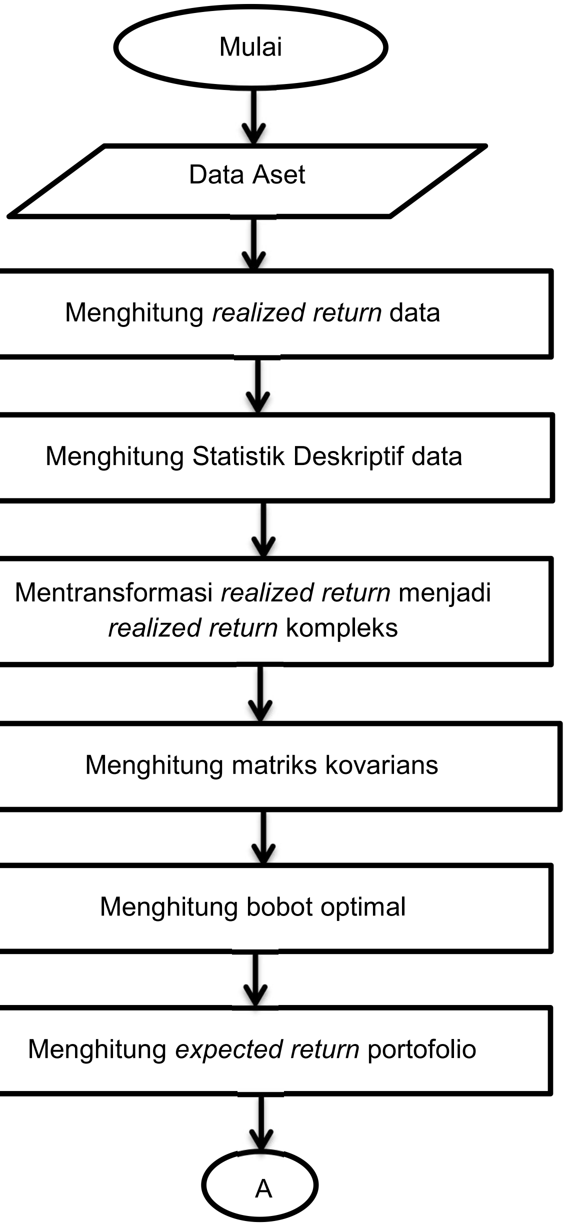
$E(R_p)$: Expected Return Portfolio

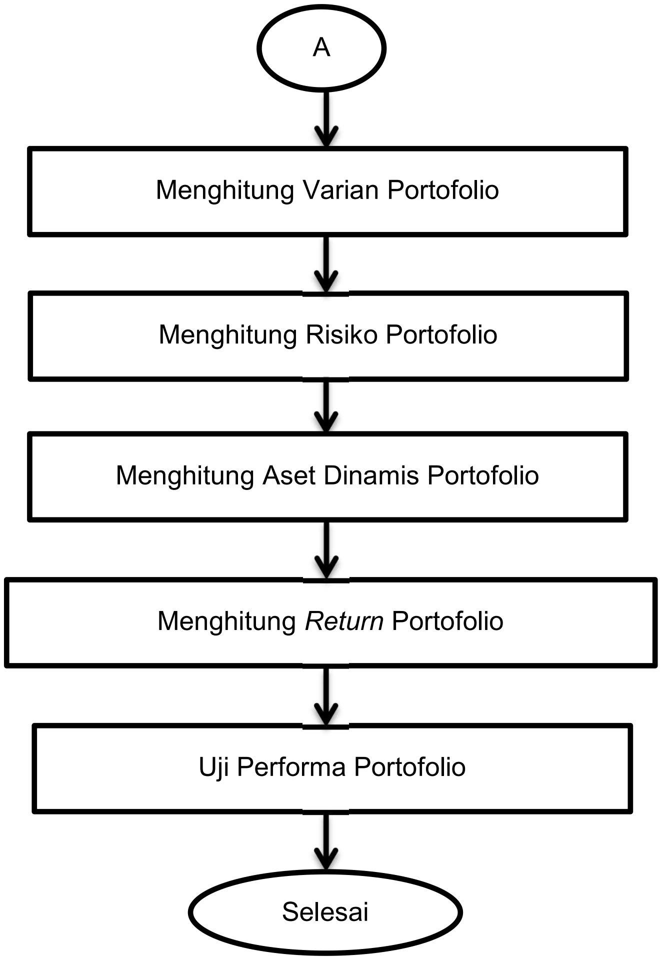
AB : Ambang batas *return* yang ditentukan oleh investor

$E[R_t]^+$: Rata-rata nilai mutlak untuk R_t < 0.

2.6 Diagram Alur Penelitian

Dalam penelitian ini, digunakan alur penelitian untuk memudahkan peneliti dalam melakukan penelitian. Alur penelitiannya sebagai berikut :




A
Menghitung Varian Portofolio
Menghitung Risiko Portofolio
Menghitung Aset Dinamis Portofolio
Menghitung *Return* Portofolio
Uji Performa Portofolio
Selesai