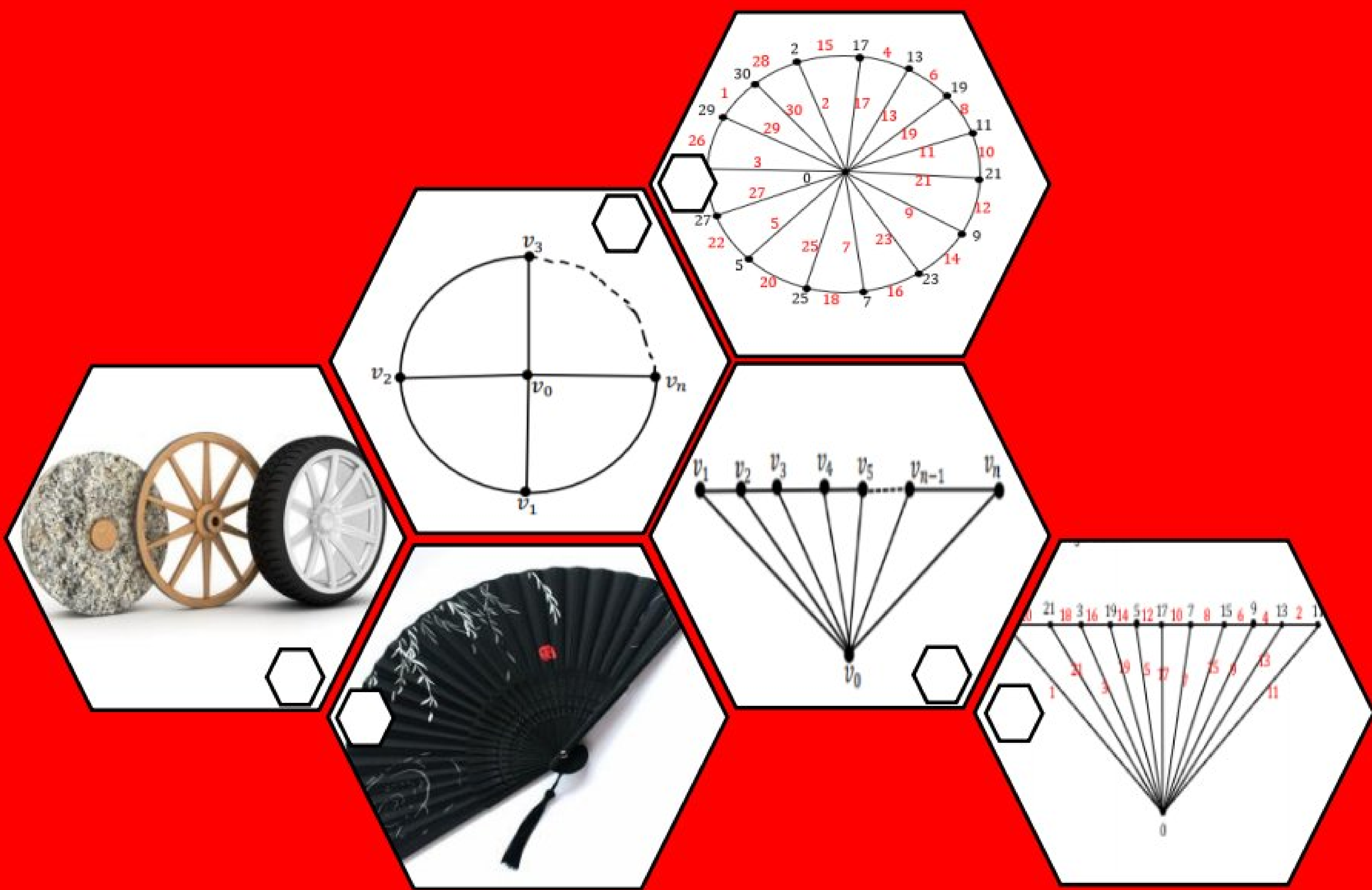
PELABELAN *GRACEFUL* PADA GRAF RODA DAN GRAF KIPAS



GITO PASERANG

H011201038

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2024

PELABELAN *GRACEFUL* PADA GRAF RODA DAN GRAF KIPAS

GITO PASERANG

H011201038

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF RODA DAN GRAF KIPAS

GITO PASERANG
H011201038

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

Pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

SKRIPSI

PELABELAN *GRACEFUL* PADA GRAF RODA DAN GRAF KIPAS

GITO PASERANG
H011201038

Skripsi,

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Sains pada 25 Juni 2024

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing tugas akhir,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP.197008072000031002

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP.196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi berjudul "Pelabelan Graceful Pada Graf Roda dan Graf Kipas" dengan arahan dari pembimbing (Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.). Karya ilmiah ini belum diajukan dan sedang tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun yang tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks yang dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas prbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karta tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makasaar, 25 Juni 2024

METERAI TEMPEL
10000
RC187ALX130456637

GITO PASERANG
NIM H011201038

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkatnya penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul “Pelabelan *Graceful* Ganjil Pada Graf Roda dan Graf Kipas”.

Terima kasih dan penghargaan kepada kedua orang tua saya tercinta, Bapak **Nikolaus Padandi** dan Ibu **Lisna Patalle**, karena keberhasilan penulis tidak luput dari doa, jasa, pengorbanan, juga cinta dan kasih sayang dari mereka berdua. Dan kepada kakakku **Gitaria Paserang** dan juga kedua adikku **Giralia Paserang** dan **Gerlianti Paserang** terima kasih atas doa dan semangat yang diberikan.

Terima kasih kepada **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing, terima kasih banyak atas bimbingan dan waktu yang telah diberikan kepada peneliti selama menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Semoga Tuhan selalu memberikan kesehatan dan mempermudah segala urusan Prof.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini telah melibatkan banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis dengan tulus berterima kasih kepada semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung selama proses pendidikan hingga pada masa penyelesaian studi penulis, sehingga pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas hasanuddin beserta jajarannya.
3. Terima kasih kepada **Dr. Firman, S.Si., M.Si**. selaku Ketua Departemen Matematika.
4. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** Selaku dosen penguji dan penasihat akademik, dan **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji. Terima kasih sudah memberi saran dan motivasi bagi penulis untuk penulisan skripsi ini.
5. Terima kasih kepada semua bapak dan ibu dosen Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan nasihatnya kepada penulis selama menuntut ilmu di Universitas Hasanuddin, juga kepada staf Departemen Matematika atas bantuannya.
6. Terima kasih kepada semua teman-teman Matematika 2020 terkhusus kepada **Afiliani, Aeron, Eko** yang telah memberikan dukungan dan bantuan selama penyusunan skripsi, juga tema-teman KKNT Posko Desa Sapanang, Jeneponto. Serta semua teman-teman yang tidak sempat saya tuliskan namanya yang selalu membantu saya dalam pengurusan skripsi.

Akhir kata penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat.

Makassar, 25 Juni 2024

Penulis

Gito Paserang

ABSTRAK

GITO PASERANG. **Pelabelan *graceful* pada graf roda dan graf kipas** (dibimbing oleh Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.)

Latar belakang. Banyak penelitian telah mengkaji tentang pelabelan *graceful* pada graf misalnya pada graf gabungan, graf lilin, graf lintasan dan graf pohon khusus, tetapi bagaimana pelabelan pada graf roda dan graf kipas belum diketahui. **Tujuan.** Untuk menentukan pelabelan *graceful* pada graf roda W_n untuk $n \geq 3$ dan menentukan pelabelan *graceful* pada graf kipas F_n untuk $n \geq 3$. **Metode.** Penelitian dibagi tiga tahap, yakni: 1) Pendekatan teoritis dari berbagai sumber pustaka yang berupa buku, jurnal, ataupun media online. 2) Studi literatur berupa pemahaman mendalam tentang pelabelan *graceful*. 3) Pengkajian mengenai graf pada beberapa literatur terkhusus mengenai graf roda dan graf kipas. **Hasil.** Graf roda W_n untuk $n \geq 3$ merupakan graf *graceful* karena dapat dilabeli dengan aturan sebagai berikut: Untuk n genap didefinisikan pelabelan $f: V \to \{0,1,2,3,\dots,q\}$ pada $\mathrm{W_n}$ sebagai berikut:1). $f(v_0) = 0,$ 2). $f(v_i) = i,\ untuk\ 1 \leq i \leq n-3,\ i\ ganjil,$ 3). $f(v_i) = 2n - i - 1,\ untuk\ 2 \leq i \leq n-2, i\ genap,$ 4). $f(v_{n-1}) = 2,$ 5). $f(v_n) = 2n$.Untuk menentukan pelabelan sisinya didefinisikan sebagai berikut: $f(v_i, v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|\ \forall (v_i, v_j) \epsilon\ E(\mathrm{W_n})$.Untuk n ganjil, didefinisikan pelabelan $f: V \to \{0,1,2,3,\dots,q\}$ pada G sebagai berikut:1). $f(v_0) = 0$, 2). $f(v_1) = 2$, 3). $f(v_i) = n + i,\ untuk\ 2 \leq i \leq n-1, i\ genap.$ 4). $f(v_i) = n + 1 - i,\ untuk\ 3 \leq i \leq n-2, i\ ganjil,$ 5). $f(v_n) = 2n$.Untuk menentukan pelabelan sisinya didefinisikan sebagai berikut: $f(v_i, v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|\ \forall (v_i, v_j) \epsilon\ E(\mathrm{W_n})$.Graf kipas F_n untuk $n \geq 3$ merupakan graf *graceful* karena dapat dilabeli dengan aturan sebagai berikut: Buat fungsi f dari F_n ke $\{0,1,2,\dots,q\}$ dengan aturan: 1) $f(v_0) = 0,\ i = 0, f(v_i) = i,\ i\ ganjil, f(v_i) = 2n - i + 1, i\ genap$. Untuk menentukan pelabelan sisinya didefinisikan sebagai berikut: $f(v_i, v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|\ \forall (v_i, v_j) \epsilon\ E(\mathrm{F_n})$. **Kesimpulan.** Graf roda W_n untuk $n \geq 3$ merupakan graf *graceful* dan Graf kipas F_n untuk $n \geq 3$ merupakan graf *graceful*.

Kata kunci: Graf, Pelabelan, *Graceful*, Roda, Kipas.

ABSTRACT

GITO PASERANG. ***Graceful* labeling on wheel graphs and fan graphs**
(supervised by Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.)

Background. *Many studies have examined graceful labeling of graphs, such as path graphs, union graphs, line graphs, and unique tree graphs, but the graceful labeling of wheel and fan graphs has yet to be discovered.* ***Aim.*** *To determine the graceful labeling of wheel graphs* W_n *for* $n \geq 3$ *and fan graphs* F_n *for* $n \geq 3$. ***Methods****. The research was conducted in three steps: 1). Data collection from various sources such as books, journals, and online media. 2). Studying the literature on graceful labeling on graphs. 3). they are applying graceful labeling to the wheel and fan graphs, especially wheel and fan graphs.* ***Results.*** *Wheel graphs* W_n *for* $n \geq 3$ *are graceful because they can be labeled gracefully. Wheel graphs* W_n *for even* n *are defined by* $f: V \rightarrow \{0,1,2,3,\ldots,q\}$ *on* W_n *as follows: 1).* $f(v_0) = 0$, *2).* $f(v_i) = i,\ for\ 1 \leq i \leq n-3,\ i\ odd$, *3).* $f(v_i) = 2n - i - 1,\ for\ 2 \leq i \leq n-2, i\ even$, *4).* $f(v_{n-1}) = 2$, *5).* $f(v_n) = 2n$. *For even* n, *the vertex labeling is defined as follows:* $f(v_i, v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|\ \forall (v_i, v_j) \epsilon\ E(W_n)$. *For odd* n, *the vertex labeling is defined by* $f: V \rightarrow \{0,1,2,3,\ldots,q\}$ *on as follows: 1).* $f(v_0) = 0$, *2).* $f(v_1) = 2$, *3).* $f(v_i) = n + i,\ for\ 2 \leq i \leq n-1, i\ even$. *4).* $f(v_i) = n + 1 - i,\ for\ 3 \leq i \leq n-2, i\ odd$, *5).* $f(v_n) = 2n$.*The edge labeling is defined as follows:* $f(v_i, v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|\ \forall (v_i, v_j) \epsilon\ E(W_n)$.*Fan graphs* F_n *for* $n \geq 3$. *are graceful because they can be labeled gracefully. Fan graphs* F_n *are defined as 1).* $f(v_0) = 0,\ \ i = 0$, *2).* $f(v_i) = i,\ i\ odd,\ f(v_i) = 2n - i + 1, i\ even$.*The edge labeling is defined as follows:* $f(v_i, v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|\ \forall (v_i, v_j) \epsilon\ E(F_n)$.***Conclusion.*** *Wheel graphs* W_n *for* $n \geq 3$ *are graceful graphs, and fan graphs* F_n *for* $n \geq 3$ *are graceful graphs.*

Keywords*: Graph, Labeling, Graceful, Wheel, Fan.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Nomor urut Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor urut Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf memiliki sejarah yang kaya sejak abad ke-18. Penggunaan teori graf yang pertama kali diketahui adalah oleh matematikawan Swiss Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika ia memecahkan masalah tujuh jembatan Königsberg yang terkenal (Daniel Matusevich, 2022). Solusi Euler melibatkan representasi kota Königsberg sebagai sebuah graf, dengan daratan sebagai simpul dan jembatan sebagai sisi. Euler kemudian membuktikan bahwa tidak mungkin untuk berjalan melewati kota dan menyeberangi setiap jembatan tepat satu kali untuk kembali ke kota awal berangkat. Masalah ini dan solusinya dianggap sebagai kelahiran teori graf.

Dalam perkembangan teori graf selanjutnya banyak penemuan terbaru mengenai teori graf, seperti jenis-jenis graf, dan pelabelan pada graf. Secara umum pelabelan graf adalah pemberian nilai pada titik, sisi, atau sisi dan titik. Pelabelan pada graf sudah banyak dikaji mulai dari tahun 1960 seperti valuasi β yang diperkenalkan Rosa pada tahun 1967 yang saat ini diketahui dengan nama pelabelan *graceful* (Gallian, 1997).

Pelabelan *graceful* adalah sebuah jenis pelabelan graf yang telah dipelajari dalam teori graf. Sebuah graf G dengan q sisi adalah suatu injeksi $f: V(G) \to \{1,2,3,...,q\}$ sedemikian sehingga jika sisi xy dilabel dengan $|f(x) - f(y)|$ maka label sisi yang dihasilkan akan berbeda semua (Rahajeng, 2013).

Penelitian telah dilakukan pada pelabelan *graceful* untuk berbagai jenis graf, termasuk *gracefulness of the join of graph* (Koh, Phoon, & Soh, 2015), *graceful labeling of some zero divisor graph* (Khatun & Nayeem, 2017), dan pelabelan *graceful* pada graf lilin (Rachmadhani & Sugeng, 2021). Ada juga upaya untuk mengembangkan algoritma untuk menemukan pelabelan *graceful* pada graf lintasan P_n (Suwarman, Inayah, & Irene, 2022). Penelitian lain juga diterbitkan pada tahun 2023 tentang konstruksi pelabelan *graceful* untuk beberapa graf pohon khusus menggunakan matriks ketetanggaan (Simarmata, Sandy, & Sugeng, 2023). Namun dari semua penelitian tersebut belum ada yang secara spesifik membahas pelabelan *graceful* pada graf roda dan graf kipas.

Perbedaan utama penelitian ini dengan penelitian terdahulu terletak pada fokusnya pada graf graf roda dan graf kipas, penelitian ini akan memperluas tentang pelabelan *graceful* pada graf tersebut.

Melihat banyaknya penemuan pelabelan *graceful* pada berbagai jenis graf, peneliti tertarik untuk mengkaji pelabelan *graceful* pada graf-graf yang belum dikaji sebelumnya seperti pelabelan *graceful* pada graf roda dan graf kipas, karena itu peneliti bertujuan untuk mengisi kesenjangan tersebut dengan memilih judul **"Pelabelan *Graceful* Pada Graf Roda Dan Graf Kipas".**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini memiliki rumusan masalah yaitu:

1. Bagimana cara menentukan pelabelan *graceful* pada graf roda W_n untuk $n \geq 3$?
2. Bagaimana cara menentukan pelabelan *graceful* pada F_n untuk $n \geq 3$?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tujuan penelitian ini yaitu:

1. Untuk menentukan pelabelan *graceful* pada graf roda W_n untuk $n \geq 3$.
2. Untuk menentukan pelabelan *graceful* pada graf kipas F_n untuk $n \geq 3$.

1.4. Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas dan melebar maka memerlukan batasan masalah sebagai berikut:

1. Graf yang dikaji adalah graf roda W_n untuk $n \geq 3$.
2. Graf yang dikaji adalah graf roda F_n untuk $n \geq 3$.

1.5. Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Menjelaskan pelabelan *graceful* pada graf roda W_n untuk $n \geq 3$.
2. Menjelaskan pelabelan *graceful* pada graf kipas F_n untuk $n \geq 3$.

1.6. Landasan Teori

1.6.1. Graf

Salah satu cabang matematika yang dikenal sebagai teori graf diperkenalkan oleh Leonardo Euler pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berjudul *"Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis."* Tulisan ini memecahkan masalah jembatan Königsberg. Meskipun dalam tulisannya tidak menggunakan istilah "graf" namun konsep teoritis yang Euler kemukakan menjadikan tulisan ini sebagai karya awal dalam pengembangan teori graf.

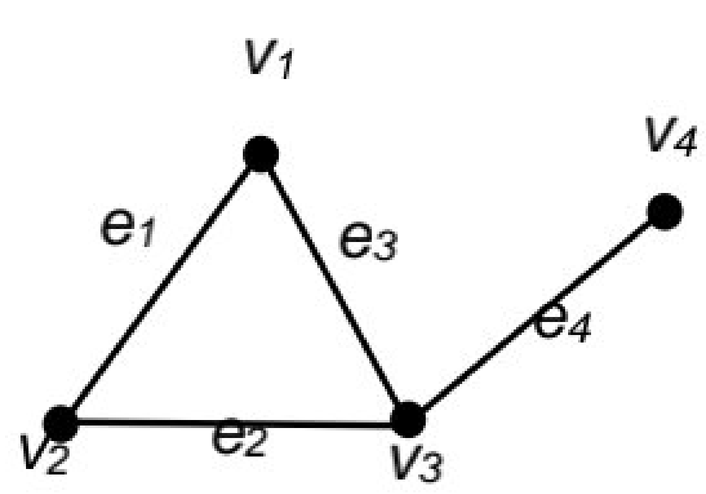
Definisi 1.6.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan $G = (V, E)$ dengan V himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan-pasangan anggota V yang disebut sisi* (Hasmawati, 2020).

Definisi 1.6.1.2 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf G dikatakan graf sederhana jika E adalah himpunan pasangan-pasangan tak berurut dan berbeda dari anggota-anggota V* (Hasmawati, 2020).

Definisi 1.6.1.3 *Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf. Banyaknya titik pada graf G disebut orde G dan dinotasikan dengan $|V|$* (Bondy & Murty, 1982).

Definisi 1.6.1.4 *Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf. Banyaknya sisi pada graf G disebut ukuran dan dinotasikan dengan $|E|$* (Bondy & Murty, 1982).

contoh 1.6.1.1



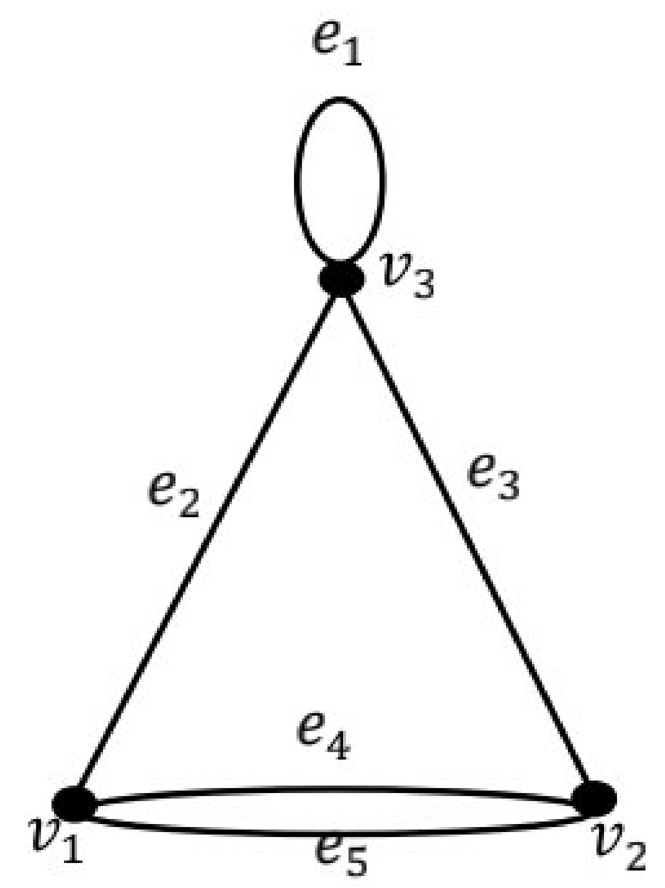
Gambar 1 Graf $G = (V, E)$.

Gambar 1 memberikan suatu graf G dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Maka diketahui bahwa $|V| = 4$ dan $|E| = 4$.

Definisi 1.6.1.*5* *Dua buah sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda* (Munir, 2010).

Definisi 1.6.1.6 *Sebuah sisi dikatakan loop apabila sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama* (Munir, 2010).

Contoh 1.6.1.2

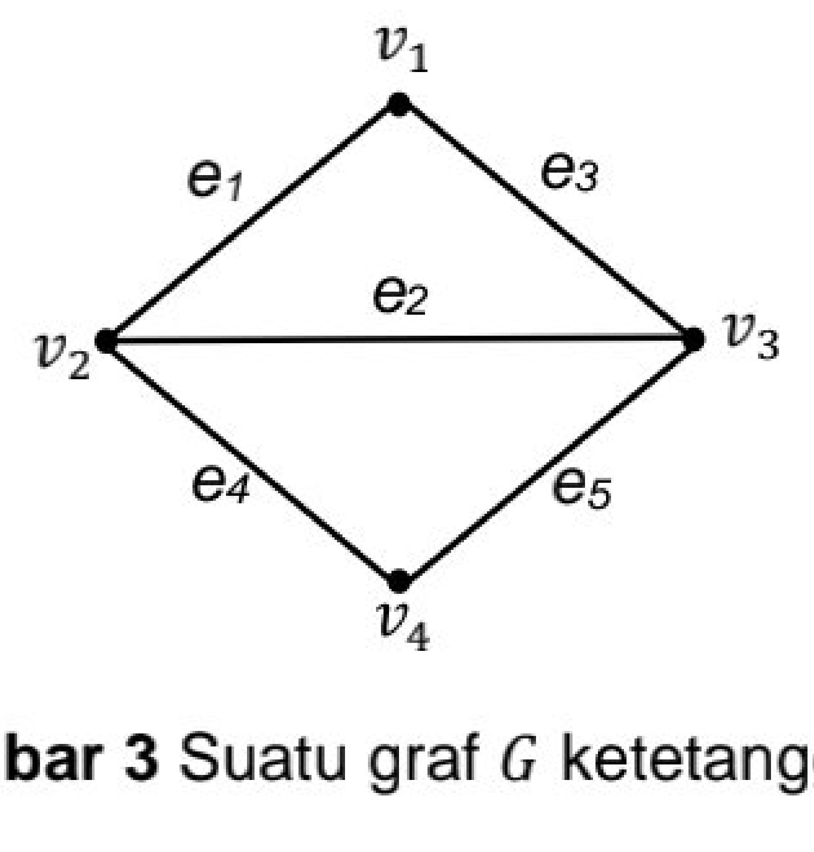


Gambar 2 Suatu graf G yang memuat loop dan sisi ganda, sisi e_1 merupakan loop dan sisi e_4 dan e_5 merupakan sisi ganda.

1.6.2. Ketetanggaan dan Keterikatan

Definisi 1.6.2.1 *Dua titik dalam graf tak-berarah G disebut bertetangga jika ada sisi yang menghubungkan keduanya. Dengan kata lain, u dikatakan bertetangga dengan v jika (u, v) adalah titik ujung dari suatu sisi pada graf G* (Bondy & Murty, 1982).

Contoh 1.6.2.1



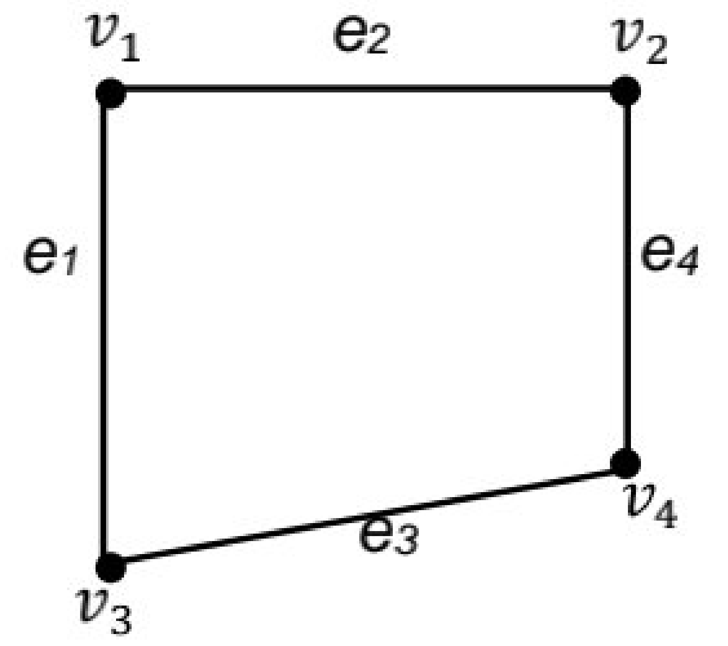
Gambar 3 Suatu graf G ketetanggaan

Pada Gambar 3 memberikan suatu graf G ketetanggan dengan titik-titik yang bertetangga adalah sebagai berikut:

1) v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3.
2) v_2 bertetangga dengan v_1, v_3 dan v_4.
3) v_3 bertetangga dengan v_1, v_2, dan v_4.
4) v_4 bertetangga dengan v_2 dan v_3.

Definisi 1.6.2.2 *Misalkan graf* $G = (V, E)$ *suatu graf,* ***s****isi* e *dianggap terkait dengan simpul* u *dan simpul* v, *untuk setiap sisi* $e = (u, v)$ (Bondy & Murty, 1982).

Contoh 1.6.2.2



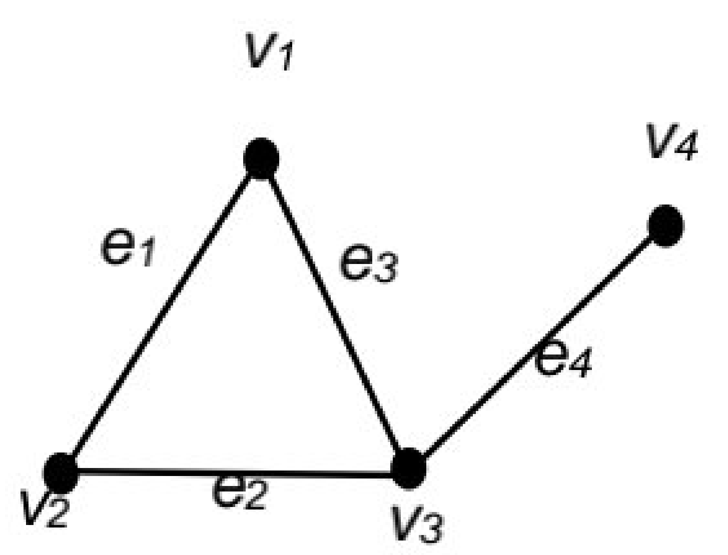
Gambar 4 Suatu graf G Keterkaitan.

Pada Gambar 4 memberikan suatu graf G keterkaitan dengan titik-titik yang terkait adalah sebagai berikut:

1) e_1 terkait dengan $v_1$dan v_3
2) e_2 terkait dengan v_1 dan v_2.
3) e_3 terkait dengan v_3 dan v_4.
4) e_4 terkait dengan v_2 dan v_4.
5) $e_1$tidak terkait dengan v_2 dan v_4.
6) e_2 tidak terkait dengan v_3 dan v_4.
7) e_3 tidak terkait dengan v_1 dan v_2.
8) e_4 tidak terkait dengan v_1 dan v_3.

Definisi 2.6.2.3 *Derajat suatu titik* v_i *dalam graf* G, *dilambangkan dengan* $d(v_i)$ *adalah banyaknya sisi* $x \in E(G)$ *yang terkait dengan titik* v_i *atau* $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, dimana $\delta(G) = min\,\{d(v): v \in V(G)$, dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, dimana $\Delta(G) = max\,\{d(v): v \in V(G)$ (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.6.2.3



Gambar 5 Graf sederhana G berorde 4.

Pada Gambar 5 diberikan graf G berorde 4 derajat titik-titik di G sebagai berikut:

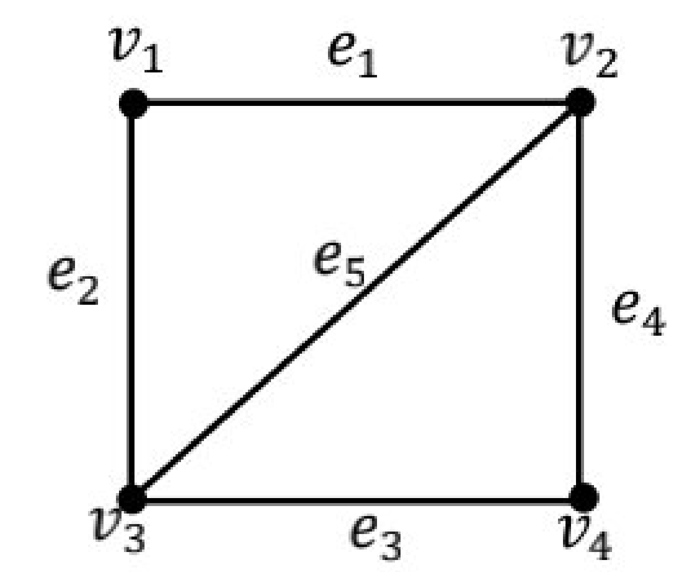
1) $d(v_1) = 2,$
2) $d(v_2) = 2,$
3) $d(v_3) = 3,$
4) $d(v_4) = 1,$
5) $\delta(G) = 1$
6) $\Delta(G) = 4$

1.6.3. Jenis-jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya *loop* atau sisi ganda pada suatu graf, graf dibagi menjadi dua yaitu graf sederhana dan graf tak sederhana.

Definisi 1.6.3.1 *Graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda dinamakan graf sederhana* (Munir, 2010).

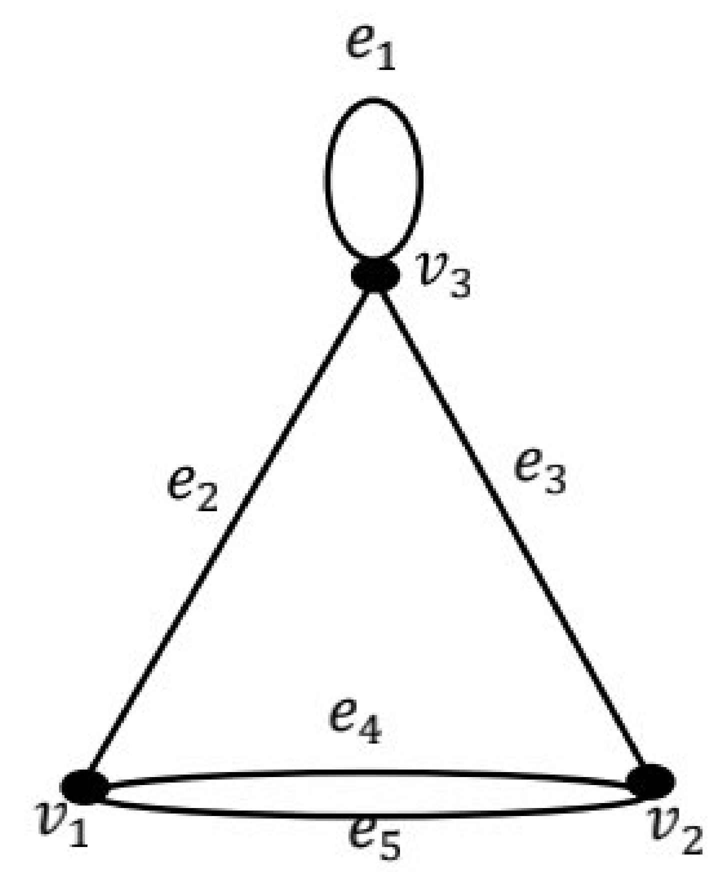
Contoh 1.6.3.1



Gambar 6 Suatu graf sederhana.

Definisi 1.6.3.2 *Graf yang mengandung loop atau sisi ganda dinamakan dengan graf tak-sederhana* (Munir, 2010)

Contoh 1.6.3.2

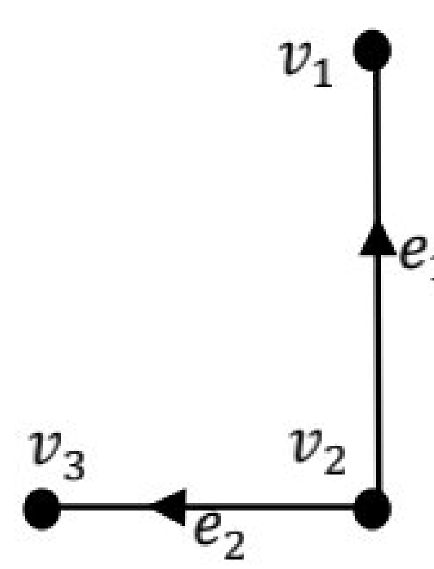


Gambar 7 Suatu graf tak-sederhana.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf secara umum dibagi menjadi dua yaitu graf berarah dan graf tak berarah.

Definisi 1.6.3.3 *Suatu graf berarah adalah graf yang tiap sisinya diberikan orientasi arah. Sisi berarah biasanya disebut busur. Pada graf berarah* $(u, v) \neq (v, u)$. *Untuk busur* (v, u) *titik* v *dinamakan titik asal dan titik* u *dinamakan titik terminal* (Munir, 2010).

Contoh 1.6.3.3

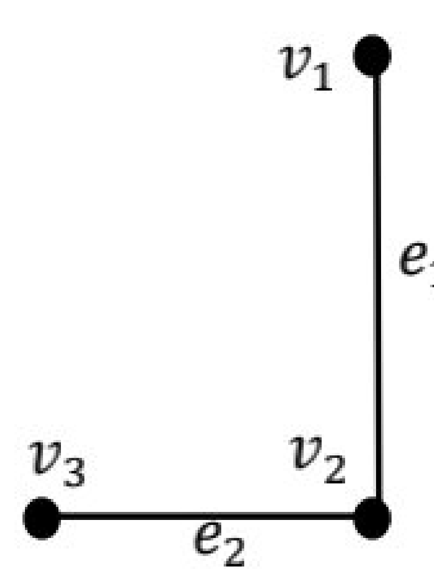


Gambar 8 Suatu graf berarah.

Pada gambar 2.3.3, $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ dan $(v_2, v_3) \neq (v_3, v_2)$.

Definisi 1.6.3.4 *Suatu graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Atau dengan kata lain urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan, sehinggan* $(u, v) = (v, u)$ *adalah sisi yang sama* (Munir, 2010).

Contoh 1.6.3.4



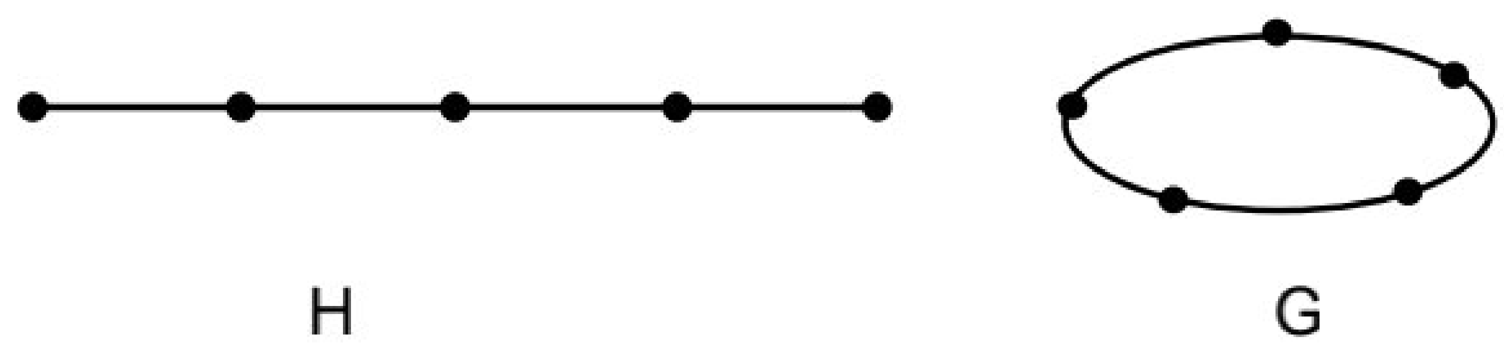
Gambar 9 Suatu graf tak berarah.

Pada gambar 1.6.3.4, $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ dan $(v_2, v_3) = (v_3, v_2)$.

Beberapa graf khusus yang sering dijumpai pada banyak aplikasi diantaranya adalah graf lintasan dan graf siklus, graf roda, dan graf kipas.

Definisi 1.6.3.5 *Misalkan* $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ *adalah lintasan berorde* n *dengan panjang* $n-1$. *Siklus* C_n *dengan panjang* $n, n \geq 3$ *adalah graf dengan himpunan titik* $V(C_n) = V(P_n)$ *dan himpunan sisi* $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati, 2020).

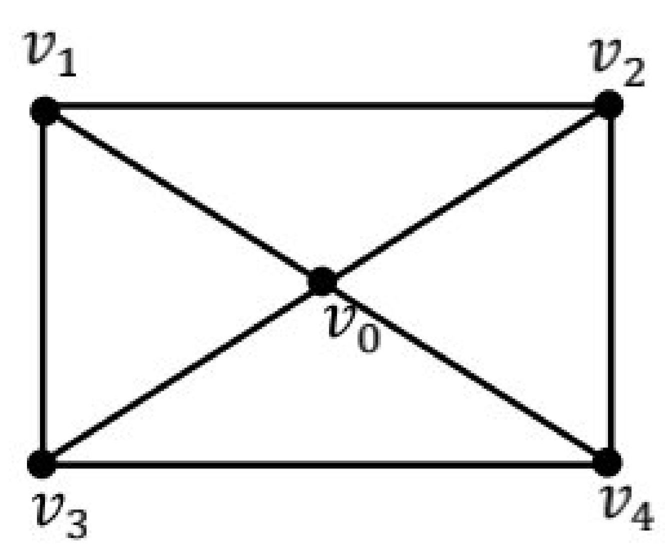
Contoh 1.6.3.5



Gambar 10 Graf lintasan dan graf siklus

Definisi 1.6.3.6 *Graf roda (Wheel) adalah suatu graf yang dibentuk dari siklus* C_n *dengan menambahkan suatu titik pusat* x, *dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda dengan orde* $n+1$ *dinotasikan dengan* W_n (Hasmawati, 2020).

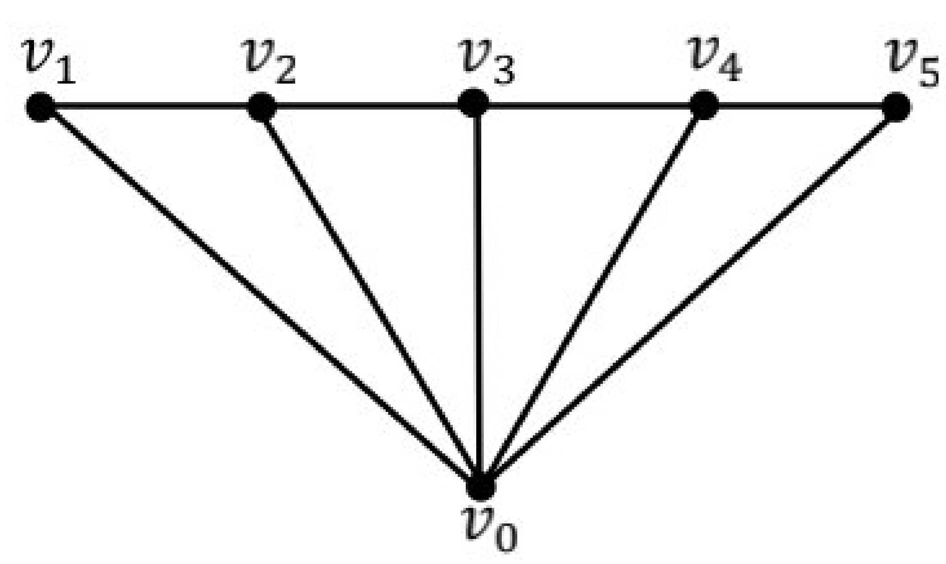
Contoh 1.6.3.6



Gambar 11 Graf roda W_4.

Definisi 1.6.3.7 *Graf kipas dengan* $n\ titik, n \geq 3$ *dinotasikan dengan* F_n *dengan* $F_n = P_{n-1} + K_{1.}$ *Jika* $v_0 \in K_1\ dan\ v \in P_{n-1}$ *maka sisi* $v_0 v_i \in E(F_n)$ *disebut jari-jari dari* F_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.3.7



Gambar 12 Graf kipas F_5.

1.6.4. Fungsi

Definisi 1.6.4.1 *Anggaplah A dan B sebagai dua himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B dikatakan sebagai fungsi jika setiap elemen dari himpunan A terhubung dengan tepat satu elemen di himpunan B.* Fungsi f dari A ke B dituliskan $f: A \longrightarrow B$, artinya f memetahkan $A\ ke\ B$ (Munir, 2010).
Secara umum Fungsi dapat dibagi menjadi tiga jenis yaitu fungsi satu-satu (*injective),* fungsi pada atau onto (*surjective),* dan fungsi koresondensi satu-satu (*bijective*).

Definisi 1.6.4.2 Menurut (Devlin, 2003) *sebuah fungsi $f: A \longrightarrow B$ dikatakan.*

(i) Fungsi satu-satu (*injective)* jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, berakibat $f(x) \neq f(y)$.
(ii) Fungsi pada (*surjective),* jika untuk setiap $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$ terdapat $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ sehingga $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$.
(iii) Fungsi bijektif (*bijective*), jika f satu-satu sekaligus pada.

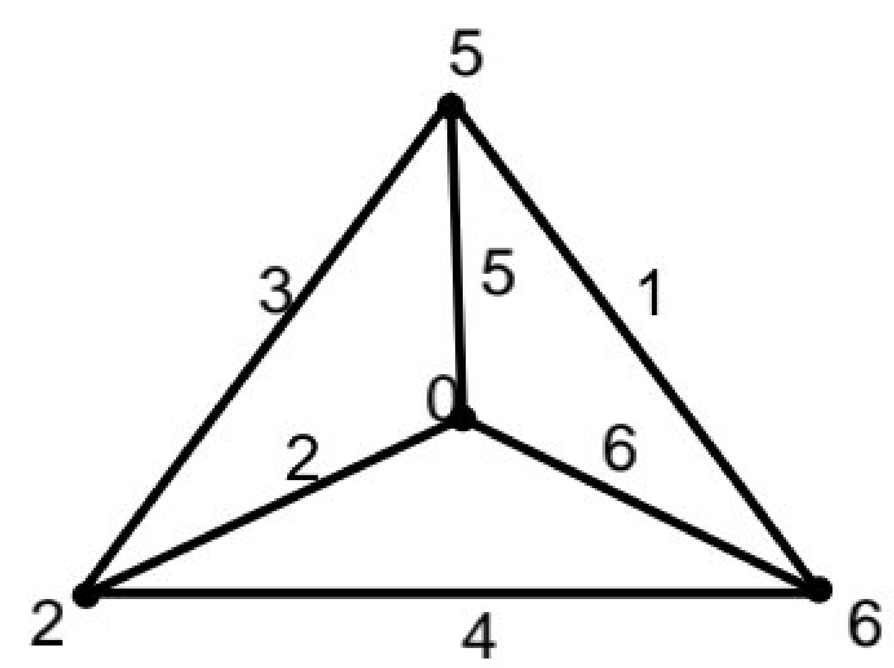
Contoh 1.6.4.2

(i) Diberikan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$. himpunan $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ merupakan fungsi injektif tetapi tidak surjektif.
(ii) Fungsi f dengan rumus $f(x) = \mathrm{x}^2$ merupakan fungsi surjektif dari $\mathbb{R}$ ke$[0, \infty]$.
Bukti
Diambil sebarang $\mathrm{y} \in [0, \infty]$, maka $\sqrt{\mathrm{y}}$ ada. Selanjutnya, diambil $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ dengan $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{y}}$, maka $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 = \left(\sqrt{\mathrm{y}}\right)^2 = \mathrm{y}$.
(iii) Fungsi g dengan rumus $\mathrm{g(x)} = $ 1-3x merupakan bijektif dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

1.6.5. Pelabelan *Graceful*

Definisi 1.6.5.1 *Misalkan graf G dengan q sisi adalah suatu injeksi $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3, \ldots, q\}$ sedemikian sehingga jika sisi xy dilabel dengan $|f(x) - f(y)|$ maka label sisi yang dihasilkan akan berbeda semua* (Rahajeng, 2013).

Contoh 1.6.5.1



Gambar 13 *Graf Graceful*