

DAFTAR PUSTAKA

- Namias, V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *IMA J. Appl. Math.* **1980**, *25*, 241–265.
- McBride, A.C.; Kerr, F.H. On Namias's fractional Fourier transforms. *IMA J. Appl. Math.* **1987**, *39*, 159–175.
- Kuzmichev, V.E. & Kuzmichev, V. V. Uncertainty principle in quantum mechanics with Newton's gravity, *Eur. Phys. J. C.* **2020**. *80*, 248.
- Almeida, L.B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Trans. Signal Process.* **1994**, *42*, 3084–3091.
- Benedicks, M. On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. *J. Math. Anal. Appl.* **1985**, *106*, 180–183.
- Jaming, P. Nazarov's uncertainty principles in higher dimension. *J. Approx. Theory.* **2007**, *149* (1), 30–41.
- Nazarov, F.L. Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. *Algebra i Analiz.* **1993**, *5* (4), 3–66.
- Huo, H. Uncertainty Principles for the Offset Linear Canonical Transform, *Circuits Syst. Signal Process.* **2019**, *38*, 395–406.
- Bahri, M. Logarithmic uncertainty principle, convolution teorema related to continuous fractional wavelet transform and its properties on a generalized Sobolev space. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.* **2017**, *15* (5), 1750050.

- Folland, G.B., Sitaram, A. The uncertainty principle: A Mathematical Survey. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*. **1997**, (3), 207-238.
- Anh, P.K.; Castro, L.P.; Thao, P.T.; Tuan, N.M. Two new convolutions for the fractional Fourier transform. *Wirel. Pers. Commun.* **2017**, 92, 623-637.
- Guanlei, X.; Xiatong, W.; Xiaogang, X. Novel uncertainty relations associated with fractional Fourier transform. *Chin. Phys. B.* **2010**, 19, 014203.
- Shi, J.; Sha, X.; Shong, X.; Zhang, N. Generalized convolution teorema associated with fractional Fourier transform. *Wirel. Commun. Mob. Comput.* **2012**, 14, 1340–1351.

BAB III

PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS SATU DIMENSI DAN PERSAMAAN LAPLACE DENGAN MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL

3.1. Abstrak

Bagian ini membahas tentang transformasi Fourier fraksional dan penerapannya dalam penyelesaian persamaan panas satu dimensi dan persamaan Laplace, dimana penyelesaian ini merupakan bentuk umum penyelesaian persamaan panas dan persamaan Laplace menggunakan transformasi Fourier klasik. Dalam bagian ini, penyelesaian persamaan panas satu dimensi juga dirumuskan menggunakan *sampling formula* yang terkait dengan transformasi Fourier fraksional. Transformasi Fourier fraksional diperkenalkan, teorema terkait dan sifat-sifat penting disajikan. Beberapa hasil terkait rumus *sampling formula* juga diperoleh. Beberapa contoh disajikan untuk menggambarkan efektivitas dan kekuatan metode yang diusulkan dibandingkan dengan metode transformasi Fourier klasik.

Kata Kunci: transformasi Fourier; transformasi Fourier fraksional; persamaan panas; persamaan Laplace; *sampling formula*.

3.2. Pendahuluan

Sebagaimana diketahui, transformasi Fourier fraksional merupakan generalisasi dari transformasi Fourier klasik. Transformasi Fourier fraksional merupakan cabang matematika yang berkembang pesat, dan telah menjadi metode yang ampuh untuk berbagai aplikasi yang muncul di banyak bidang sains

dan teknik. Oleh karena itu, transformasi ini menjadi sangat menarik. Dalam beberapa tahun terakhir, beberapa peneliti telah mencoba memperluas beberapa penerapan transformasi Fourier ke transformasi Fourier fraksional, seperti pada pemrosesan sinyal optik (Bernardo, 1994; Liu *et al.*, 1997; Ozaktas & Aytür, 1995; Mendlovich & Ozaktas, 1993; Ozaktas *et al.*, 2001), ataupun penerapan transformasi Fourier fraksional dalam mekanika kuantum (Namias, 1980; Qiu *et al.*, 2019). Namun sampai saat ini, dalam beberapa literatur, masih sangat sedikit penelitian mengenai penerapan dari transformasi Fourier fraksional dalam permasalahan persamaan diferensial parsial. Sebagai contoh, transformasi Fourier fraksional digunakan untuk menemukan solusi persamaan gelombang (Prasad *et al.*, 2014). Solusi tersebut dapat dianggap sebagai perluasan dari solusi persamaan gelombang menggunakan transformasi Fourier klasik. Generalisasi solusi persamaan panas dan gelombang telah diselesaikan dengan menggunakan transformasi kanonik linier (Bahri & Ashino, 2020), dan transformasi Fourier fase kuadratik (Shah *et al.*, 2022). Namun sejauh ini, belum ada yang menggunakan transformasi Fourier fraksional ini untuk solusi persamaan panas dan persamaan Laplace. Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada penyelesaian persamaan panas dan Laplace menggunakan metode transformasi Fourier fraksional. Untuk mencapai hal ini, pertamanya diberikan definisi transformasi Fourier fraksional, serta teorema terkait, dan membangun hubungan dasar antara teorema konvolusi untuk transformasi Fourier fraksional dan teorema konvolusi untuk transformasi Fourier klasik. Kemudian, dikembangkan hasil dan hubungannya untuk mendapatkan solusi persamaan panas dan persamaan Laplace. Beberapa contoh juga ditunjukkan untuk memverifikasi validitas dan penerapan pendekatan yang diusulkan, dengan membandingkan hasil pada transformasi Fourier klasik.

Adapun alur bab ini disusun sebagai berikut. Pada Bagian 3.3 disajikan beberapa materi pendahuluan yang akan berguna dalam penelitian ini. De-

finisi transformasi Fourier fraksional dan sifat-sifat terkait diberikan di Bagian 3.4. Bagian 3.5 dikhususkan untuk menemukan solusi persamaan panas dan persamaan Laplace menggunakan transformasi Fourier fraksional. Bagian 3.6 membahas penyelesaian persamaan panas dengan menggunakan *sampling formula*. Bagian 3.7 berisi kesimpulan hasil penelitian.

3.3. Transformasi Fourier

Sebelum membahas tentang transformasi Fourier fraksional pada bagian 3.4, pada bagian ini terlebih dahulu akan dibahas mengenai definisi ruang Lebesgue dan transformasi Fourier. Pada bagian ini juga akan diberikan beberapa lemma terkait transformasi Fourier dan sifat-sifat dari transformasi Fourier yang akan digunakan dalam bagian-bagian selanjutnya.

Definisi 3.3.1 (Bahri, 2017) Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dari fungsi terukur pada \mathbb{R} didefinisikan sebagai

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad (3.1)$$

dengan norm

$$\| f \|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (3.2)$$

Selanjutnya, perlu diingat kembali definisi transformasi Fourier (TF) dan lemma terkait.

Definisi 3.3.2 Transformasi Fourier dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

dan untuk suatu $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, maka rumus inversnya ditulis sebagai

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Lemma 3.3.1 Transformasi Fourier dari fungsi Gaussian diberikan sebagai

$$\mathcal{F}\left\{e^{-px^2}\right\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}}, \quad (3.5)$$

dengan $p > 0$.

Lemma 3.3.2 Transformasi Fourier dari kernel Poisson diberikan sebagai

$$\mathcal{F} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right\} (\omega) = e^{-y|\omega|}. \quad (3.6)$$

Teorema 3.3.3 Diberikan $f \in L^2(\mathbb{R})$. Misalkan operator translasi, modulasi dan dilatasi dari fungsi f dinyatakan sebagai berikut

$$T_\kappa f(x) = f(x - \kappa), \quad M_\kappa f(x) = e^{i\kappa x} f(x), \quad D_\lambda f(x) = f(\lambda x), \quad (3.7)$$

dimana $\kappa \in \mathbb{R}$ dan $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, maka berlaku

1. $\mathcal{F} \{T_\kappa f(x)\}(\omega) = M_{-\kappa} \hat{f}(\omega)$,
2. $\mathcal{F} \{M_\kappa f(x)\}(\omega) = \hat{f}(\omega - \kappa)$,
3. $\mathcal{F} \{D_\lambda f(x)\}(\omega) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$.

Definisi 3.3.3 Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, konvolusi dari fungsi f dan g yang dilambangkan dengan $f * g$ didefinisikan sebagai

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t) dt, \quad (3.8)$$

dan

$$(f * g)(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{f\}(\omega) \mathcal{F} \{g\}(\omega) \right\}(x). \quad (3.9)$$

3.4. Transformasi Fourier Fraksional dan Sifat-sifatnya

Berikut ini, diberikan definisi transformasi Fourier fraksional (TFFr), serta teorema dan sifat-sifat terkait. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada beberapa referensi terkait (Bernardo, 1994; Ozaktas & Aytür, 1995; McBride & Kerr, 1987; Almeida, 1994; Zayed, 1996; Zayed, 1998, Shi *et al.*, 2012; Bahri & Karim, 2023; Bahri & Ashino, 2022; Pei, 2001; Chen *et al.*, 2021; Sahin

et al., 1998; Kutay et al., 1997; Benediks, 1985; Anh et al., 2017; Guanlei et al., 2010).

Definisi 3.4.1 Transformasi Fourier fraksional satu dimensi dengan sudut θ dari $f \in L^2(\mathbb{R})$ dilambangkan dengan $\mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) = \hat{f}^\theta(\omega)$ dan didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) = \hat{f}^\theta(\omega) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \quad (3.10)$$

dengan kernel $K^\theta(x, \omega)$ diberikan oleh

$$K^\theta(x, \omega) = \begin{cases} C^\theta e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta}, & \theta \neq n\pi \\ \delta(x - \omega), & \theta = 2n\pi \\ \delta(x + \omega), & \theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.11)$$

dan

$$C^\theta = (2\pi i \sin \theta)^{-1/2} e^{i\theta/2} = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}}.$$

Rumus invers dari TFFr diberikan oleh

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}^\theta(\omega) \} (x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{K^\theta(x, \omega)} \hat{f}^\theta(\omega) d\omega, \quad (3.12)$$

dengan

$$\overline{K^\theta(x, \omega)} = \overline{C^\theta} e^{-i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} = K^{-\theta}(x, \omega),$$

Relasi antara TF dan TFFr adalah

$$\mathcal{F}\{r\}(\omega \csc \theta) = (2\pi i \sin \theta)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\theta}{2}} e^{-i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega), \quad (3.13)$$

dengan

$$r(x) = f(x) e^{ix^2 \frac{\cot \theta}{2}}. \quad (3.14)$$

Beberapa sifat-sifat yang berguna dari TFFr dirangkum dalam hasil berikut.

Teorema 3.4.1 (Sifat translasi) Jika $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, maka untuk setiap konstanta tak nol $r \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\mathcal{F}^\theta \{ \phi(x - r) \}(\omega) = e^{\frac{i}{4}(r^2 \sin 2\theta - 4\omega r \sin \theta)} \mathcal{F}^\theta \{ \phi(x) \}(\omega - r \cos \theta). \quad (3.15)$$

Teorema 3.4.2 (Sifat modulasi) *Jika $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ dan $m \in \mathbb{Z}$, maka*

$$\mathcal{F}^\theta \{ \phi(x) e^{imx} \}(\omega) = e^{\frac{i}{4}(4\omega m \cos \theta - m^2 \sin 2\theta)} \mathcal{F}^\theta \{ \phi(x) \}(\omega - m \sin \theta). \quad (3.16)$$

Teorema 3.4.3 (Sifat dilatasi) *Jika $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, maka untuk setiap konstanta tak nol $k \in \mathbb{R}$, berlaku*

$$\mathcal{F}^\theta \{ \phi(kx) \}(\omega) = \frac{C^\theta}{kC^{\theta_0}} e^{\frac{ik^2\omega^2}{2} \left(1 - \left(\frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta_0}\right)\right) \cot \theta_0} \mathcal{F}^{\theta_0} \{ \phi(x) \} \left(\frac{k \sec \theta}{\sec \theta_0} \omega \right), \quad (3.17)$$

dengan

$$\theta_0 = \cot^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{k^2} \right).$$

Teorema 3.4.4 (Sifat momen) *Jika $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, maka berlaku*

$$\mathcal{F}^\theta \{ x\phi \}(\omega) = \omega \sec \theta (\mathcal{F}^\theta \{ \phi \})'(\omega) + \frac{i}{\cot \theta} \mathcal{F}^\theta \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} \right\}(\omega). \quad (3.18)$$

Definisi 3.4.2 (Definisi Konvolusi) *Misalkan $\phi, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Operator konvolusi yang terkait dengan TFFr didefinisikan sebagai*

$$(\phi * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \varphi(x-t) \sqrt{\frac{1-i \cot \theta}{2\pi}} e^{it(t-x) \cot \theta} dt. \quad (3.19)$$

Sebagai konsekuensi langsung dari Definisi 3.4.2, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.4.5 (Teorema konvolusi) *Dengan menggunakan notasi di atas, diperoleh*

$$\mathcal{F}^\theta \{ (\phi * \varphi) \}(\omega) = e^{\frac{-i\omega^2 \cot \theta}{2}} \mathcal{F}^\theta \{ \phi \}(\omega) \mathcal{F}^\theta \{ \varphi \}(\omega). \quad (3.20)$$

Definisi 3.4.3 *Ruang Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dari fungsi rapidly decaying didefinisikan sebagai koleksi dari fungsi-fungsi bernilai kompleks yang memenuhi*

$$\mathcal{S} = \left\{ \phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m D^n \phi(x)| < \infty, \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (3.21)$$

dimana $D = \frac{d}{dx}$.

Definisi 3.4.4 Ruang Schwartz $S_\theta(\mathbb{R})$ dari fungsi rapidly decaying yang terkait dengan TFFr didefinisikan sebagai koleksi dari fungsi-fungsi bernilai kompleks yang memenuhi

$$S_\theta = \left\{ \phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \overline{D}_x^n \phi(x) \right| < \infty, \forall m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

dengan $\overline{D}_x = \frac{d}{dx} - ix \cot \theta$.

Teorema 3.4.6 Misalkan $K^\theta(x, \omega)$ adalah kernel dari transformasi Fourier fraksional dan $\overline{D}_x^r = \left(\frac{d}{dx} - ix \cot \theta \right)^r$, maka $\forall r \in \mathbb{N}_0$ diperoleh

1. $\overline{D}_x^r K^\theta(x, \omega) = (-i\omega \csc \theta)^r K^\theta(x, \omega)$,
2. $\int_{\mathbb{R}} \left(\overline{D}_x^r K^\theta(x, \omega) \right) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) (\overline{D}_x^*)^r f(x) dx$,
3. $\mathcal{F}^\theta \left\{ (\overline{D}_x^*)^r f(x) \right\}(\omega) = (-i\omega \csc \theta)^r \mathcal{F}^\theta \{ f(x) \}(\omega)$,

dengan

$$\overline{D}_x^* = - \left(\frac{d}{dx} + ix \cot \theta \right). \quad (3.22)$$

Bukti.

1. Dengan perhitungan langsung diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (K^\theta(x, \omega)) &= \frac{d}{dx} \left(C^\theta e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} \right) \\ &= C^\theta \frac{d}{dx} \left(e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} \right) \\ &= C^\theta \left(e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} \right) i(x \cot \theta - \omega \csc \theta) \\ &= K^\theta(x, \omega)(ix \cot \theta - i\omega \csc \theta). \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa

$$\left(\frac{d}{dx} - ix \cot \theta \right) K^\theta(x, \omega) = (-i\omega \csc \theta) K^\theta(x, \omega).$$

Lebih lanjut, diperoleh

$$\left(\frac{d}{dx} - ix \cot \theta \right)^r K^\theta(x, \omega) = (-i\omega \csc \theta)^r K^\theta(x, \omega).$$

2. Pertama, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} (\overline{D}_x K^\theta(x, \omega)) f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{d}{dx} - ix \cot \theta \right) K^\theta(x, \omega) \right) f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{d}{dx} K^\theta(x, \omega) \right) f(x) \right) dx - \int_{\mathbb{R}} ix \cot \theta K^\theta(x, \omega) f(x) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) dx - \int_{\mathbb{R}} ix \cot \theta K^\theta(x, \omega) f(x) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) \left(\frac{d}{dx} + ix \cot \theta \right) f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) \overline{D}_x^* f(x) dx.
\end{aligned}$$

Lebih lanjut, didapatkan

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{D}_x^r K^\theta(x, \omega) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) (\overline{D}_x^*)^r f(x) dx. \quad (3.23)$$

3. Dengan menggunakan hasil sebelumnya, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^\theta \left\{ (\overline{D}_x^*)^r f(x) \right\} (\omega) &= \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) (\overline{D}_x^*)^r f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{D}_x^r K^\theta(x, \omega) f(x) dx \\
&= (-i\omega \csc \theta)^r \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \\
&= (-i\omega \csc \theta)^r \mathcal{F}^\theta \{ f(x) \} (\omega).
\end{aligned}$$

■

3.5. Transformasi Fourier Fraksional untuk Persamaan Panas Satu Dimensi dan persamaan Laplace

Pada bagian ini digunakan transformasi Fourier fraksional (TFFr) untuk menyelesaikan persamaan panas dan persamaan Laplace. Pertama, akan dirumuskan persamaan panas satu dimensi dalam domain TFFr. Lebih lanjut,

pada bagian ini juga disajikan beberapa contoh untuk mengilustrasikan TFFr yang diusulkan.

3.5.1. Transformasi Fourier fraksional untuk persamaan panas satu dimensi

Sekarang mari kita perhatikan persamaan panas satu dimensi dalam domain transformasi Fourier fraksional (TFFr) sebagai berikut

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c^2 (\overline{D}_x^*)^2 u(x, t), \quad -\infty < x < \infty, t > 0. \quad (3.24)$$

Dalam kasus ini, syarat awalnya yaitu $u(x, 0) = f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, dan \overline{D}_x^* didefinisikan pada (3.22) dengan c adalah suatu konstanta tak nol.

Dengan mengalikan kernel dari TFFr di kedua sisi persamaan (3.24) kemudian mengintegalkannya terhadap x , diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = c^2 \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) (\overline{D}_x^*)^2 u(x, t) dx.$$

Persamaan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}^\theta(\omega, t)}{\partial t} &= c^2 \int_{\mathbb{R}} (\overline{D}_x^*)^2 K^\theta(t, \omega) u(x, t) dx \\ &= -c^2 \omega^2 \csc^2 \theta \hat{u}^\theta(\omega, t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Oleh karena itu,

$$\hat{u}^\theta(\omega, t) = C e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t}, \quad (3.26)$$

dengan C adalah suatu konstanta.

Selanjutnya, dengan menggunakan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$, didapatkan bahwa

$$\hat{u}^\theta(\omega, 0) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx = C. \quad (3.27)$$

Substitusi persamaan (3.27) ke persamaan (3.26) diperoleh

$$\hat{u}^\theta(\omega, t) = \left(\int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \right) e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t}. \quad (3.28)$$

Dengan mengaplikasikan invers dari TFFr dalam (3.28), dapat dilihat bahwa

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-\theta} \{ \hat{u}^\theta(\omega, t) \} (x, t). \quad (3.29)$$

Berdasarkan persamaan (3.12), lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-\theta} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \right) e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t} \right\} (x, t) \\ &= \overline{C}^\theta \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} \left(\int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \right) e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t} d\omega \\ &= \overline{C}^\theta C^\theta \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} f(x) dx \right) e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} f(x) dx \right) e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t} d\omega \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{2\pi \sin \theta} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega \csc \theta} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{ix^2 \cot \theta}{2}} e^{-ix\omega \csc \theta} f(x) dx \right) e^{(-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta) t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Misalkan

$$h^\theta(x) = e^{\frac{ix^2 \cot \theta}{2}} f(x), \quad (3.31)$$

dan

$$\omega \csc \theta = v. \quad (3.32)$$

Maka persamaan (3.30) di atas menjadi

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{2\pi \sin \theta} \sin \theta \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-c^2 v^2 t} dv \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h^\theta(x) dx \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-c^2 v^2 t} dv \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h^\theta(x) dx \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-c^2 v^2 t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h^\theta(x) dx \right) dv \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-c^2 v^2 t} \mathcal{F}\{h^\theta(x)\} dv.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Berdasarkan persamaan (3.5), didapatkan

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}\right\} = e^{-c^2 v^2 t}. \tag{3.34}$$

Substitusi persamaan (3.34) ke persamaan (3.33) dihasilkan

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}\right\} \mathcal{F}\{h^\theta(x)\} e^{ixv} dv \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2c^2 t}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}\right\} \mathcal{F}\{h^\theta(x)\} e^{ixv} dv
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Aplikasikan persamaan (3.9) pada persamaan (3.35), didapatkan

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2c^2 t}} \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}\right\} \mathcal{F}\{h^\theta(x)\}\right\} \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2c^2 t}} \left(e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}} * h^\theta(x)\right) \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2c^2 t}} \left(e^{\frac{-x^2}{4c^2 t}} * e^{\frac{ix^2 \cot \theta}{2}} f(x)\right) \\
 &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} e^{\frac{iy^2 \cot \theta}{2}} f(y) dy.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dalam kasus khusus, ketika $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka persamaan (3.35) di atas menjadi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}} f(y) dy, \tag{3.37}$$

yang merupakan solusi persamaan panas dengan menggunakan transformasi Fourier klasik.

Untuk mengilustrasikan hasil di atas, disajikan contoh berikut.

Contoh 3.5.1 Tentukan solusi $u(x, t)$ dari persamaan (3.36) dengan $c = 1$ dan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & x \text{ lainnya.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Solusi. Substitusi persamaan (3.38) ke persamaan (3.36), diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{\frac{iy^2 \cot \theta}{2}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{y^2}{4t} + iy^2 \frac{\cot \theta}{2} + \frac{2xy}{4t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-y^2 \left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) + \frac{2xy}{4t}} dy. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Lebih lanjut, persamaan (3.39) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(y^2 - \frac{2xy}{4t \left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right)}\right)} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(y^2 - \frac{2xy}{1 - i2t \cot \theta}\right)} dy. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Kemudian, persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(\left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta} - y\right)^2 - \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2\right)} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta} - y\right)^2} e^{\left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t} + \left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta} - y\right)^2} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t} + \left(\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}} \frac{x}{1 - i2t \cot \theta} - \sqrt{\frac{1}{4t} - i \frac{\cot \theta}{2}} y\right)^2} dy. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Jika kita menyatakan bahwa

$$z = \frac{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x}{1 - i2t \cot \theta} - \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} y,$$

Oleh karena itu, didapatkan

$$\begin{aligned} & u(x, t) \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t} + \left(\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\frac{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x}{1 - i2t \cot \theta} - \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x + \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}}} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}}} \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t} + \left(\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2}}{\sqrt{4\pi t} \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x}{1 - i2t \cot \theta} + \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x}{1 - i2t \cot \theta} - \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Oleh karenanya, diperoleh

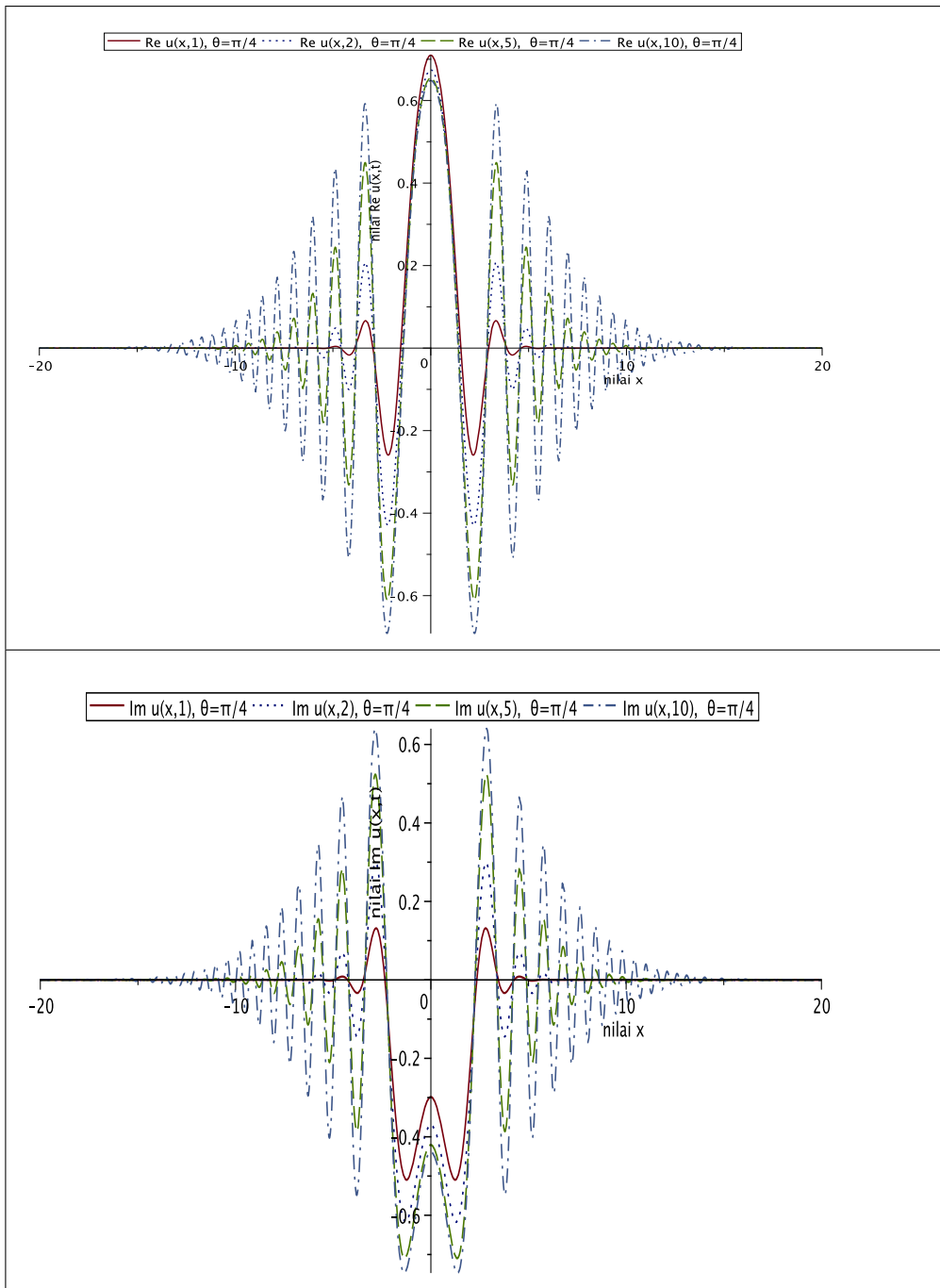
$$\begin{aligned} & u(x, t) \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2} - \frac{x^2}{4t} + \left(\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}\right) \left(\frac{x}{1 - i2t \cot \theta}\right)^2}}{2\sqrt{4t} \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}}} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x}{1 - i2t \cot \theta} + \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} \right] \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} x}{1 - i2t \cot \theta} - \sqrt{\frac{1}{4t} - \frac{i \cot \theta}{2}} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Disini,

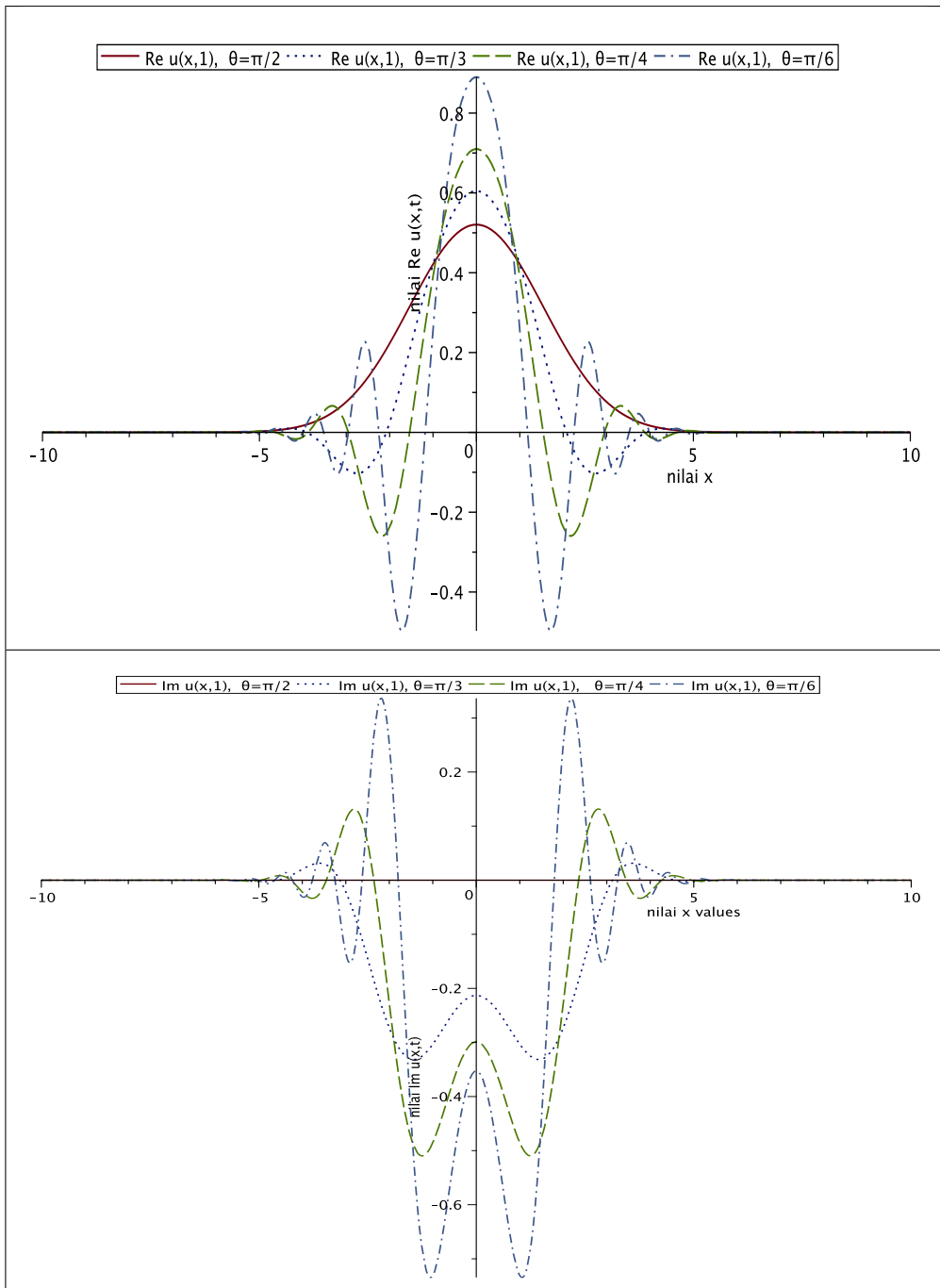
$$\operatorname{erf}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\omega e^{-z^2} dz, \quad (3.44)$$

untuk setiap ω .

Simulasi dari persamaan (3.43) untuk sebarang θ dan $c = 1$ ditunjukkan pada Tabel 3.1.



Gambar 3.1 Grafik solusi (bagian real dan imajiner) dari Contoh 3.5.1 untuk $\frac{\pi}{4}$ dan $t=1, 2, 5, 10$.



Gambar 3.2 Grafik solusi (bagian real dan imajiner) dari Contoh 1 untuk $t=1$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

Tabel 3.1 Solusi yang diperoleh dari Contoh 3.5.1 untuk sebarang θ dan $c = 1$

θ	c	$u(x, t)$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}} \right) \right]$
$\frac{\pi}{3}$	1	$\frac{e^{-\frac{tx^2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i2t)}}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i2t}{\sqrt{3}}}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{12t-i8\sqrt{3}t^2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}-i2t}{4\sqrt{3}t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{12t-i8\sqrt{3}t^2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}-i2t}{4\sqrt{3}t}} \right) \right]$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{e^{-\frac{tx^2}{1-i2t}}}{2\sqrt{1-i2t}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+(1-i2t)}{\sqrt{4t-i8t^2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-(1-i2t)}{\sqrt{4t-i8t^2}} \right) \right]$
$\frac{\pi}{6}$	1	$\frac{e^{-\frac{3tx^2}{1-i2\sqrt{3}t}}}{2\sqrt{1-i2\sqrt{3}t}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4t-i8\sqrt{3}t^2}} + \sqrt{\frac{1-i2\sqrt{3}t}{4t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4t-i8\sqrt{3}t^2}} - \sqrt{\frac{1-i2\sqrt{3}t}{4t}} \right) \right)$

Pada tabel 3.1, dapat dilihat bahwa untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ persamaan (3.39) mengarah ke

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad (3.45)$$

yang sama dengan solusi persamaan panas klasik menggunakan transformasi Fourier seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3. Gambar 3.1 dan 3.2 menampilkan solusi dari Contoh 3.5.1 untuk sebarang θ dan t .

Sekarang, perhatikan persamaan panas dengan koefisien tidak konstan sebagai berikut

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = t(\overline{D}_x^*)^2 u(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (3.46)$$

dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$, dan $\overline{D}_x^* = -\left(\frac{d}{dx} + ix \cot(\theta)\right)$.

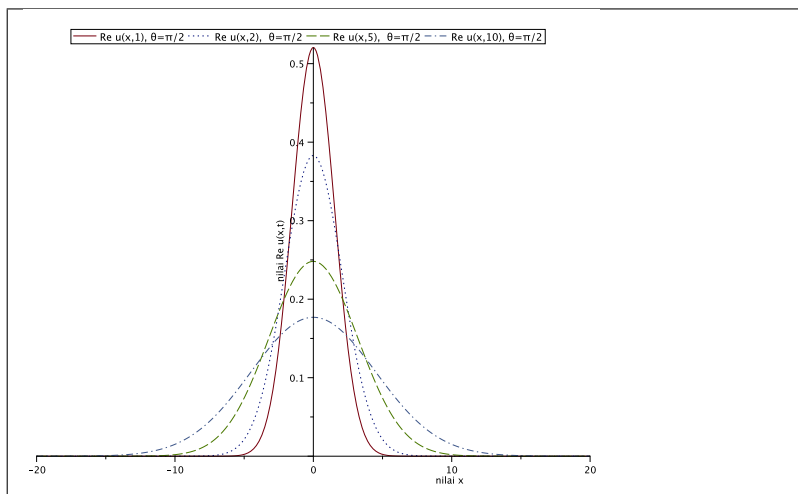
Dengan menggunakan prosedur yang sama, diperoleh

$$u(x, t) = \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{t\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t^2}} e^{\frac{iy^2 \cot \theta}{2}} f(y) dy. \quad (3.47)$$

3.5.2. Transformasi Fourier fraksional untuk persamaan Laplace

Perhatikan persamaan Laplace satu dimensi pada domain TFFr berikut

$$(\overline{D}_x^*)^2 u(x, y) + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0, \quad (3.48)$$



Gambar 3.3 Grafik solusi dari contoh 3.5.1 untuk $t=1, 2, 5, 10$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$.

dengan syarat batas

$$u(x, 0) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0.$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan laplace yang disebutkan di atas. Pertama, perhatikan bahwa

$$\mathcal{F}^\theta \left\{ (\overline{D}_x^*)^2 u(x, y) \right\} (\omega, y) = -\omega^2 \csc^2 \theta \hat{u}^\theta(\omega, y) \quad (3.49)$$

dan

$$\mathcal{F}^\theta \{ u_{yy} \} = \frac{\partial^2 \hat{u}^\theta(\omega, y)}{\partial y^2}. \quad (3.50)$$

Dengan aplikasi TFFr di kedua sisi (3.48) terhadap x , kemudian memasukkan persamaan (3.49) dan (3.50) ke dalam persamaan (3.48), maka dapat dilihat bahwa

$$\frac{\partial^2 \hat{u}^\theta(\omega, y)}{\partial y^2} = \omega^2 \csc^2 \theta \hat{u}^\theta(\omega, y). \quad (3.51)$$

Solusi umum dari persamaan (3.51) yaitu

$$\hat{u}^\theta(\omega, y) = A(\omega)e^{\csc(\theta)\omega y} + B(\omega)e^{-\csc(\theta)\omega y}, \quad (3.52)$$

untuk suatu fungsi koefisien $A(\omega)$ dan $B(\omega)$. Untuk memperoleh koefisien tersebut, digunakan syarat batas berikut

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$$

dan

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \hat{u}^\theta(\omega, y) = 0.$$

Ini menunjukkan bahwa $A(\omega) = 0$ untuk $\omega > 0$ dan $B(\omega) = 0$ untuk $\omega < 0$. Oleh karena itu,

$$\hat{u}^\theta(\omega, y) = C(\omega)e^{-\csc(\theta)|\omega|y} \quad (3.53)$$

dengan $C(\omega) = A(\omega)$, $\omega < 0$ dan $C(\omega) = B(\omega)$, $\omega > 0$.

Selanjutnya, berdasarkan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$, diperoleh

$$\hat{u}^\theta(\omega, 0) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx = C(\omega). \quad (3.54)$$

Dengan mengaplikasikan invers dari TFFr yang didefinisikan oleh persamaan (3.12), maka didapatkan

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-\theta} \left\{ \hat{f}(\omega) e^{-\csc(\theta)|\omega|y} \right\} \\ &= \mathcal{F}^{-\theta} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \right) e^{-\csc(\theta)|\omega|y} \right\} \\ &= \overline{C^\theta} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} \left(\int_{\mathbb{R}} K^\theta(x, \omega) f(x) dx \right) e^{-\csc(\theta)|\omega|y} d\omega \\ &= \overline{C^\theta} C^\theta \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} f(x) dx \right) e^{-\csc(\theta)|\omega|y} d\omega \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x^2+\omega^2)\frac{\cot \theta}{2} + ix\omega \csc \theta} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x^2+\omega^2)\frac{\cot \theta}{2} - ix\omega \csc \theta} f(x) dx \right) e^{-\csc(\theta)|\omega|y} d\omega \\
&= \frac{e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{2\pi \sin \theta} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega \csc \theta} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix^2\frac{\cot \theta}{2}} e^{-ix\omega \csc \theta} f(x) dx \right) e^{-\csc(\theta)|\omega|y} d\omega.
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.31) dan (3.32), diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{2\pi \sin \theta} \sin \theta \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-|v|y} dv \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h^\theta(x) dx \\
&= \frac{e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-|v|y} dv \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h^\theta(x) dx \\
&= \frac{e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-|v|y} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h^\theta(x) dx \right) dv \\
&= \frac{e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} e^{-|v|y} \mathcal{F} \{ h^\theta(x) \} dv. \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Selanjutnya aplikasikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.56), maka persamaan di atas menjadi

$$u(x, y) = \frac{e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right\} \mathcal{F} \{ h^\theta(x) \} e^{ixv} dv. \tag{3.57}$$

Dengan menerapkan persamaan (3.4) dan (3.9), dihasilkan

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right\} \mathcal{F} \{ h^\theta(x) \} \right\} \\
&= e^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}} \left(\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) * h^\theta(x) \right) \\
&= \frac{ye^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h^\theta(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds \\
&= \frac{ye^{-ix^2\frac{\cot \theta}{2}}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is^2\frac{\cot \theta}{2}}}{(x-s)^2 + y^2} f(s) ds. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Dalam kasus khusus, untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, persamaan (3.58) menjadi

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-s)^2 + y^2} f(s) ds. \tag{3.59}$$

yang merupakan solusi persamaan Laplace klasik dengan menggunakan transformasi Fourier (lihat Asmar, 2000).

Contoh 3.5.2 Misalkan akan dicari penyelesaian dari masalah Dirichlet pada setengah bidang atas (upper half plane) dari persamaan (3.58) di atas dengan fungsi Gauss

$$f(x) = e^{-x^2}. \quad (3.60)$$

Solusi. Dapat diverifikasi bahwa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is^2 \frac{\cot \theta}{2}}}{(x-s)^2 + y^2} e^{-s^2} ds &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(i \frac{\cot \theta}{2} - 1)s^2}}{(x-s)^2 + y^2} ds \\ &= \frac{\pi}{y} e^{-(x^2 - y^2) - \frac{iy^2 \cot \theta}{2}} \left(e^{-i2xy - xy \cot \theta} - e^{i2xy + xy \cot \theta} \right). \end{aligned}$$

Substitusi persamaan di atas ke persamaan (3.58), didapatkan

$$u(x, y) = e^{-(x^2 - y^2) - \frac{iy^2 \cot \theta}{2}} \left(e^{-i2xy - xy \cot \theta} - e^{i2xy + xy \cot \theta} \right). \quad (3.61)$$

Simulasi dari persamaan (3.61) untuk nilai θ sebarang ditunjukkan pada Tabel 3.2.

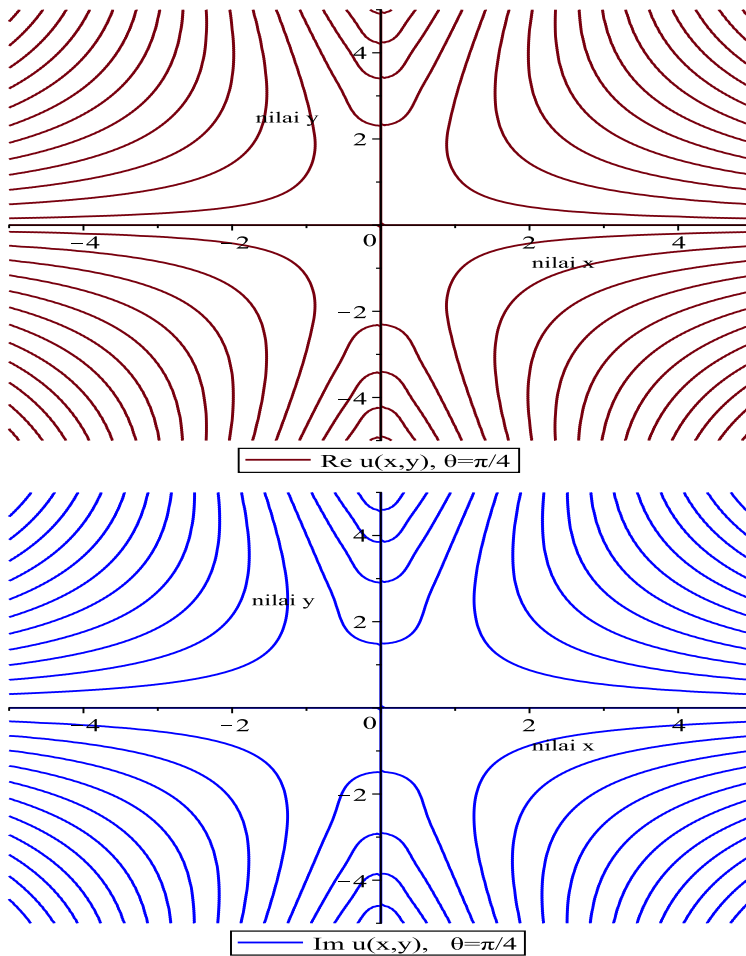
Tabel 3.2 Solusi yang diperoleh dari Contoh 3.5.2 untuk nilai θ sebarang

θ	$u(x, t)$
$\frac{\pi}{2}$	$-2ie^{-(x^2 - y^2)} \sin(xy)$
$\frac{\pi}{3}$	$-e^{-(x^2 - y^2) - \frac{iy^2}{2\sqrt{3}}} \left(e^{-i2xy - \frac{xy}{\sqrt{3}}} - e^{i2xy + \frac{xy}{\sqrt{3}}} \right)$
$\frac{\pi}{4}$	$-e^{-(x^2 - y^2) - \frac{iy^2}{2}} \left(e^{-i2xy - xy} - e^{i2xy + xy} \right)$
$\frac{\pi}{6}$	$-e^{-(x^2 - y^2) - \frac{i\sqrt{3}y^2}{2}} \left(e^{-i2xy - \sqrt{3}xy} - e^{i2xy + \sqrt{3}xy} \right)$

Pada Tabel 3.2, terlihat bahwa untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ persamaan (3.61) di atas menjadi

$$u(x, y) = -2ie^{-(x^2 - y^2)} \sin(xy). \quad (3.62)$$

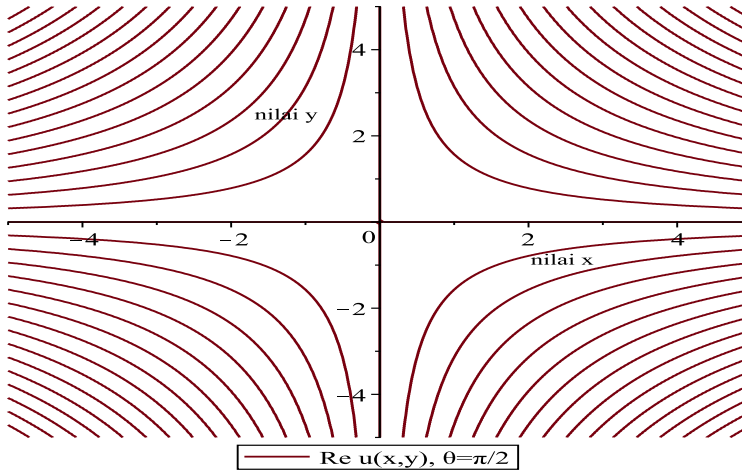
Gambar 3.5 menampilkan solusi dari Contoh 3.5.2 untuk nilai θ sebarang. Dari Tabel 3.2, dapat disimpulkan bahwa persamaan (3.61) lebih fleksibel dibandingkan persamaan (3.62) karena adanya parameter tambahan θ .



Gambar 3.4 Bagian real dan imajiner dari grafik solusi Contoh 3.5.2 untuk $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Sekarang, perhatikan permasalahan (3.58) pada strip berikut ini

$$(\overline{D}_x^*)^2 u(x, y) + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad a < y < b, \quad (3.63)$$



Gambar 3.5 Grafik solusi dari Contoh 3.5.2 untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$.

dengan syarat batas

$$u(x, a) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad (3.64)$$

dengan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Dengan penerapan TFFr pada kedua ruas persamaan (3.63) dan (3.64) terhadap x , didapatkan

$$\hat{u}^\theta(\omega, y) = A(\omega)e^{y\omega \csc \theta} + B(\omega)e^{-y\omega \csc \theta}, \quad (3.65)$$

dengan

$$A(\omega) = \frac{\hat{f}^\theta(\omega)e^{-\omega b \csc(\theta)} - \hat{g}^\theta(\omega)e^{-\omega a \csc(\theta)}}{2 \sinh(\omega(a-b) \csc(\theta))}, \quad (3.66)$$

dan

$$B(\omega) = -\frac{\hat{f}^\theta(\omega)e^{\omega b \csc(\theta)} - \hat{g}^\theta(\omega)e^{\omega a \csc(\theta)}}{2 \sinh(\omega(a-b) \csc(\theta))}. \quad (3.67)$$

Perhatikan bahwa

$$\omega \csc \theta = v, \quad h_1^\theta(x) = e^{\frac{ix^2 \cot \theta}{2}} f(x), \quad h_2^\theta(x) = e^{\frac{ix^2 \cot \theta}{2}} g(x), \quad (3.68)$$

maka diperoleh

$$\hat{f}^\theta = C^\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h_1^\theta(x) dx = C^\theta \sqrt{2\pi} e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v), \quad (3.69)$$

dan

$$\hat{g}^\theta = C^\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} h_2^\theta(x) dx = C^\theta \sqrt{2\pi} e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v). \quad (3.70)$$

Substitusi persamaan (3.69) dan (3.70) ke (3.66) and (3.67), masing-masing dihasilkan

$$A(\omega) = C^\theta \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \left(\mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v) e^{-bv} - \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v) e^{-av} \right)}{2 \sinh(v(a-b))}, \quad (3.71)$$

$$B(\omega) = -C^\theta \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \left(\mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v) e^{bv} - \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v) e^{av} \right)}{2 \sinh(v(a-b))}. \quad (3.72)$$

Dengan menerapkan invers dari TFFr yang didefinisikan pada persamaan (3.12), maka didapatkan

$$\begin{aligned} & u(x, y) \\ &= \mathcal{F}^{-\theta} \{A(\omega) e^{vy} + B(\omega) e^{-vy}\} \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixv} \left(\mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v) e^{v(y-b)} - \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v) e^{v(y-a)} \right)}{2 \sinh(v(a-b))} dv \\ &\quad - \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixv} \left(\mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v) e^{v(b-y)} + \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v) e^{v(a-y)} \right)}{2 \sinh(v(a-b))} dv \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} \frac{\mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v) (e^{v(y-b)} - e^{-v(y-b)}) - \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v) (e^{v(y-a)} - e^{-v(y-a)})}{2 \sinh(v(a-b))} dv \\ &= \frac{e^{-\frac{ix^2 \cot \theta}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} \frac{\mathcal{F} \{h_1^\theta(x)\} (v) \sinh(v(y-b)) - \mathcal{F} \{h_2^\theta(x)\} (v) \sinh(v(y-a))}{\sinh(v(a-b))} dv. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sinh(v(y-b))}{\sinh(v(a-b))} e^{ivx} dv &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{v(y-b)} - e^{v(b-y)}}{e^{v(a-b)} - e^{v(b-a)}} e^{ivx} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{v(y-b+ix)} - e^{v(b-y+ix)}}{e^{v(a-b)} - e^{v(b-a)}} dv. \end{aligned}$$

Misalkan $p = y - b + ix$, $q = b - y + ix$, $r = a - b$, dan $s = b - a$, maka persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{pv} - e^{qv}}{e^{rv} - e^{sv}} dv &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(p-r)v} - e^{(q-r)v}}{1 - e^{-(r-s)v}} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(r-p)v} - e^{-(r-q)v}}{1 - e^{(s-r)v}} dv. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Misalkan $t = (r - s)v$, dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\left(\frac{r-p}{r-s}\right)t} - e^{-\left(\frac{r-q}{r-s}\right)t}}{1 - e^{-t}} \frac{dx}{r-s} &= \frac{1}{r-s} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\left(\frac{r-p}{r-s}\right)t} - e^{-\left(\frac{r-q}{r-s}\right)t}}{1 - e^{-t}} dt \\ &= \frac{1}{r-s} \left(\psi\left(\frac{r-q}{r-s}\right) - \psi\left(\frac{r-p}{r-s}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

dengan

$$\psi(n) - \psi(m) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tm} - e^{-tn}}{1 - e^{-t}} dt, \quad m = \frac{a - 2b + y - ix}{2(a-b)}, \quad n = \frac{a - y - ix}{2(a-b)}. \quad (3.76)$$

Ini berarti bahwa

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2(a-b)} \left(\psi\left(\frac{a-y-ix}{2(a-b)}\right) - \psi\left(\frac{a-2b+y-ix}{2(a-b)}\right) \right) \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sinh(v(y-b))}{\sinh(v(a-b))}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Dengan menggunakan prosedur yang sama maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2(a-b)} \left(\psi\left(\frac{2a-b-y-ix}{2(a-b)}\right) - \psi\left(\frac{b+y-ix}{2(a-b)}\right) \right) \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sinh(v(y-a))}{\sinh(v(a-b))}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
u(x, y) = & \frac{e^{-ix^2 \cot \theta}}{4\pi(a-b)} \int_{\mathbb{R}} \left[\psi \left(\frac{a-y-i(x-s)}{2(a-b)} \right) - \psi \left(\frac{a-2b+y-i(x-s)}{2(a-b)} \right) \right] \\
& e^{\frac{is^2 \cot \theta}{2}} f(s) ds - \frac{e^{-ix^2 \cot \theta}}{4\pi(a-b)} \int_{\mathbb{R}} \left[\psi \left(\frac{2a-b-y-i(x-s)}{2(a-b)} \right) \right. \\
& \left. - \psi \left(\frac{b+y-i(x-s)}{2(a-b)} \right) \right] e^{\frac{is^2 \cot \theta}{2}} g(s) ds. \tag{3.79}
\end{aligned}$$

3.6. Teorema Sampling untuk TFFr

Pada bagian ini, pertama-tama diperkenalkan *band limited* untuk transformasi Fourier fraksional. Diperoleh hasil berikut, yang akan berguna untuk menyelesaikan versi diskrit dari persamaan panas.

Definisi 3.6.1 *Signal* $f(t)$ disebut *band limited* yang terkait TFFr, jika terdapat bilangan positif σ yang memenuhi $\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = 0$ untuk setiap $|\omega| > \sigma$.

Lemma 3.6.1 (Zhao & Li, 2023; Zayed, 2021) Misalkan $f(t)$ adalah *band limited* pada σ dalam domain transformasi Fourier fraksional, yaitu,

$$f(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) \overline{K_\theta(t, \omega)} dt,$$

maka

$$f(t) = e^{i(t^2 \cot \theta)/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} f(t_n) \frac{\sin(\sigma \csc \theta(t - t_n))}{\sigma \csc \theta(t - t_n)}, \tag{3.80}$$

dengan $t_n = n\pi \frac{\sin \theta}{\sigma}$.

Sebagai konsekuensi langsung dari lemma 3.6.1, diperoleh hasil penting berikut.

Teorema 3.6.2 Berdasarkan asumsi pada lemma 3.6.1, maka berlaku

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) &= C^\theta e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} (U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi)) \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} e^{\frac{-in\pi\omega}{\sigma}}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

dengan

$$U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi) = \begin{cases} 1, & -\sigma\pi < \omega < \sigma\pi \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Bukti. Substitusi persamaan (3.80) ke persamaan (3.10), didapatkan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) &= C^\theta \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta} dt \\ &= C^\theta \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{t^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} f(t_n) \text{sinc}(\sigma \csc \theta (t - t_n)) e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta} dt \\ &= C^\theta \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} f(t_n) \text{sinc}(\sigma \csc \theta (t - t_n)) e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} e^{-it\omega \csc \theta} dt. \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) &= C^\theta e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} f(t_n) \text{sinc}(\sigma \csc \theta (t - t_n)) e^{-it\omega \csc \theta} dt \\ &= C^\theta e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(\sigma \csc \theta (t - t_n)) e^{-it\omega \csc \theta} dt \\ &= C^\theta e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}\left(\sigma\pi \frac{(t - t_n)}{\pi \sin \theta}\right) e^{\frac{-it\omega}{\sin \theta}} dt \\ &= C^\theta e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\left(\left(\frac{\sigma\pi}{\pi \sin \theta}\right)t - \left(\frac{\sigma\pi t_n}{\pi^2 \sin \theta}\right)\pi\right)}{\left(\frac{\sigma\pi}{\pi \sin \theta}\right)t - \left(\frac{\sigma\pi t_n}{\pi^2 \sin \theta}\right)\pi} e^{\frac{-it\omega}{\sin \theta}} dt \\ &= C^\theta e^{i\frac{\omega^2 \cot \theta}{2}} (U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi)) \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-i(t_n^2 \cot \theta)/2} e^{\frac{-in\pi\omega}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Hasil di atas akan menghasilkan teorema berikut.

Teorema 3.6.3 Misalkan syarat awal $f(x)$ adalah band limited pada σ dalam domain TFFr. Maka, solusi dari persamaan (3.24) diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 & u(x, t) \\
 &= \frac{e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2} + \frac{tc^2 \csc \theta}{4c^2}}}{2\sigma} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{t \csc \theta}}{2c} + c\sigma\pi\sqrt{t \csc \theta} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{t \csc \theta}}{2c} - c\sigma\pi\sqrt{t \csc \theta} \right) \right) \\
 & \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}}. \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

Bukti. Dari persamaan (3.12) and (3.29), disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \mathcal{F}^{-\theta} \left\{ \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{-c^2 \omega^2 \csc^2 \theta} \right\} \\
 &= \overline{C}^\theta \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{-c^2 \omega^2 \csc \theta t} e^{-i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + it\omega \csc \theta} d\omega.
 \end{aligned}$$

Dengan memasukkan persamaan (3.81) ke persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \overline{C}^\theta \int_{\mathbb{R}} C^\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} (U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi)) \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} \\
 & \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-\frac{it_n \cot \theta}{2}} e^{-\frac{in\pi\omega}{\sigma}} e^{-c^2 \omega^2 \csc \theta t} e^{-i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + it\omega \csc \theta} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} (U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi)) \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} \\
 & \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-\frac{it_n \cot \theta}{2}} e^{-c^2 \omega^2 \csc \theta t} e^{-\frac{it^2 \cot \theta}{2}} e^{-\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} e^{it\omega \csc \theta} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{-\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-\frac{it_n \cot \theta}{2}} \\
 & \quad \int_{\mathbb{R}} (U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi)) e^{-c^2 \omega^2 \csc \theta t + it\omega \csc \theta} d\omega.
 \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{-\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \\
 & \quad \int_{\mathbb{R}} (U_0(\omega + \sigma\pi) - U_0(\omega - \sigma\pi)) e^{-c^2 \csc \theta t \omega^2 + it \csc \theta \omega} d\omega.
 \end{aligned}$$

Lebih lanjut, diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \int_{-\sigma\pi}^{\sigma\pi} e^{-c^2 \csc \theta t \omega^2 + it \csc \theta \omega} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \int_{-\sigma\pi}^{\sigma\pi} e^{-c^2 \csc \theta t \left(\omega^2 - \frac{it \csc \theta}{c^2} \omega \right)} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \int_{-\sigma\pi}^{\sigma\pi} e^{-c^2 \csc \theta t \left(\omega^2 - \frac{i\omega}{c^2} \right)} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \int_{-\sigma\pi}^{\sigma\pi} e^{-c^2 \csc \theta t \left(\left(\omega - \frac{i}{2c^2} \right)^2 + \frac{1}{4c^4} \right)} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\sigma\pi}^{\sigma\pi} e^{-c^2 \csc \theta t \left(\frac{i}{2c^2} - \omega \right)^2} e^{\frac{c^2 \csc \theta t}{4c^4}} d\omega.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2} + \frac{c^2 \csc \theta t}{4c^4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \int_{-\sigma\pi}^{\sigma\pi} e^{-\left(\frac{\sqrt{\csc \theta} t i}{2c} - \sqrt{\csc \theta} t \omega \right)} d\omega \\
 &= |C^\theta|^2 \frac{\pi \sin \theta}{\sigma} e^{\frac{it^2 \cot \theta}{2} + \frac{tc^2 \csc \theta}{4c^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) e^{-it_n \frac{\cot \theta}{2}} \\
 &\quad \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{t \csc \theta} i}{2c} + c\sigma\pi \sqrt{t \csc \theta} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{t \csc \theta} i}{2c} - c\sigma\pi \sqrt{t \csc \theta} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Teorema telah terbukti. ■

3.7. Kesimpulan

Dalam bagian ini, diperoleh solusi persamaan panas satu dimensi dan persamaan Laplace dengan menggunakan transformasi Fourier fraksional. Solusinya diperoleh dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Fourier fraksional dan hubungan antara teorema konvolusi untuk transformasi Fourier fraksional dan teorema konvolusi untuk transformasi Fourier. Solusi persamaan panas dengan menggunakan sampling formula dalam transformasi Fourier fraksional juga diselidiki secara rinci dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Bernardo, L.M.; Soares, O.D.D. Fractional Fourier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Am. A* **1994**, *11*, 2622–2626.
- Liu, S.; Ren, H.; Zhang, J.; Zhang, X. Image-scaling problem in the optical fractional Fourier transform. *Appl. Opt.* **1997**, *36*, 5671–5674.
- Ozaktas, H.M.; Aytür, O. Fractional Fourier domains. *Signal Process.* **1995**, *46*, 119–124
- Mendlovich, D.; Ozaktas, H.M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation 1. *J. Opt. Soc. Am. A* **1993**, *10*, 1875–1881.
- Ozaktas, H.M.; Zalevsky, Z.; Kutay-Alper, M. *The Fractional Fourier Transform: With Applications in Optics and Signal Processing*; Wiley: New York, NY, USA, 2001.
- Namias, V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *IMA J. Appl. Math.* **1980**, *25*, 241–265.
- Qiu, F.; Liu, Z.; Liu, R.; Quan, X.; Tao, C.; Wang, Y. Fluid flow signals processing based on fractional Fourier transform in a stirred tank reactor. *ISA Trans.* **2019**, *90*, 268–277.
- Prasad, A.; Manna, S.; Mahato, A.; Singh, V.K. The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform. *J. Comput. Appl. Math.* **2014**, *259*, 660–671.
- Bahri, M.; Ashino, R. Solving generalized wave and heat equations using linear canonical transform and sampling formulae. *Abstr. Appl. Anal.* **2020**, *2020*, 1273194.

- Shah, F.A.; Lone, W.Z.; Nisar, K.S.; Khalifa, A.S. Analytical solutions of generalized differential equations using quadratic-phase Fourier transform. *Aims Math.* **2022**, *7*, 1925–1940.
- McBride, A.C.; Kerr, F.H. On Namias's fractional Fourier transforms. *IMA J. Appl. Math.* **1987**, *39*, 159–175.
- Almeida, L.B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Trans. Signal Process.* **1994**, *42*, 3084–3091.
- Zayed, A.I. On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms. *IEEE Signal Process. Lett.* **1996**, *3*, 310–311.
- Zayed, A.I. Fractional Fourier transform of generalized functions. *Integral Transform. Spec. Funct.* **1998**, *7*, 299–312.
- Zayed, A.I. A convolution and product teorema for the fractional Fourier transform. *IEEE Process. Lett.* **1998**, *5*, 101–103.
- Zayed, A.I. Two-dimensional fractional Fourier transform and some of its properties. *Integral Transform. Spec. Funct.* **2018**, *29*, 553–570.
- Shi, J.; Sha, X.; Shong, X.; Zhang, N. Generalized convolution teorema associated with fractional Fourier transform. *Wirel. Commun. Mob. Comput.* **2012**, *14*, 1340–1351.
- Bahri, M.; Karim, S.A.A. Fractional Fourier transform: Main properties and inequalities. *Mathematics* **2023**, *11*, 1234.
- Bahri, M.; Ashino, R. Fractional Fourier Transform: Duality, correlation teorema and applications. In Proceedings of the 2022 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, Toyama, Japan, 9–11 September 2022.

- Pei, S.C. Two-dimensional affine generalized fractional Fourier transform. *IEEE Trans. Signal Proc.* **2001**, *49*, 878–897.
- Chen, W.; Fu, Z.; Grafakos, L.; Wu, Y. Fractional Fourier transforms on L^p and applications. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **2021**, *55*, 71–96.
- Sahin, A.; Kutay, M.A.; Ozaktas, H.M. Nonseparable two-dimensional fractional Fourier transform. *Appl. Opt.* **1998**, *37*, 5444–5453.
- Kutay, M.A.; Ozaktas, H.M.; Arikan, O.; Onural, L. Optimal filtering in fractional Fourier domains. *IEEE Trans. Signal Process.* **1997**, *45*, 1129–1143.
- Benedicks, M. On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. *J. Math. Anal. Appl.* **1985**, *106*, 180–183.
- Anh, P.K.; Castro, L.P.; Thao, P.T.; Tuan, N.M. Two new convolutions for the fractional Fourier transform. *Wirel. Pers. Commun.* **2017**, *92*, 623–637.
- Guanlei, X.; Xiatong, W.; Xiaogang, X. Novel uncertainty relations associated with fractional Fourier transform. *Chin. Phys. B.* **2010**, *19*, 014203.
- Asmar, N.H. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed.; Pearson Prentice Hall: Hoboken, NY, USA, 2000.
- Zhao, H.; Li, B.Z. Unlimited Sampling teorema Based on Fractional Fourier Transform. *Fractal Fract.* **2023**, *7*, 338.
- Zayed, A.I. Sampling teorema for two dimensional fractional Fourier transform. *Signal Process.* **2021**, *181*, 107902.

BAB IV

METODE TRANSFORMASI FOURIER FRAKSIONAL *COUPLED* DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI

4.1. Abstrak

Pada bab ini, transformasi Fourier fraksional *coupled* digunakan dalam menyelesaikan persamaan panas dua-dimensi. Pertama-tama, konsep transformasi Fourier fraksional *coupled* dan relasinya dengan transformasi Fourier dua-dimensi akan ditunjukkan. Selanjutnya, operator turunan dan teorema yang bersesuaian dengan transformasi ini dirumuskan, untuk digunakan dalam penyelesaian persamaan panas dua-dimensi. Setelah itu, disajikan contoh untuk menggambarkan perbandingan solusi yang diperoleh dengan hasil pada metode transformasi Fourier dua-dimensi.

Kata Kunci: transformasi Fourier; transformasi Fourier fraksional *coupled*; persamaan panas dua-dimensi.

4.2. Pendahuluan

Transformasi Fourier fraksional (TFFr), yang merupakan generalisasi dari transformasi Fourier, telah mendapat banyak perhatian karena penerapannya yang penting dalam analisis sinyal, optik, dan pemulihan sinyal dan juga karena kemampuannya untuk menangani beberapa masalah matematika yang tidak dapat ditangani oleh transformasi Fourier standar (Ozaktas *et al.*, 1999). Transformasi Fourier fraksional muncul secara implisit dalam karya N. Wiener pada tahun 1929 sebagai cara untuk menyelesaikan jenis persamaan diferen-

sial biasa dan parsial tertentu yang timbul dalam mekanika kuantum (Mendlovic *et al.*, 1998). Tidak menyadari karya Wiener, V. Namias pada tahun 1980 memperkenalkan transformasi, yang disebutnya TFFr, juga untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dan parsial yang timbul dalam mekanika kuantum dari kuadrat klasik Hamiltonian. Karyanya kemudian disempurnakan oleh McBride dan Kerr (Namias, 1980).

Kajian tentang transformasi Fourier fraksional terus berkembang. Transformasi Fourier fraksional telah diperluas ke n -dimensi menggunakan produk tensor dari n salinan transformasi satu-dimensi (Zayed, 2018). Baru-baru ini, telah diperkenalkan varian baru dari transformasi Fourier fraksional dua dimensi yaitu transformasi Fourier fraksional *coupled* (TFFrC). Transformasi ini bukan merupakan produk tensor dari dua transformasi satu dimensi yang telah dikenal sebelumnya. Dalam transformasi baru ini, variabel-variabelnya tidak dapat dipisahkan (Zayed, 2019 dan Shah *et al.*, 2022).

Sebagaimana penelitian-penelitian terdahulu yang banyak mengkaji tentang penerapan transformasi Fourier maupun transformasi Fourier fraksional dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial, maka penelitian ini akan mengkaji tentang mengeksplorasi solusi persamaan panas dua dimensi menggunakan transformasi Fourier fraksional *coupled*. Bab ini ini diuraikan sebagai berikut. Bagian 4.3 berisi definisi dan hasil yang terkait dengan transformasi Fourier fraksional *coupled*. Hubungan antara transformasi Fourier fraksional *coupled* dan transformasi Fourier juga disajikan pada bagian ini. Bagian 4.4 dikhususkan untuk menurunkan solusi persamaan panas dua dimensi menggunakan transformasi Fourier fraksional *coupled*. Bagian ini juga menyajikan contoh untuk memvalidasi hasilnya. Terakhir, bagian 4.5 berisi kesimpulan dari apa yang telah dilakukan.

4.3. Transformasi Fourier Fraksional *Coupled*

Pada bagian ini, konsep transformasi Fourier fraksional *coupled* (TFFrC) diperkenalkan secara singkat. Beberapa sifat-sifat yang akan digunakan pada bagian selanjutnya juga dibahas. Untuk rincian lebih lanjut tentang TFFrC, dapat dilihat pada referensi (Shah *et al.*, 2022 dan Zayed, 2018).

Definisi 4.3.1 (Debnath & Shah, 2015) Untuk $1 \leq p < \infty$, ruang $L^p(\mathbb{R}^2)$ dari fungsi terukur pada \mathbb{R}^2 didefinisikan sebagai

$$L^p(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty \right\}, \quad (4.1)$$

dengan norm

$$\| f \|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.2)$$

dimana $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$.

Definisi 4.3.1 (Zayed, 2018)

Misalkan $\gamma = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ dan $\delta = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, dimana $\alpha + \beta \neq 2n\pi$, transformasi Fourier fraksional *coupled* dari suatu fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\alpha,\beta}(\omega_1, \omega_2) &= \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) \{f\}(\omega_1, \omega_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

dimana

$$\begin{aligned} &K_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) \\ &= \hat{d}(\gamma) \exp \left(-i \left(\hat{a}(x_1^2 + x_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) - x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\hat{a} = \frac{\cot \gamma}{2}, \quad \hat{b} = \frac{\cos \delta}{\sin \gamma}, \quad \hat{c} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}, \quad \hat{d}(\gamma) = \frac{ie^{-i\gamma}}{2\pi \sin \gamma}. \quad (4.5)$$

Definisi 4.3.2 (Zayed, 2018) Fungsi invers dari transformasi Fourier fraksional coupled (persamaan 4.3) adalah

$$f(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{K}_{\alpha, \beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) \mathcal{F}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (4.6)$$

dimana

$$\begin{aligned} & \overline{K}_{\alpha, \beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) \\ &= \hat{d}(-\gamma) \exp \left(i \left(\hat{a}(x_1^2 + x_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) - x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Selanjutnya untuk penyederhanaan, $\hat{d}(\gamma)$ akan ditulis sebagai \hat{d} .

Adapun relasi antara transformasi Fourier dua-dimensi dengan transformasi Fourier fraksional *coupled* yaitu :

$$\left(\hat{d} \right)^{-1} e^{-i\hat{a}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \mathcal{F}_{\alpha, \beta} \{f\}(\omega_1, \omega_2) = \mathcal{F} \{g\}(-\hat{b}(\omega_1 - \omega_2) - \hat{c}(\omega_2 - \omega_1)), \quad (4.8)$$

dimana

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) e^{-i\hat{a}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (4.9)$$

dan

$$\begin{aligned} |g(x_1, x_2)| &= \left| f(x_1, x_2) e^{-i\hat{a}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| \\ &= |f(x_1, x_2)|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Disini $\mathcal{F} \{f\}$ adalah transformasi Fourier dari suatu fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ yang didefinisikan oleh

$$\mathcal{F} \{f\} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) e^{-i(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)} dx_1 dx_2. \quad (4.11)$$

Selanjutnya, akan dideskripsikan sifat turunan dari transformasi Fourier fraksional *coupled*.

Definisi 4.3.3 (Operator Turunan) *Operator turunan yang bersesuaian dengan transformasi Fourier fraksional coupled didefinisikan sebagai*

$$\Delta_{x_1} = \frac{d}{dx_1} + i2\hat{a}x_1 \text{ dan } \Delta_{x_2} = \frac{d}{dx_2} + i2\hat{a}x_2. \quad (4.12)$$

Selanjutnya untuk penyederhanaan, $K_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$ akan ditulis sebagai $K_{\alpha,\beta}$.

Teorema 4.3.4 *Misalkan $K_{\alpha,\beta}$ adalah kernel dari transformasi Fourier fraksional coupled, maka*

1. Jika $\Delta_{x_1}^* = -\left(\frac{d}{dx_1} - i2\hat{a}x_1\right)$ dan $\Delta_{x_2}^* = -\left(\frac{d}{dx_2} - i2\hat{a}x_2\right)$ maka

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta_{x_1})^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} (\Delta_{x_1}^*)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

dan

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta_{x_2})^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} (\Delta_{x_2}^*)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

2. $\mathcal{F}_{\alpha,\beta} \left\{ (\Delta_{x_1}^*)^2 \right\} (\omega_1, \omega_2) = -\left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2\right) \mathcal{F}_{\alpha,\beta} \{f\} (\omega_1, \omega_2)$
dan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta} \left\{ (\Delta_{x_2}^*)^2 \right\} (\omega_1, \omega_2) = -\left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2\right) \mathcal{F}_{\alpha,\beta} \{f\} (\omega_1, \omega_2)$.

Bukti.

1. Dengan menggunakan definisi (4.3), diperoleh

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta_{x_1})^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{d}{dx_1} + 2i\hat{a}x_1 \right)^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + 4i\hat{a}x_1 \frac{d}{dx_1} - 4\hat{a}^2 x_1^2 \right) K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dx_1^2} K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 + 4i\hat{a} \int_{\mathbb{R}} x_1 \frac{d}{dx_1} K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 \right. \\ & \quad \left. - 4\hat{a}^2 \int_{\mathbb{R}} x_1^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K_{\alpha,\beta} \frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, x_2) dx_1 - 4i\hat{a} \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha,\beta} x_1 \frac{d}{dx_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right. \\
&\quad \left. - 4\hat{a}^2 \int_{\mathbb{R}} K_{\alpha,\beta} x_1^2 f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K_{\alpha,\beta} \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - 4ix_1 \frac{d}{dx_1} - 4\hat{a}^2 x_1^2 \right) f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} \left(- \left(\frac{d}{dx_1} - i2\hat{a}x_1 \right) \right)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} (\Delta_{x_1}^*)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Dengan prosedur yang sama, diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta_{x_2})^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} (\Delta_{x_2}^*)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

2. Dengan menggunakan turunan dari kernel (4.4) yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dK_{\alpha,\beta}}{dx_1} &= -i \left(2\hat{a}x_1 - \hat{b}\omega_1 - \hat{c}\omega_2 \right) K_{\alpha,\beta} \\
&= \left(-2i\hat{a}x_1 - i \left(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2 \right) \right) K_{\alpha,\beta} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 K_{\alpha,\beta}}{dx_1^2} &= \left(-2i\hat{a} - \left(2\hat{a}x_1 - \hat{b}\omega_1 - \hat{c}\omega_2 \right)^2 \right) K_{\alpha,\beta} \\
&= \left(-2i\hat{a} - 4\hat{a}^2 x_1^2 + 4\hat{a}x_1 \left(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2 \right) - \left(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2 \right)^2 \right) K_{\alpha,\beta}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
(\Delta_{x_1})^2 K_{\alpha,\beta} &= \left(\frac{d}{dx_1} + 2i\hat{a}x_1 \right)^2 K_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) \\
&= \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + 4i\hat{a}x_1 \frac{d}{dx_1} - 4\hat{a}^2 x_1^2 \right) K_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(-2i\hat{a} - 4\hat{a}^2x_1^2 + 4\hat{a}x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) - (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 4i\hat{a}x_1 \left(-2i\hat{a}x_1 - i(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) \right) - 4\hat{a}^2x_1^2 \right) K_{\alpha,\beta} \\
&= \left(-2i\hat{a} - 4\hat{a}^2x_1^2 + 4\hat{a}x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) - (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + 8\hat{a}^2x_1^2 \right. \\
&\quad \left. - 4\hat{a}x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) - 4\hat{a}^2x_1^2 \right) K_{\alpha,\beta} \\
&= - \left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 \right) K_{\alpha,\beta}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan hasil sebelumnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\alpha,\beta} \left\{ (\Delta_{x_1}^*)^2 f(x_1, x_2) \right\} (\omega_1, \omega_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} (\Delta_{x_1}^*)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta_{x_1})^2 K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} - \left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 \right) K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= - \left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 \right) \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha,\beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= - \left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 \right) \mathcal{F}_{\alpha,\beta} \{ f(x_1, x_2) \} (\omega_1, \omega_2). \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan prosedur yang sama akan diperoleh

$$(\Delta_{x_2})^2 K_{\alpha,\beta} = - \left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2 \right) K_{\alpha,\beta} \tag{4.18}$$

sehingga

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta} \left\{ (\Delta_{x_2}^*)^2 \right\} (\omega_1, \omega_2) = - \left(2i\hat{a} + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2 \right) \mathcal{F}_{\alpha,\beta} \{ f \} (\omega_1, \omega_2). \tag{4.19}$$

■

4.4. Penyelesaian Persamaan Panas Dua-Dimensi

Pada bagian ini, transformasi Fourier fraksional *coupled* diterapkan untuk memperoleh penyelesaian panas dua-dimensi.

Pandang masalah persamaan panas dua-dimensi sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t) = k^2 \left((\Delta_{x_1}^*)^2 u(x_1, x_2, t) + (\Delta_{x_2}^*)^2 u(x_1, x_2, t) \right), t > 0, \quad (4.20)$$

dengan kondisi awal $u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\Delta_{x_1}^*$ dan $\Delta_{x_2}^*$ seperti didefinisikan sebelumnya, dan k adalah sebarang konstanta.

Dengan menerapkan TFFrC pada kedua ruas persamaan (4.20), diperoleh

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \\ &= k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(K_{\alpha, \beta} (\Delta_{x_1}^*)^2 u(x_1, x_2, t) + K_{\alpha, \beta} (\Delta_{x_2}^*)^2 u(x_1, x_2, t) \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Selanjutnya dengan menggunakan teorema 4.3.4, diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2, t) = -k^2 (4i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) \hat{u}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2, t). \quad (4.22)$$

Persamaan (4.22) adalah persamaan diferensial biasa, yang penyelesaiannya adalah

$$\hat{u}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2, t) = A e^{-k^2 (4i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) t}. \quad (4.23)$$

Selanjutnya dengan menggunakan kondisi awal $u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$, diperoleh

$$\hat{u}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha, \beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = A. \quad (4.24)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.24) ke dalam persamaan (4.23) diperoleh hasil

$$\hat{u}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2, t) = \left(\int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha, \beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) e^{-k^2 (4i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) t}. \quad (4.25)$$

Selanjutnya diterapkan invers TFFrC ke dalam persamaan (4.25), diperoleh

$$u(x_1, x_2, t) = \mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{-1} \{ \hat{u}_{\alpha, \beta}(\omega_1, \omega_2, t) \}(x_1, x_2, t). \quad (4.26)$$

Lebih lanjut, dengan mensubstitusikan persamaan (4.25) ke persamaan (4.26), diperoleh

$$\begin{aligned} & u(x_1, x_2, t) \\ &= \mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{-1} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^2} K_{\alpha, \beta} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) e^{-k^2 (4i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) t} \right\} \\ &= |\hat{d}|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\hat{a}(x_1^2 + x_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) - x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1))} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \\ &\quad e^{-k^2 (4i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) t} e^{i\hat{a}(x_1^2 + x_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - i(x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) + x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1))} \\ &\quad d\omega_1 d\omega_2 \\ &= |\hat{d}|^2 e^{i\hat{a}(x_1^2 + x_2^2)} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\hat{a}(x_1^2 + x_2^2)} e^{i(x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) + x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1))} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \\ &\quad e^{-k^2 (4i\hat{a} + (\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) t} e^{-i(x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) + x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1))} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= |\hat{d}|^2 e^{-i\hat{a}(4k^2 t - x_1^2 - x_2^2)} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\hat{a}(x_1^2 + x_2^2)} e^{i(x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) + x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1))} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \\ &\quad e^{-k^2 ((\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2)^2 + (\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1)^2) t} e^{-i(x_1(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) + x_2(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1))} d\omega_1 d\omega_2. \quad (4.27) \end{aligned}$$

Misalkan

$$h_\gamma(x_1, x_2) = e^{-i\hat{a}(x_1^2 + x_2^2)} f(x_1, x_2), \quad (4.28)$$

$$v_1 = -(\hat{b}\omega_1 + \hat{c}\omega_2) \quad \text{dan} \quad v_2 = -(\hat{b}\omega_2 - \hat{c}\omega_1) \quad (4.29)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2, t) &= \frac{|\hat{d}|^2 e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{\hat{b}^2 + \hat{c}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-k^2(v_1^2 + v_2^2)t} e^{i(x_1v_1 + x_2v_2)} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} h_\gamma(x_1, x_2) e^{-i(x_1v_1 + x_2v_2)} dx_1 dx_2 \right) dv_1 dv_2 \\
&= \frac{|\hat{d}|^2 e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{\hat{b}^2 + \hat{c}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-k^2(v_1^2 + v_2^2)t} e^{i(x_1v_1 + x_2v_2)} \mathcal{F}\{h_\gamma(x_1, x_2)\} dv_1 dv_2.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Dengan menggunakan definisi dari \hat{b} , \hat{c} dan \hat{d} , persamaan (4.30) dapat diekspresikan

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-k^2(v_1^2 + v_2^2)t} e^{i(x_1v_1 + x_2v_2)} \mathcal{F}\{h_\gamma(x_1, x_2)\} dv_1 dv_2. \tag{4.31}$$

Perhatikan bahwa dengan menggunakan transformasi Fourier dua-dimensi, akan diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\pi}{k^2 t} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4k^2 t}} \right\} = e^{-k^2(v_1^2 + v_2^2)t}. \tag{4.32}$$

Oleh karenanya, dengan mensubstitusi persamaan (4.32) ke dalam persamaan (4.31), diperoleh solusi

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2, t) &= \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}\left\{ \frac{\pi}{4k^2 t} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4k^2 t}} \right\} \mathcal{F}\{h_\gamma(x_1, x_2)\} e^{i(x_1v_1 + x_2v_2)} dv_1 dv_2 \\
&= \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{4\pi k^2 t} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}\left\{ e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4k^2 t}} \right\} \mathcal{F}\{h_\gamma(x_1, x_2)\} e^{i(x_1v_1 + x_2v_2)} dv_1 dv_2 \\
&= \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{4\pi k^2 t} \left(e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{4k^2 t}} * h_\gamma(x_1, x_2) \right) \\
&= \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2t - x_1^2 - x_2^2)}}{4\pi k^2 t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{4k^2 t}} e^{-i\hat{a}(y_1^2 + y_2^2)} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Dalam kasus khusus, yaitu ketika $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, maka persamaan (4.33) akan menjadi

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi k^2 t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4k^2 t}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2. \quad (4.34)$$

yang merupakan penyelesaian persamaan panas menggunakan transformasi Fourier dua-dimensi.

Untuk mengilustrasikan hasil yang telah diperoleh, disajikan contoh berikut.

Contoh 4.4.1 Tentukan penyelesaian $u(x_1, x_2, t)$ dari persamaan 4.20 dengan

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2} \quad (4.35)$$

Solusi. Substitusi persamaan (4.35) ke persamaan (4.33), diperoleh

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2 t - x_1^2 - x_2^2)}}{4\pi k^2 t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1) + (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 y_2)}{4k^2 t}} e^{-i\hat{a}(y_1^2 + y_2^2)} e^{-y_1^2 - y_2^2} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{e^{-i\hat{a}(4k^2 t - x_1^2 - x_2^2)} e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{4k^2 t}}}{4\pi k^2 t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1)(y_1^2 + y_2^2)} e^{-\frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{4k^2 t}} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{e^{-i\hat{a}4k^2 t}}{4\pi k^2 t} e^{-(x_1^2 + x_2^2)(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t})} \int_{\mathbb{R}} e^{-(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1)y_1^2 - \frac{2x_1 y_1}{4k^2 t}} dy_1 \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1)y_2^2 - \frac{2x_2 y_2}{4k^2 t}} dy_2 \\ &= \frac{e^{-i\hat{a}4k^2 t}}{4\pi k^2 t} e^{-(x_1^2 + x_2^2)(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t})} \int_{\mathbb{R}} e^{-(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1)\left(y_1^2 - \frac{2x_1}{4k^2 t} \frac{y_1}{i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1}\right)} dy_1 \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1)\left(y_2^2 - \frac{2x_2}{4k^2 t} \frac{y_2}{i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1}\right)} dy_2. \end{aligned}$$

Misalkan

$$u_1 = \sqrt{i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1} \left(y_1 - \frac{x_1}{4k^2 t (i\hat{a} + \frac{1}{4k^2 t} + 1)} \right)$$

dan

$$u_2 = \sqrt{i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1} \left(y_2 - \frac{x_2}{4k^2t \left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1 \right)} \right)$$

maka

$$\frac{du_1}{\sqrt{i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1}} = dy_1 \quad (4.36)$$

dan

$$\frac{du_2}{\sqrt{i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1}} = dy_2, \quad (4.36)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= \frac{e^{-i\hat{a}4k^2t}}{4\pi k^2t \left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1 \right)} \\ & e^{-\left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} - \frac{1}{16k^4t^2 \left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1 \right)^2} \right) (x_1^2 + x_2^2)} \int_{\mathbb{R}} e^{-u_1^2} du_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-u_2^2} du_2 \\ &= \frac{e^{-i\hat{a}4k^2t}}{4k^2t \left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1 \right)} e^{-\left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + \frac{1}{16k^4t^2 \left(i\hat{a} + \frac{1}{4k^2t} + 1 \right)^2} \right) (x_1^2 + x_2^2)}. \end{aligned}$$

4.5. Kesimpulan

Pada bab ini, masalah persamaan panas dua-dimensi diselesaikan dengan menerapkan metode transformasi Fourier fraksional *coupled*. Untuk memperoleh penyelesaian, terlebih dahulu didefinisikan operator turunan yang bersesuaian dengan transformasi Fourier fraksional *coupled* serta menyusun teorema yang bersesuaian. Pada kasus khusus, yaitu ketika $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, penyelesaian yang diperoleh bersesuaian dengan penyelesaian persamaan panas menggunakan transformasi Fourier dua-dimensi.

DAFTAR PUSTAKA

- Ozaktas, H.M.; Kutay, M.A.; Mendlovic, D. Introduction to the fractional Fourier transform and its applications. *Advances in Imaging Electronics and Physics*. **1999**, *106*, 239–291.
- Mendlovic, D.; Zalevsky, Z.; Ozaktas, H.M. *The applications of the fractional Fourier transform to optical pattern recognition*, In Z. Zalevsky (Ed.), *Optical pattern recognition* (pp. 89-195); Cambridge University Press: New York, 1998.
- Namias, V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *IMA J. Appl. Math.* **1980**, *25*, 241–265.
- Shah, F.A.; Lone, W.Z.; Nisar, K.S.; Khalifa, A.S. Analytical solutions of generalized differential equations using quadratic-phase Fourier transform. *Aims Math.* **2022**, *7*, 1925–1940.
- Debnath, L.; Shah, F.A. The Wavelet Transforms and Their Basic Properties. In: *Wavelet Transforms and Their Applications*, Birkhäuser, Boston, MA., 2015.
- Zayed, A.I. Two-dimensional fractional Fourier transform and some of its properties. *Integral Transform. Spec. Funct.* **2018**, *29*, 553–570.
- Zayed, A.I. Sampling teorema for two dimensional fractional Fourier transform. *Signal Process.* **2021**, *181*, 107902.
- Zayed, A. I. A new perspective on the two-dimensional fractional Fourier transform and its relationship with the Wigner distribution. *J. Fourier Anal. Appl.* **2019**, *25* (2), 460—487.

Prasad, A.; Manna, S.; Mahato, A.; Singh, V.K. The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform. *J. Comput. Appl. Math.* **2014**, *259*, 660–671.

Asmar, N.H. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed.; Pearson Prentice Hall: Hoboken, NY, USA, 2000.

BAB V

KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan

Tulisan ini membahas tentang transformasi Fourier fraksional dan penerapannya dalam penyelesaian masalah persamaan diferensial parsial. Berdasarkan pembahasan dari bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan:

1. Transformasi Fourier fraksional (TFFr) merupakan generalisasi dari transformasi Fourier (TF), karenanya sifat-sifat dari transformasi Fourier fraksional seperti pergeseran, penskalaan, modulasi, konvolusi, dan prinsip ketidakpastian, dapat diperoleh dari sifat-sifat pada transformasi Fourier dengan menggunakan relasi antara dengan TF dan TFFr. Salah satu sifat baru yang diperoleh dari relasi ini adalah prinsip ketidakpastian Nazarov.
2. Metode transformasi Fourier fraksional digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan panas satu dimensi dan persamaan Laplace. Solusinya diperoleh dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Fourier fraksional dan hubungan antara teorema konvolusi untuk transformasi Fourier fraksional dan teorema konvolusi untuk transformasi Fourier. Dalam kasus ketika $\theta = \frac{\pi}{2}$, solusi yang diperoleh sama dengan solusi dengan menggunakan transformasi Fourier klasik.
3. Metode transformasi Fourier fraksional *coupled* (TFFrC) digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan panas dua-dimensi. Untuk memperoleh penyelesaian, terlebih dahulu didefinisikan operator turunan yang bersesuaian dengan TFFrC serta menyusun teorema yang bersesuaian.

Pada kasus ketika $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, penyelesaian yang diperoleh bersesuaian dengan penyelesaian persamaan panas menggunakan transformasi Fourier dua-dimensi.

5.2. Masalah Terbuka

Beberapa masalah yang masih terbuka untuk pengembangan penelitian selanjutnya, yaitu:

1. mengembangkan prinsip ketidakpastian Nazarov pada transformasi Fourier fraksional di ruang \mathcal{L}^n (ruang Lebesgue dimensi n).
2. mengembangkan metode transformasi Fourier fraksional maupun transformasi Fourier fraksional *coupled* untuk penyelesaian masalah persamaan diferensial parsial lainnya.
3. mengembangkan metode *sampling formula* yang bersesuaian dengan transformasi Fourier fraksional *coupled* untuk digunakan sebagai metode pembandingan untuk hasil yang telah diperoleh.

DAFTAR PUSTAKA

- Anh, P.K.; Castro, L.P.; Thao, P.T.; Tuan, N.M. Two new convolutions for the fractional Fourier transform. *Wirel. Pers. Commun.* **2017**, *92*, 623-637.
- Almeida, L.B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Trans. Signal Process.* **1994**, *42*, 3084–3091.
- Asmar, N.H. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed.; Pearson Prentice Hall: Hoboken, NY, USA, 2000.
- Bahri, M. Logarithmic uncertainty principle, convolution theorem related to continuous fractional wavelet transform and its properties on a generalized Sobolev space. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.* **2017**, *15* (5), 1750050.
- Bahri, M. Logarithmic uncertainty principle, convolution theorem related to continuous fractional wavelet transform and its properties on a generalized Sobolev space. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.* **2017**, *15* (5), 1750050.
- Bahri, M.; Ashino, R. Fractional Fourier Transform: Duality, correlation theorem and applications. In Proceedings of the 2022 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, Toyama, Japan, 9–11 September 2022.
- Bahri, M.; Ashino, R. Solving generalized wave and heat equations using linear canonical transform and sampling formulae. *Abstr. Appl. Anal.* **2020**, *2020*, 1273194.

- Bahri, M.; Karim, S.A.A. Fractional Fourier transform: Main properties and inequalities. *Mathematics* **2023**, *11*, 1234.
- Benedicks, M. On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. *J.Math. Anal. Appl.* **1985**, *106*, 180–183.
- Bernardo, L.M.; Soares, O.D.D. Fractional Fourier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Am. A* **1994**, *11*, 2622–2626.
- Chen W.; Fu, Z.; Grafakos, L.; Wu, Y. Fractional Fourier transforms on L^p and applications. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. **2021**, *55*, 71–96.
- Chen, W.; Fu, Z.; Grafakos, L.; Wu, Y. Fractional Fourier transforms on L^p and applications. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **2021**, *55*, 71–96.
- Debnath, L.; Shah, F.A. The Wavelet Transforms and Their Basic Properties. In: *Wavelet Transforms and Their Applications*, Birkhäuser, Boston, MA., 2015.
- Folland, G.B. *Fourier Analysis and Its Applications*. Wardsworth & Brooks/Cole: Pacific Grove, 1992.
- Folland, G.B., Sitaram, A. The uncertainty principle: A Mathematical Survey. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*. **1997**, (3), 207-238.
- Guanlei, X.; Xiatong, W.; Xiaogang, X. Fractional Quaternion Fourier Transform, Convolution and Correlation. *Signal Processing*. **2008**, *88*, 2511-2517.
- Guanlei, X.; Xiatong, W.; Xiaogang, X. Novel uncertainty relations associated with fractional Fourier transform. *Chin. Phys. B*. **2010**, *19*, 014203.
- Gunawan, H. *Analisis Fourier dan Wavelet*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB: Bandung, 2017.

- Huo, H. Uncertainty Principles for the Offset Linear Canonical Transform, *Circuits Syst. Signal Process.* **2019**, *38*, 395-406.
- Jaming, P. Nazarov's uncertainty principles in higher dimension. *J. Approx. Theory.* **2007**, *149* (1), 30–41.
- Kutay, M.A.; Ozaktas, H.M.; Arıkan, O.; Onural, L. Optimal filtering in fractional Fourier domains. *IEEE Trans. Signal Process.* **1997**, *45*, 1129–1143.
- Kuzmichev, V.E. & Kuzmichev, V. V. Uncertainty principle in quantum mechanics with Newton's gravity, *Eur. Phys. J. C.* **2020**, *80*, 248.
- Liu, S.; Ren, H.; Zhang, J.; Zhang, X. Image-scaling problem in the optical fractional Fourier transform. *Appl. Opt.* **1997**, *36*, 5671–5674.
- McBride, A.C.; Kerr, F.H. On Namias's fractional Fourier transforms. *IMA J. Appl. Math.* **1987**, *39*, 159–175.
- Mendlovich, D.; Ozaktas, H.M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation 1. *J. Opt. Soc. Am. A* **1993**, *10*, 1875–1881.
- Namias, V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *IMA J. Appl. Math.* **1980**, *25*, 241–265.
- Nazarov, F.L. Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. *Algebra i Analiz.* **1993**, *5* (4), 3–66.
- Negero, N.T. Fourier Transform Methods for Partial Differential Equation. *Journal of Partial Differential Equation and Applications.* **2014**, *2*(3), 44-57.
- Ozaktas, H.M.; Aytür, O. Fractional Fourier domains. *Signal Process.* **1995**, *46*, 119–124

- Ozaktas, H.M.; Zalevsky, Z.; Kutay-Alper, M. *The Fractional Fourier Transform: With Applications in Optics and Signal Processing*; Wiley: New York, NY, USA, 2001.
- Pei, S.C. Two-dimensional affine generalized fractional Fourier transform. *IEEE Trans. Signal Proc.* **2001**, *49*, 878–897.
- Prasad, A.; Manna, S.; Mahato, A.; Singh, V.K. The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform. *J. Comput. Appl. Math.* **2014**, *259*, 660–671.
- Qiu, F.; Liu, Z.; Liu, R.; Quan, X.; Tao, C.; Wang, Y. Fluid flow signals processing based on fractional Fourier transform in a stirred tank reactor. *ISA Trans.* **2019**, *90*, 268–277.
- Sahin, A.; Kutay, M.A.; Ozaktas, H.M. Nonseparable two-dimensional fractional Fourier transform. *Appl. Opt.* **1998**, *37*, 5444–5453.
- Shah, F.A.; Lone, W.Z.; Nisar, K.S.; Khalifa, A.S. Analytical solutions of generalized differential equations using quadratic-phase Fourier transform. *Aims Math.* **2022**, *7*, 1925–1940.
- Shi, J.; Sha, X.; Shong, X.; Zhang, N. Generalized convolution theorem associated with fractional Fourier transform. *Wirel. Commun. Mob. Comput.* **2012**, *14*, 1340–1351.
- Strauss, W.A. *Partial Differential Equation: An Introduction*, Second Edition, John Wiley & Sons: Danvers, 2008.
- Yang, W.Y. *Applied Numerical Methods Using Matlab*. John Wiley & Sons.Inc.: New Jersey, 2005.
- Zauderer, E. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. John Wiley & Sons.Inc.: New Jersey, 2006.

- Zayed, A.I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. *IEEE Process. Lett.* **1998**, *5*, 101–103.
- Zayed, A.I. Fractional Fourier transform of generalized functions. *Integral Transform. Spec. Funct.* **1998**, *7*, 299–312.
- Zayed, A.I. On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms. *IEEE Signal Process. Lett.* **1996**, *3*, 310–311.
- Zayed, A.I. Sampling theorem for two dimensional fractional Fourier transform. *Signal Process.* **2021**, *181*, 107902.
- Zayed, A.I. Two-dimensional fractional Fourier transform and some of its properties. *Integral Transform. Spec. Funct.* **2018**, *29*, 553–570.
- Zhao, H.; Li, B.Z. Unlimited Sampling Theorem Based on Fractional Fourier Transform. *Fractal Fract.* **2023**, *7*, 338.