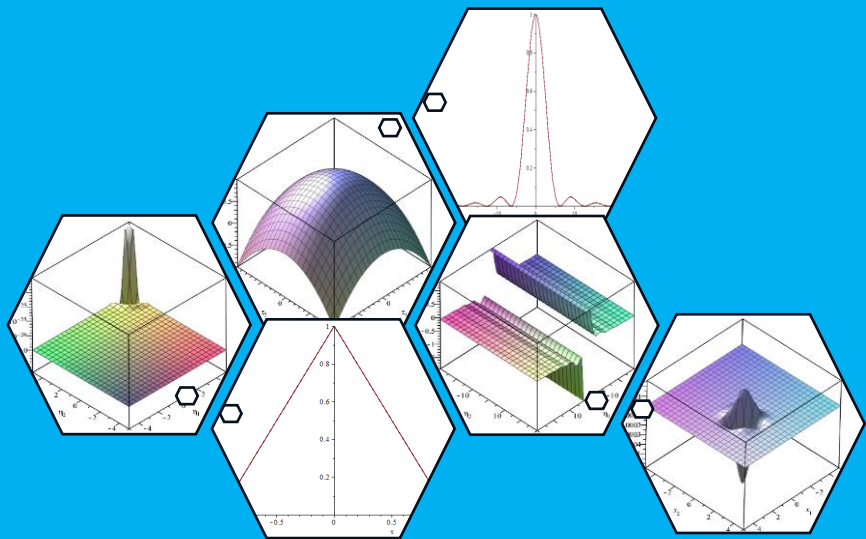


**PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA DISTRIBUSI
FRAKSIONAL WIGNER-VILLE COUPLED**

***HEISENBERG'S UNCERTAINTY PRINCIPLES FOR COUPLED FRACTIONAL
WIGNER-VILLE DISTRIBUTION***



ANDI TENRI AJENG NUR

H022222004



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024**

TESIS

**PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA DISTRIBUSI FRAKSIONAL
WIGNER-VILLE *COUPLED***

**(*HEISENBERG'S UNCERTAINTY PRINCIPLES FOR COUPLED FRACTIONAL
WIGNER-VILLE DISTRIBUTION*)**

ANDI TENRI AJENG NUR
H022222004



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2024

**PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA DISTRIBUSI FRAKSIONAL
WIGNER-VILLE *COUPLED***
***HEISENBERG'S UNCERTAINTY PRINCIPLES FOR COUPLED FRACTIONAL
WIGNER-VILLE DISTRIBUTION***

Tesis

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

ANDI TENRI AJENG NUR

H022222004

pada

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2024

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis berjudul " Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Distribusi Fraksional Wigner-Ville *Coupled*" adalah benar karya saya dengan arahan dari tim pembimbing (Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Amran, S.Si., M.Si sebagai Pembimbing Pendamping). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah dipublikasikan di Jurnal (Royal Society Open Science, 11(5), 231579; <https://doi.org/10.1098/rsos.231579> (*Published*)) sebagai atikel dengan judul "*Uncertainty principles for coupled fractional Wigner-Ville distribution*". Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 28 Mei 2024



Anji Tenri Ajeng Nur
H02222004

TESIS

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA DISTRIBUSI
FRAKSIONAL WIGNER-VILLE COUPLED

ANDI TENRI AJENG NUR

NIM: H022222004

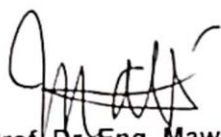
telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada tanggal 28 Mei
2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

pada

Program Studi Magister Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

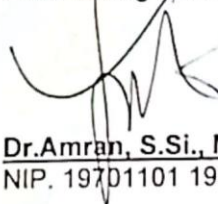
Mengesahkan,

Pembimbing Utama



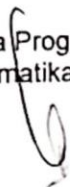
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.
NIP. 19701231 199802 1001

Pembimbing Pendamping



Dr. Amran, S.Si., M.Si.
NIP. 19701101 199802 1001

Ketua Program Studi
Matematika S2



Dr. Muhammad Zakir, M.Si.
NIP. 19640207 199103 1013

Dekan Fakultas MIPA
Universitas Hasanuddin



Dr. Fiq. Amiruddin, S.Si., M.Si.
NIP. 19720515 1997 02 1002

PRAKATA

Bismillahirrahmanirrahim. Sungguh luar biasa nikmat yang telah diberikan Allah *Su-bhanahu wa Ta'ala* sehingga sudah sepatutnya untuk berucap puji dan syukur kepada-Nya. Berkat rahmat dan karunia-Nya pula sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah *Shalallahu 'Alaihi Wasallam* beserta keluarga, dan para sahabat.

Tesis dalam judul "**Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Distribusi Fraksional Wigner-Ville Coupled**" ini disusun sebagai persyaratan dalam memperoleh gelar Magister pada Program Pascasarjana Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Selama proses penyusunan tesis ini, penulis menemukan banyak hambatan dan tantangan, tetapi penulis menyadari bahwa dengan keikhlasan, kesungguhan, usaha, dan doa maka akan membawa penulis menuju kemudahan dalam penyelesaian tesis ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, serta doa dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Penulis mengucapkan banyak terima kasih yang tak terhingga serta rasa hormat yang luar biasa kepada keluarga penulis, Ayahanda Andi Nurjasim Andi Nuhung dan Ibunda Nurjanah untuk setiap doa, bimbingan, motivasi, dan pembelajaran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini dengan baik.

Penulis juga mengucapkan terima kasih yang mendalam dengan segala kerendahan dan ketulusan hati kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si.M. Si. dan Bapak Dr. Amran, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing atas kesediaan waktu dan kesabaran serta dengan penuh keikhlasan memberikan dukungan, arahan, motivasi, dan membimbing penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si., Bapak Dr. Firman, S.Si., dan Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji atas segala bentuk bimbingan, saran, dan arahan, yang diberikan kepada penulis dalam penyelesaian tesis

ini.

4. Seluruh dosen dan staff Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah banyak memberikan bekal ilmu, bantuan, dan arahan dalam pengurusan administrasi.
5. Anugrah Agung yang selalu memberikan semangat, dukungan, serta bantuan kepada penulis selama masa perkuliahan hingga penyusunan tugas akhir ini.
6. Sahabat penulis, Nabilla Eka Wijaya yang senantiasa mendengarkan keluh kesah dan memberikan semangat, dukungan, dan motivasi kepada penulis.
7. Teman-teman Lab. Analisis yang telah banyak memberikan motivasi, dukungan, dan bantuan kepada penulis selama penyelesaian tesis.
8. Andi Nurkifayah sebagai partner bimbingan yang selalu menemani dan membantu penulis selama penyusunan tugas akhir ini.
9. Teman-teman Pascasarjana Matematika 2022-2 atas segala bentuk dukungan, bantuan, dan kebersamaan selama menjalani perkuliahan.
10. Seluruh pihak yang terlibat, membantu, dan mendukung penulis yang tidak sempat disebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu semua jenis saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat dan memberikan wawasan tambahan bagi para pembaca dan khususnya bagi penulis sendiri.

Makassar, 28 Mei 2024

Andi Tenri Ajeng Nur

H022222004

ABSTRAK

ANDI TENRI AJENG NUR. **Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Distribusi Fraksional Wigner-Ville Coupled** (dibimbing oleh Mawardi Bahri, Amran Rahim).

Distribusi fraksional Wigner-Ville coupled adalah versi yang lebih umum dari distribusi fraksional Wigner-Ville. Sifat-sifat utama termasuk keterbatasan, formula Moyal dan formula invers diuraikan secara rinci pada transformasi ini. Selain itu, hubungan distribusi fraksional Wigner-Ville coupled dengan transformasi Fourier dua dimensi dipelajari. Penulis juga menyajikan hubungan antara distribusi fraksional Wigner-Ville coupled dengan distribusi Wigner-Ville coupled. Dalam tugas akhir ini, penulis menunjukkan bagaimana sifat-sifat dan relasi memungkinkan penulis memperoleh prinsip ketidakpastian yang terkait dengan distribusi fraksional Wigner-Ville coupled.

Kata Kunci: transformasi Fourier fraksional *coupled*, prinsip ketidakpastian, transformasi Fourier fraksional.

ABSTRACT

ANDI TENRI AJENG NUR. **Heisenberg's Uncertainty Principles for Coupled Fractional Wigner-Ville Distribution** (Supervised by Mawardi Bahri, Amran Rahim).

The coupled fractional Wigner-Ville distribution is a more general version of the fractional Wigner-Ville distribution. Main properties including boundedness, Moyal's formula and inversion formula are studied in detail for the transformation. Additionally, relation of the coupled fractional Wigner-Ville distribution with the two-dimensional Fourier transform is studied. We also present the relationship between the coupled fractional Wigner-Ville distribution with the two-dimensional Wigner-Ville distribution. We show how the properties and relations allow us to derive several versions of the uncertainty inequalities related to the coupled fractional Wigner-Ville distribution.

Keywords: coupled fractional Fourier transform, uncertainty principle, fractional Fourier transform.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Tujuan Penelitian	3
1.4. Manfaat Penelitian	3
1.5. Batasan Masalah	4
1.6. Sistematika Penulisan Tesis	4
II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1. Ruang Lebesgue	5
2.1.1. Ruang Lebesgue $L^r(\mathbb{R})$	5
2.1.2. Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$	6
2.1.3. Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$	8
2.2. Transformasi Fourier	10
2.3. Sifat-sifat Transformasi Fourier	15
2.4. Tranformasi Fourier Fraksional	18
2.5. Sifat-sifat Transformasi Fourier Fraksional	19
2.6. Transformasi Fourier Fraksional <i>Coupled</i>	23
2.7. Distribusi Fraksional Wigner-Ville <i>Coupled</i>	24
2.8. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg	26
2.8.1. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier	29
III METODE PENELITIAN	30
3.1. Jenis Penelitian	30
3.2. Waktu dan Tempat Penelitian	30
3.3. Tahapan Penelitian	30
3.4. Diagram Alur Penelitian	31
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	32
4.1. Relasi antara Distribusi Fraksional Wigner-Ville <i>Coupled</i> dengan Transformasi Fourier	32

4.2. Sifat-Sifat Distribusi Fraksional Wigner-Ville <i>Coupled</i>	33
4.3. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Distribusi Fraksional Wigner-Ville <i>Coupled</i>	35
4.3.1. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg	35
V KESIMPULAN	40
5.1. Kesimpulan	40
5.2. Saran	40
DAFTAR PUSTAKA	41

DAFTAR GAMBAR

2.1	Grafik fungsi dari Contoh 5.	13
2.2	Grafik transformasi Fourier dari Contoh 5.	13
2.3	Grafik fungsi dari Contoh 6.	15
2.4	Grafik transformasi Fourier dari Contoh 6.	16
2.5	(a) bagian riil, (b) bagian imajiner dari distribusi fractional Wigner-Ville <i>coupled</i> dari Contoh 7 dengan domain spasial (x domain) untuk $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ $\eta = 5$ $x = [-5, 5]$	27
2.6	(a) bagian riil, (b) bagian imajiner dari distribusi fractional Wigner-Ville <i>coupled</i> dari Contoh 7 dengan domain frekuensi (η domain) untuk $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ $x = 5$ dan $\eta = [-5, 5]$	28
3.1	Diagram alur penelitian.	31

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang memberikan bekal konsep berpikir sistematis dan logis. Namun, banyak orang mengaitkan matematika dengan sekadar perhitungan dan pemecahan soal belaka. Mereka cenderung mempersepsikan matematika sebagai kumpulan definisi, teorema, dan rumus. Namun, tak dapat disangkal bahwa untuk mengasah kemampuan berpikir sistematis dan logis, diperlukan latihan intensif dalam menyelesaikan berbagai masalah. Hal itulah yang menjadi landasan utama bagi para peneliti dalam merumuskan dan menemukan solusi untuk beragam tantangan di bidang sains dan teknologi [Wiriani W.T., 2021]. Di antara beragam cabang matematika, analisis Fourier adalah salah satu yang memiliki potensi besar bagi para peneliti untuk memahami dan menangani fenomena kompleks yang seringkali dihadapi dalam penelitian ilmiah.

Joseph Fourier (1768-1830) adalah seorang ilmuwan asal Perancis yang menggabungkan matematika dan fisika, dan memperkenalkan konsep transformasi Fourier. Ia membangun dasar Transformasi Fourier dari deret Fourier kompleks, yang melibatkan fungsi periodik dengan periode yang mendekati tak terhingga. Transformasi Fourier (TF) adalah alat penting yang dapat digunakan untuk mengonversi sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi. Setelah diolah di domain frekuensi, sinyal dapat dengan mudah dikembalikan ke domain waktu semula. Seiring berjalannya waktu, transformasi Fourier telah mengalami kemajuan pesat dan diterapkan luas dalam berbagai bidang, termasuk elektronika, fisika materi padat, mekanika struktural, gelombang mekanik, dan mekanika kuantum [Nur A. T. A., 2022].

Seiring evolusi teori dan aplikasi transformasi Fourier dalam analisis sinyal, ternyata para ahli di bidang ini menyadari bahwa transformasi Fourier belum sepenuhnya memenuhi tuntutan analisis sinyal [Guanlei Xu. et al., 2008]. Kemudian, Namias V. [1980] mengembangkan transformasi Fourier menjadi transformasi Fourier fraksional. Transformasi Fourier fraksional adalah pengembangan umum dari transformasi Fourier, di mana sifat-sifat dasarnya masih merujuk pada sifat-sifat dasar transfor-

masi Fourier. Penelitian matematis tentang transformasi Fourier fraksional kemudian diperdalam oleh Guanlei Xu. et al. [2009] dan Sharma V. D. [2013]. Teori transformasi Fourier fraksional kemudian diimplementasikan untuk mengatasi tantangan analisis sinyal yang semakin kompleks dan beragam.

Salah satu aplikasi penting dari transformasi Fourier Fraksional adalah pada distribusi fraksional Wigner-Ville [Zayed A., 2019]. Distribusi Wigner-Ville adalah metode analisis sinyal yang memberikan representasi dua dimensi dari sinyal dalam domain waktu-frekuensi. Distribusi Wigner-Ville dapat memvisualisasikan bagaimana komponen frekuensi dari sinyal berkembang seiring dengan waktu. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh E. P. Wigner dan J. Ville pada tahun 1940-an. Distribusi ini menjadi instrumen krusial dalam analisis sinyal, memberikan perspektif yang mendalam mengenai komposisi frekuensi dan aspek temporal dari sinyal yang tidak bersifat stasioner. Namun, dengan memasukkan elemen fraksional dapat meningkatkan tingkat resolusi dan memperoleh wawasan yang lebih mendalam tentang karakteristik yang kompleks dari sinyal tersebut [Bastiaans M. J., 1997].

Beberapa tahun terakhir ini telah banyak penelitian yang diusulkan tentang generalisasi dari distribusi Wigner Ville. Ini menunjukkan bahwa distribusi Wigner-Ville ini mengalami perkembangan yang sangat pesat. Dalam penelitiannya, Li Y. et al. [2014] telah membangun prinsip ketidakpastian pada distribusi Wigner-Ville. Bai R. et al. [2012] dan Song Y. et al. [2014] dalam penelitiannya menyajikan distribusi Wigner-Ville yang terkait dengan transformasi kanonik linier.

Di sisi lain, Teali A. A. et al. [2023] dalam penelitiannya menyajikan perluasan dari distribusi Wigner-Ville ke distribusi fraksional Wigner-Ville yang kemudian disebut sebagai distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*. Sifat-sifat dari transformasi tersebut juga diselidiki. Namun dalam penelitian-penelitian tersebut belum ada yang mengkaji mengenai prinsip ketidakpastian terkait dengan transformasi umum ini.

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam penelitian ini akan dikaji lebih lanjut tentang distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*, dalam hal ini akan dibangun prinsip ketidakpastian yang terkait dengan distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* dengan menggunakan relasi antara distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* dengan transformasi Fourier dan dibuktikan beberapa sifat pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana membuktikan relasi antara transformasi Fourier dengan distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*?
2. Bagaimana membuktikan beberapa sifat pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*?
3. Bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Menentukan relasi antara transformasi Fourier dengan distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.
2. Membuktikan sifat-sifat pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.
3. Membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus literatur tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Fourier, khususnya pada prinsip ketidakpastian distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

1.5. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini dibatasi pada ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$. Adapun prinsip ketidakpastian yang akan dikaji adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

1.6. Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi konsep dasar dan penelitian relevan yang terkait dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi hasil-hasil dari kajian yang telah dilakukan, dan pembahasannya.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil bab-bab sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah yang digunakan sebagai teori pendukung dalam penyelesaian tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang prinsip ketidakpastian pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*, terlebih dahulu dibahas tentang ruang Lebesgue, transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, transformasi Fourier fraksional dan sifat-sifatnya, transformasi Fourier fraksional *coupled*, dan distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

2.1. Ruang Lebesgue

Pada subbab ini, didefinisikan ruang $L^r(\mathbb{R})$ dan $L^r(\mathbb{R}^2)$ dengan $1 \leq r < \infty$.

2.1.1. Ruang Lebesgue $L^r(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^r(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan pangkat r dari nilai mutlaknya dapat diintegrasikan.

Definisi 2.1.1 (Ruang $L^r(\mathbb{R})$) Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegrasikan r pada \mathbb{R} dengan $1 \leq r < \infty$ didefinisikan sebagai

$$L^r(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^r d\tau < \infty \right\}, \quad (2.1)$$

[Peetre J., 1969].

Adapun norma dari f dalam $L^r(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty. \quad (2.2)$$

Definisi 2.1.2 (Ruang $L^r(\mathbb{R}^2)$) Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegrasikan r pada \mathbb{R}^2 dengan $1 \leq r < \infty$ didefinisikan sebagai

$$L^r(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^r d\tau < \infty \right\}, \quad (2.3)$$

[Peetre J., 1969].

Adapun norma dari f dalam $L^r(\mathbb{R}^2)$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty. \quad (2.4)$$

2.1.2. Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan pangkat 1 dari nilai mutlaknya dapat diintegrasikan.

Definisi 2.1.3 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$) *Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada \mathbb{R} , maka ruang $L^1(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada \mathbb{R} , yaitu*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau < \infty \right\}, \quad (2.5)$$

[Gunawan H, 2017].

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau. \quad (2.6)$$

Contoh 1. Misalkan

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

dengan $\tau \in \mathbb{R}$, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(\tau)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 1. Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.5), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau &= \int_{-\infty}^{-1} 0 d\tau + \int_{-1}^1 |1 - |\tau|| d\tau + \int_1^{\infty} 0 d\tau \\ &= \int_{-1}^1 1 - |\tau| d\tau \\ &= \int_{-1}^0 (1 + \tau) d\tau + \int_0^1 (1 - \tau) d\tau \\ &= \left[\frac{\tau^2}{2} + \tau \right]_{-1}^0 + \left[\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Definisi 2.1.4 (Ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada \mathbb{R}^2 , maka ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada \mathbb{R}^2 , yaitu

$$L^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{\tau})| d\boldsymbol{\tau} < \infty \right\}, \quad (2.8)$$

dimana $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$, $d\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 d\tau_2$

[Rusdin et al., 2013].

Ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{\tau})| d\boldsymbol{\tau}. \quad (2.9)$$

Contoh 2. Misalkan

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 1 - |\boldsymbol{\tau}|^2, & \tau_1, \tau_2 \in [-1, 1] \\ 0, & \tau_1, \tau_2 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases} \quad (2.10)$$

dengan $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^2$, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(\boldsymbol{\tau})$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R}^2)$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 2. Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$ pada persamaan (2.8), diperoleh

Kasus 1:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{\tau})| d\boldsymbol{\tau} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |1 - \tau_1^2 - \tau_2^2| d\boldsymbol{\tau} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 - \tau_1^2 - \tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_1^2 d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-1}^1 2 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \frac{2}{3} d\tau_2 - \int_{-1}^1 2\tau_2^2 d\tau_2 \\ &= 4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Kasus 2:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{\tau})| d\boldsymbol{\tau} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |1 - \tau_1^2 - \tau_2^2| d\boldsymbol{\tau} \\
 &= - \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 - \tau_1^2 - \tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 \right) \\
 &= - \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_1^2 d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 \right) \\
 &= - \left(\int_{-1}^1 2 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \frac{2}{3} d\tau_2 - \int_{-1}^1 2\tau_2^2 d\tau_2 \right) \\
 &= - \left(4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) \\
 &= - \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2.1.3. Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$

Definisi 2.1.5 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada \mathbb{R} , maka ruang $L^2(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada \mathbb{R} , yaitu

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau < \infty \right\}, \quad (2.11)$$

[Gunawan H, 2017].

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

Contoh 3. Misalkan

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1, \end{cases} \quad (2.13)$$

dengan $\tau \in \mathbb{R}$, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(\tau)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 3. Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.11), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau &= \int_{-\infty}^{-1} 0 d\tau + \int_{-1}^1 |1 - |\tau||^2 d\tau + \int_1^{\infty} 0 d\tau \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - |\tau|)^2 d\tau \\
 &= \int_{-1}^0 (1 + \tau)^2 d\tau + \int_0^1 (1 - \tau)^2 d\tau \\
 &= \left[\tau + \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 \right]_{-1}^0 \left[\tau - \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.1.6 (Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada \mathbb{R}^2 , maka ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada \mathbb{R}^2 , yaitu

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau < \infty \right\}, \quad (2.14)$$

[Rusdin et al., 2013].

Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Jika $L^2(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan inner product $\langle f, g \rangle$ dengan aturan jika $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ didefinisikan

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau. \quad (2.16)$$

Untuk $f = g$, diperoleh

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau. \quad (2.17)$$

Sebagai konsekuensi dari hasil kali dalam pada persamaan (2.16), diperoleh ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau \int_{\mathbb{R}^2} |g(\tau)|^2 d\tau, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad (2.18)$$

[Steele J. M., 2004].

Contoh 4. Misalkan

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 1 - |\boldsymbol{\tau}|^2, & \tau_1, \tau_2 \in [-1, 1] \\ 0, & \tau_1, \tau_2 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases} \quad (2.19)$$

dengan $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^2$, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(\boldsymbol{\tau})$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R}^2)$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 4. Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$ pada persamaan (2.14), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{\tau})|^2 d\boldsymbol{\tau} &= \int_{\mathbb{R}^2} |1 - \tau_1^2 - \tau_2^2|^2 d\boldsymbol{\tau} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - \tau_1^2 - \tau_2^2)^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 + \tau_1^4 + \tau_2^4 - 2\tau_1^2 - 2\tau_2^2 + 2\tau_1^2\tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_1^4 d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_2^4 d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\tau_1^2 d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\tau_1^2\tau_2^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-1}^1 2d\tau_2 + \int_{-1}^1 \frac{2}{5}d\tau_2 + \int_{-1}^1 2\tau_2^4 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \frac{4}{3}d\tau_2 - \int_{-1}^1 4\tau_2^2 d\tau_2 \\ &\quad + \int_{-1}^1 \frac{4}{3}\tau_2^2 d\tau_2 \\ &= 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{8}{9} \\ &= \frac{52}{45}. \end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.2. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah transformasi matematis yang mengubah suatu fungsi atau sinyal dalam domain waktu menjadi representasi dalam domain frekuensi. Transformasi ini memiliki berbagai aplikasi luas, termasuk dalam analisis sinyal, kompresi data, pengolahan citra, teori gelombang, dan berbagai bidang ilmu terapan lainnya.

Definisi 2.2.1 (Transformasi Fourier) Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ terdefinisi

pada \mathbb{R} , transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\mathcal{F}\{f\}(\eta)$ dan didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau. \quad (2.20)$$

Dalam hal ini, $i^2 = -1$ merupakan satuan imajiner dan faktor perkalian dari fungsi eksponensial $e^{-i\eta\tau}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Dengan menggunakan rumus Euler

$$e^{i\eta\tau} = \cos \eta\tau + i \sin \eta\tau, \quad (2.21)$$

maka persamaan (2.20) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(\cos \eta\tau - i \sin \eta\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cos \eta\tau d\tau - i \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \sin \eta\tau d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ berada di $L^2(\mathbb{R})$ sehingga transformasi Fourier dapat diperluas ke $L^2(\mathbb{R})$.

Contoh 5. Misalkan

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

dengan $f(\tau) \in L^1(\mathbb{R})$ (lihat Gambar 2.1). Tunjukkan transformasi Fourier dari fungsi tersebut.

Solusi 5. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0 d\tau + \int_{-1}^1 (1 - |\tau|)e^{-i\eta\tau} d\tau + \int_1^{\infty} 0 d\tau \\ &= \int_{-1}^1 (1 - |\tau|)e^{-i\eta\tau} d\tau \end{aligned}$$

Gunakan rumus Euler pada persamaan (2.21) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\eta) &= \int_{-1}^1 (1 - |\tau|)(\cos \eta\tau - i \sin \eta\tau) d\tau \\ &= \int_{-1}^1 (1 - |\tau|) \cos \eta\tau d\tau - i \int_{-1}^1 (1 - |\tau|) \sin \eta\tau d\tau. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Diketahui bahwa fungsi \cos merupakan fungsi genap, sehingga dengan menggunakan teorema fungsi genap

$$\int_{-a}^a f(\tau) d\tau = 2 \int_0^a f(\tau) d\tau,$$

diperoleh

$$\int_{-1}^1 (1 - |\tau|) \cos \eta \tau d\tau = 2 \int_0^1 (1 - \tau) \cos \eta \tau d\tau. \quad (2.25)$$

Diketahui bahwa fungsi \sin merupakan fungsi ganjil, sehingga dengan menggunakan teorema fungsi ganjil

$$\int_{-a}^a f(\tau) d\tau = 0,$$

diperoleh

$$\int_{-1}^1 (1 - |\tau|) \sin \eta \tau d\tau = 0. \quad (2.26)$$

Substitusi persamaan (2.25) dan (2.26) ke persamaan (2.24), diperoleh

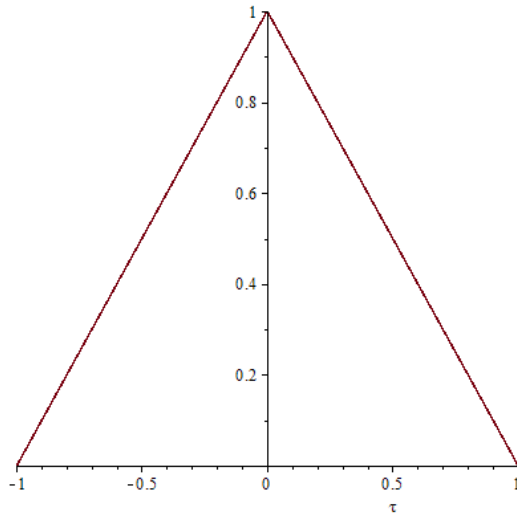
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\eta) &= 2 \int_0^1 (1 - \tau) \cos \eta \tau d\tau \\ &= 2 \left(\int_0^1 \cos \eta \tau d\tau - \int_0^1 \tau \cos \eta \tau d\tau \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \frac{\eta \sin \eta + \cos \eta - 1}{\eta^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\eta \sin \eta - \eta \sin \eta - \cos \eta + 1}{\eta^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{-\cos \eta + 1}{\eta^2} \right) \\ &= \frac{-2 \cos \eta + 2}{\eta^2} \\ &= \frac{2(1 - \cos \eta)}{\eta^2} \\ &= \frac{4 \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Jadi, transformasi Fourier dari fungsi $f(\tau)$ yaitu $\frac{4 \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\eta^2}$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.

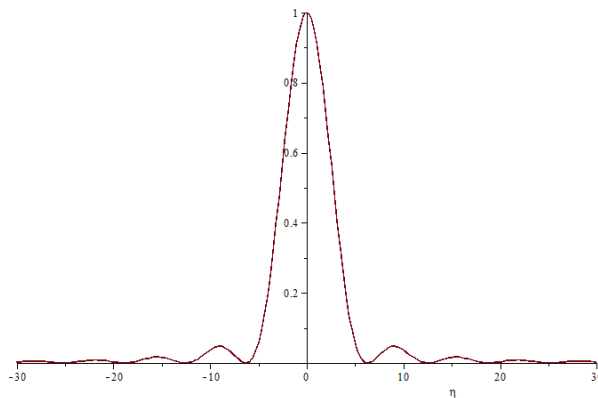
Definisi 2.2.2 (Transformasi Fourier 2-Dimensi) *Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ terdefinisi pada \mathbb{R}^2 , transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\mathcal{F}\{f\}(\eta)$ dan didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}\{f\}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau) e^{-i\eta\tau} d\tau, \quad (2.27)$$

[Zayed A. I., 1996].



Gambar 2.1 Grafik fungsi dari Contoh 5.



Gambar 2.2 Grafik transformasi Fourier dari Contoh 5.

Contoh 6. Misalkan

$$f(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 1 - |\boldsymbol{\tau}|^2, & \tau_1, \tau_2 \in [-1, 1] \\ 0, & \tau_1, \tau_2 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases} \quad (2.28)$$

dengan $f(\boldsymbol{\tau}) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (lihat Gambar 2.3). Tunjukkan transformasi Fourier 2-Dimensi dari fungsi tersebut.

Solusi 6. Dengan menggunakan definisi Transformasi Fourier 2-Dimensi pada per-

samaan (2.27) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\tau}) e^{-i\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\tau}) e^{-i\eta_1\tau_1} e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - \tau_1^2 - \tau_2^2) e^{-i\eta_1\tau_1} e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-i\eta_1\tau_1} e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_1^2 e^{-i\eta_1\tau_1} e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_2^2 e^{-i\eta_1\tau_1} e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-1}^1 e^{-i\eta_1\tau_1} d\tau_1 \int_{-1}^1 e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_2 - \int_{-1}^1 \tau_1^2 e^{-i\eta_1\tau_1} d\tau_1 \int_{-1}^1 e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_2 \\
&\quad - \int_{-1}^1 e^{-i\eta_1\tau_1} d\tau_1 \int_{-1}^1 \tau_2^2 e^{-j\eta_2\tau_2} d\tau_2. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Diperoleh hasil integral pada persamaan (2.29) yaitu

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) &= \left(-\frac{1}{i\eta_1} (e^{-i\eta_1} - e^{i\eta_1}) \right) \left(-\frac{1}{j\eta_2} (e^{-j\eta_2} - e^{j\eta_2}) \right) \\
&\quad - \frac{2\eta_1^2 - 4\sin\eta_1 + 4\eta_1\cos\eta_1}{\eta_1^3} \left(-\frac{1}{j\eta_2} (e^{-j\eta_2} - e^{j\eta_2}) \right) \\
&\quad - \frac{2\eta_2^2 - 4\sin\eta_2 + 4\eta_2\cos\eta_2}{\eta_2^3} \left(-\frac{1}{i\eta_1} (e^{-i\eta_1} - e^{i\eta_1}) \right). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

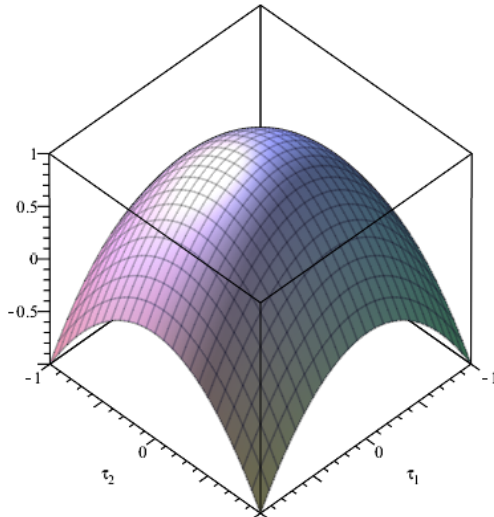
Dengan menggunakan persamaan (2.21), sehingga persamaan (2.30) menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) &= \left(-\frac{1}{i\eta_1} (-2i\sin\eta_1) \right) \left(-\frac{1}{j\eta_2} (-2j\sin\eta_2) \right) \\
&\quad - \frac{2\eta_1^2 - 4\sin\eta_1 + 4\eta_1\cos\eta_1}{\eta_1^3} \left(-\frac{1}{j\eta_2} (-2j\sin\eta_2) \right) \\
&\quad - \frac{2\eta_2^2 - 4\sin\eta_2 + 4\eta_2\cos\eta_2}{\eta_2^3} \left(-\frac{1}{i\eta_1} (-2i\sin\eta_1) \right) \\
&= \frac{4\sin\eta_1\sin\eta_2}{\eta_1\eta_2} - \frac{2\sin\eta_2}{\eta_2} \left(\frac{2\eta_1^2 - 4\sin\eta_1 + 4\eta_1\cos\eta_1}{\eta_1^3} \right) \\
&\quad - \frac{2\sin\eta_1}{\eta_1} \left(\frac{2\eta_2^2 - 4\sin\eta_2 + 4\eta_2\cos\eta_2}{\eta_2^3} \right). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Jadi, transformasi Fourier 2-Dimensi dari fungsi $f(\boldsymbol{\tau})$ yaitu

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{4\sin\eta_1\sin\eta_2}{\eta_1\eta_2} - \frac{2\sin\eta_2}{\eta_2} \left(\frac{2\eta_1^2 - 4\sin\eta_1 + 4\eta_1\cos\eta_1}{\eta_1^3} \right) \\
&\quad - \frac{2\sin\eta_1}{\eta_1} \left(\frac{2\eta_2^2 - 4\sin\eta_2 + 4\eta_2\cos\eta_2}{\eta_2^3} \right), \tag{2.32}
\end{aligned}$$

seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.3 Grafik fungsi dari Contoh 6.

Definisi 2.2.3 (Invers Transformasi Fourier) Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{F}\{f\}(\eta) \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$f(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{f\}(\eta) e^{i\eta\tau} d\eta. \quad (2.33)$$

Definisi 2.2.4 (Invers Transformasi Fourier 2-Dimensi) Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ dan $\mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

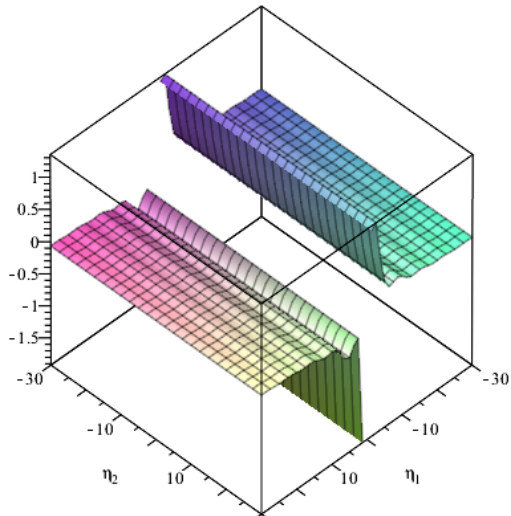
$$f(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\eta}. \quad (2.34)$$

2.3. Sifat-sifat Transformasi Fourier

Pada bagian ini dibahas sifat-sifat transformasi Fourier diantaranya sebagai berikut [Rusdin et al., 2013]:

Teorema 2.3.1 [Sifat linear] Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\eta \in \mathbb{R}$, maka berlaku

$$\mathcal{F}\{f + g\}(\eta) = \mathcal{F}\{f\}(\eta) + \mathcal{F}\{g\}(\eta). \quad (2.35)$$



Gambar 2.4 Grafik transformasi Fourier dari Contoh 6.

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan 2.20, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f + g\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} (f + g)(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau + \int_{\mathbb{R}} g(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\eta) + \mathcal{F}\{g\}(\eta).\end{aligned}$$

Jadi, Teorema 2.3.1 terbukti.

Teorema 2.3.2 [Sifat perkalian konstanta] Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap konstanta $k \in \mathbb{C}$, maka berlaku

$$\mathcal{F}\{kf\}(\eta) = k\mathcal{F}\{f\}(\eta). \quad (2.36)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan 2.20, diperoleh

$$\mathcal{F}\{kf\}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} (kf(\tau))e^{-i\eta\tau} d\tau. \quad (2.37)$$

Karena, k adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.37) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{kf\}(\eta) &= k \int_{\mathbb{R}} f(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= k\mathcal{F}\{f\}(\eta).\end{aligned}$$

Jadi, Teorema 2.3.2 terbukti.

Teorema 2.3.3 [Sifat translasi] Misalkan $f(\tau)$ adalah fungsi yang digeser oleh $\tau_0 \in \mathbb{R}$ yaitu $f_0(\tau) = f(\tau - \tau_0)$, maka

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\eta) = e^{-i\eta\tau_0} \mathcal{F}\{f\}(\eta). \quad (2.38)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan 2.20, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f_0(\tau) e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau - \tau_0) e^{-i\eta\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Misalkan $u = \tau - \tau_0, \tau = u + \tau_0, d\tau = du$. Sehingga persamaan (2.39) menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\eta(u-\tau_0)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\eta u} e^{-i\eta\tau_0} du. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Karena $e^{-i\eta\tau_0}$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.40) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0\}(\eta) &= e^{-i\eta\tau_0} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\eta u} du \\ &= e^{-i\eta\tau_0} \mathcal{F}\{f\}(\eta). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Jadi, Teorema 2.3.3 terbukti.

Teorema 2.3.4 [Sifat modulasi] Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Jika $h(\tau) = e^{i\eta_0\tau} f(\tau)$, maka

$$\mathcal{F}\{h\}(\eta) = \mathcal{F}\{f\}(\eta - \eta_0). \quad (2.42)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan 2.20, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{h\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta_0\tau} f(\tau) e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i(\eta-\eta_0)\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{f\}(\tau) (\eta - \eta_0). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Jadi, Teorema 2.3.4 terbukti.

Teorema 2.3.5 (Sifat translasi dan modulasi) *Misalkan $f \in L^1\mathbb{R}$ dan $\tau_0, \eta_0 \in \mathbb{R}$. Jika $f_0h(\tau) = e^{i\eta_0\tau}f(\tau - \tau_0)$, maka*

$$\mathcal{F}\{f_0h\}(\eta) = e^{-i(\eta-\eta_0)\tau_0}\mathcal{F}\{f\}(\eta - \eta_0). \quad (2.44)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada persamaan 2.20, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0h\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f_0h(\tau)(\tau)e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta_0\tau}f(\tau - \tau_0)e^{-i\eta\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau - \tau_0)e^{-i(\eta-\eta_0)\tau} dt. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Misalkan $u = \tau - \tau_0, \tau = u + \tau_0, d\tau = du$. Sehingga persamaan (2.45) menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0h\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i\eta(\eta-\eta_0)(u-\tau_0)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i(\eta-\eta_0)u} e^{-i(\eta-\eta_0)\tau_0} du. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Karena $e^{-i(\eta-\eta_0)\tau_0}$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.46) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0h\}(\eta) &= e^{-i(\eta-\eta_0)\tau_0} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i(\eta-\eta_0)u} du \\ &= e^{-i(\eta-\eta_0)\tau_0}\mathcal{F}\{f\}(\eta - \eta_0). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Jadi, Teorema 2.3.5 terbukti.

2.4. Transformasi Fourier Fraksional

Transformasi Fourier fraksional adalah sebuah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan orde θ . Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka transformasi Fourier fraksional menjadi transformasi Fourier biasa. Ini menunjukkan bahwa transformasi Fourier biasa adalah kasus khusus dari transformasi Fourier fraksional. Beberapa sifat dan aplikasi dari transformasi Fourier dapat diperluas ke transformasi Fourier fraksional.

Definisi 2.4.1 (Transformasi Fourier Fraksional) *Transformasi Fourier fraksional dengan sudut parameter θ dari fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, dinotasikan $\mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta)$, didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)K_\theta(\eta, \tau)d\tau, \quad (2.48)$$

dengan $K_\theta(\eta, \tau)$ disebut sebagai fungsi kernel dari transformasi Fourier fraksional, ditulis

$$K_\theta(\eta, \tau) = \begin{cases} A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta}, & \theta \neq n\pi \\ \delta(\tau - \eta), & \theta = 2n\pi \\ \delta(\tau + \eta), & \theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.49)$$

dan

$$A_\theta = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}}, \quad \overline{A_\theta} = \sqrt{\frac{1 + i \cot \theta}{2\pi}}. \quad (2.50)$$

[Bahri M. & Karim S. A. A., 2023].

Khususnya untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) K_\theta(\eta, \tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}} e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \sqrt{\frac{1 - i \cot \frac{\pi}{2}}{2\pi}} e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \frac{\pi}{2}}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \frac{\pi}{2}} d\tau. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Karena $\cot \frac{\pi}{2} = 0$ dan $\csc \frac{\pi}{2} = 1$, maka persamaan (2.51) menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{0 - i\tau\eta} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\tau\eta} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f\}(\eta). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Definisi 2.4.2 (Invers Transformasi Fourier Fraksional) Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $\mathcal{F}_\theta\{f\} \in L^1(\mathbb{R})$. Invers dari transformasi Fourier fraksional dari fungsi f didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \mathcal{F}_\theta^{-1}[\mathcal{F}_\theta\{f\}](\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta) \overline{A_\theta} e^{-i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} + i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\eta. \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.5. Sifat-sifat Transformasi Fourier Fraksional

Pada bagian ini dibahas sifat-sifat transformasi Fourier fraksional diantaranya sebagai berikut [Pratami I. A., 2023]:

Teorema 2.5.1 (Sifat linear) *Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\eta \in \mathbb{R}$, maka berlaku*

$$\mathcal{F}_\theta\{\alpha f + \beta g\}(\eta) = \alpha \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta) + \beta \mathcal{F}_\theta\{g\}(\eta), \quad (2.54)$$

dengan α, β merupakan dua konstanta kompleks.

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional pada persamaan (2.48), diperoleh

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_\theta\{\alpha f + \beta g\}(\eta) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(\tau) + \beta g(\tau)) (A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta}) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} + \beta g(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta g(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau + \beta \int_{\mathbb{R}} g(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\ &= \alpha \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta) + \beta \mathcal{F}_\theta\{g\}(\eta). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Jadi, Teorema 2.5.1 terbukti.

Teorema 2.5.2 (Sifat translasi) *Misalkan $f(\tau)$ adalah fungsi yang digeser oleh $\tau_0 \in \mathbb{R}$ yaitu $f_0(\tau) = f(\tau - \tau_0)$, maka*

$$\mathcal{F}_\theta\{f_0\}(\eta) = e^{\frac{i}{4}(\tau_0^2 \sin 2\theta - 4\eta\tau_0 \sin \theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos \theta). \quad (2.56)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional pada persamaan (2.48), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta\{f_0\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f_0(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau - \tau_0) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Misalkan $u = \tau - \tau_0$, $\tau = u + \tau_0$, $d\tau = du$. Sehingga persamaan (2.57) menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta\{f_0\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{i((u + \tau_0)^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i(u + \tau_0) \cdot \eta \csc \theta} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{i(u^2 + 2u\tau_0 + \tau_0^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - \frac{i\eta u + i\eta\tau_0}{\sin \theta}} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{\frac{i}{2 \sin \theta} ((u^2 + 2u\tau_0 + \tau_0^2 + \eta^2) \cos \theta - 2(\eta u + \eta\tau_0))} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{\frac{i}{2 \sin \theta} (u^2 \cos \theta + 2u\tau_0 \cos \theta + \tau_0^2 \cos \theta + \eta^2 \cos \theta) - 2\eta u - 2\eta\tau_0} du. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Misalkan $v = \eta - \tau_0 \cos \theta$ dan $\eta = v + \tau_0 \cos \theta$. Sehingga persamaan (2.58) menjadi

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_\theta\{f_0\}(\eta) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{\frac{i}{2\sin\theta}(u^2 \cos\theta + 2u(\tau_0 \cos\theta - (v + \tau_0 \cos\theta)) + \tau_0^2 \cos\theta + (v + \tau_0 \cos\theta)^2 \cos\theta - 2\tau_0(v + \tau_0 \cos\theta))} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{\frac{i}{2\sin\theta}((u^2 + v^2) \cos\theta - 2uv)} e^{\frac{i}{2\sin\theta}(2v\tau_0 \cos\theta + \tau_0^2 \cos^3\theta - 2v\tau_0 - \tau_0^2 \cos\theta)} du \\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(2v\tau_0 \cos\theta + \tau_0^2 \cos^3\theta - 2v\tau_0 - \tau_0^2 \cos\theta)} \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{\frac{i}{2\sin\theta}((u^2 + v^2) \cos\theta - 2uv)} du \\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(2v\tau_0(1 - \cos^2\theta) - \tau_0^2 \cos\theta(1 - \cos^2\theta))} \int_{\mathbb{R}} f(u) A_\theta e^{i((u^2 + v^2) \frac{\cot\theta}{2} - 2uv \csc\theta)} du. \tag{2.59}
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa

$$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta. \tag{2.60}$$

Substitusi persamaan (2.60) ke persamaan (2.59) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\theta\{f_0\}(\eta) &= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2v\tau_0 \sin^2\theta - \tau_0^2 \cos\theta \sin^2\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(v) \\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2(\eta - \tau_0 \cos\theta)\tau_0 \sin^2\theta - \tau_0^2 \cos\theta \sin^2\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos\theta) \\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2\eta\tau_0 \sin^2\theta + 2\tau_0^2 \cos\theta \sin^2\theta - \tau_0^2 \cos\theta \sin^2\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos\theta) \\
&= e^{\frac{i}{2\sin\theta}(-2\eta\tau_0 \sin^2\theta + \tau_0^2 \cos\theta \sin^2\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos\theta) \\
&= e^{\frac{i}{2}(-2\eta\tau_0 \sin\theta + \tau_0^2 \cos\theta \sin\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos\theta) \\
&= e^{\frac{i}{4}(-4\eta\tau_0 \sin\theta + 2\tau_0^2 \cos\theta \sin\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos\theta). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa

$$2 \cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta. \tag{2.62}$$

Substitusi persamaan (2.62) ke persamaan (2.61) diperoleh

$$\mathcal{F}_\theta\{f_0\}(\eta) = e^{\frac{i}{4}(\tau_0^2 \sin 2\theta - 4\eta\tau_0 \sin\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \tau_0 \cos\theta). \tag{2.63}$$

Jadi, Teorema 2.5.2 terbukti.

Teorema 2.5.3 (Sifat modulasi) Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Jika $h(\tau) = e^{i\eta_0\tau} f(\tau)$, maka

$$\mathcal{F}_\theta\{h\}(\eta) = e^{\frac{i}{4}(4\eta\eta_0 \cos\theta - \eta_0^2 \sin 2\theta)} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\eta - \eta_0 \sin\theta). \tag{2.64}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier fraksional pada persamaan (2.48),

diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\theta\{h\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta_0 \tau} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta} d\tau \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau \cdot \eta \csc \theta + i\eta_0 \tau} d\tau.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Diketahui bahwa

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}. \tag{2.66}$$

Substitusi persamaan (2.66) ke persamaan (2.65) diperoleh

$$\mathcal{F}_\theta\{h\}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + \eta^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau(\eta - \eta_0 \sin \theta) \csc \theta} d\tau. \tag{2.67}$$

Misalkan, $u = \eta - \eta_0 \sin \theta$ dan $\eta = u + \eta_0 \sin \theta$. Sehingga persamaan (2.67) menjadi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\theta\{h\}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + (u + \eta_0 \sin \theta)^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau u \csc \theta} d\tau \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + u^2 + 2u\eta_0 \sin \theta + \eta_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau u \csc \theta} d\tau \\
 &= e^{i(2u\eta_0 \sin \theta + \eta_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\cot \theta}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) A_\theta e^{i(\tau^2 + u^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau u \csc \theta} d\tau \\
 &= e^{i(2(\eta - \eta_0 \sin \theta)\eta_0 \sin \theta + \eta_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{F}\{f\}(u) \\
 &= e^{i(2\eta\eta_0 \sin \theta - 2\eta_0^2 \sin^2 \theta + \eta_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{F}\{f\}(u) \\
 &= e^{i(2\eta\eta_0 \sin \theta - \eta_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{F}\{f\}(u).
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Diketahui bahwa

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \tag{2.69}$$

Substitusi persamaan (2.69) ke persamaan (2.68) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\theta\{h\}(\eta) &= e^{\frac{i \cos \theta}{2 \sin \theta} (2\eta\eta_0 \sin \theta - \eta_0^2 \sin^2 \theta)} \mathcal{F}\{f\}(u) \\
 &= e^{\frac{i}{2} (2\eta\eta_0 \cos \theta - \eta_0^2 \sin \theta \cos \theta)} \mathcal{F}\{f\}(u) \\
 &= e^{\frac{i}{4} (4\eta\eta_0 \cos \theta - 2\eta_0^2 \sin \theta \cos \theta)} \mathcal{F}\{f\}(u).
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Substitusi persamaan (2.62) ke persamaan (2.70) diperoleh

$$\mathcal{F}_\theta\{h\}(\eta) = e^{\frac{i}{4} (4\eta\eta_0 \cos \theta - \eta_0^2 \sin 2\theta)} \mathcal{F}\{f\}(u). \tag{2.71}$$

Jadi, Teorema 2.5.3 terbukti.

2.6. Transformasi Fourier Fraksional *Coupled*

Definisi 2.6.1 [*Transformasi Fourier Fraksional Coupled*] Transformasi Fourier fraksional *coupled* dari fungsi $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\eta}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\tau})K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\tau})d(\gamma)e^{-i(a(\gamma)(|\boldsymbol{\tau}|^2+|\boldsymbol{\eta}|^2)-\boldsymbol{\tau}\cdot M\boldsymbol{\eta})}d\boldsymbol{\tau}.\end{aligned}\quad (2.72)$$

Pada kasus ini,

$$K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = d(\gamma)e^{-i(a(\gamma)(|\boldsymbol{\tau}|^2+|\boldsymbol{\eta}|^2)-\boldsymbol{\tau}\cdot M\boldsymbol{\eta})}.\quad (2.73)$$

Dimana,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad a(\gamma) = \frac{\cot \gamma}{2}, \quad b(\gamma, \delta) = \frac{\cos \delta}{\sin \gamma}, \\ c(\gamma, \delta) &= \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}, \quad d(\gamma) = \frac{ie^{-i\gamma}}{2\pi \sin \gamma}, \quad M = \begin{pmatrix} b(\gamma, \delta) & c(\gamma, \delta) \\ -c(\gamma, \delta) & b(\gamma, \delta) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

dengan, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\alpha + \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ [Shah F. A. & Lone Waseem Z., 2022].

Berdasarkan Definisi 2.6.1 diperoleh

$$\begin{aligned}(\det M) &= b(\gamma, \delta)b(\gamma, \delta) + c(\gamma, \delta)c(\gamma, \delta) \\ &= \frac{\cos \delta \cos \delta}{\sin \gamma \sin \gamma} + \frac{\sin \delta \sin \delta}{\sin \gamma \sin \gamma} \\ &= \frac{\cos^2 \delta}{\sin^2 \gamma} + \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2 \gamma} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \gamma}.\end{aligned}\quad (2.74)$$

Definisi 2.6.2 (Invers Transformasi Fourier Fraksional *Coupled*) Untuk setiap $f \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}, L^1(\mathbb{R}^2)$, invers transformasi Fourier fraksional *coupled* didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\tau}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\eta})\overline{K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau})}d\boldsymbol{\eta} \\ &= \overline{d(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\boldsymbol{\eta})e^{i(a(\gamma)(|\boldsymbol{\tau}|^2+|\boldsymbol{\eta}|^2)-\boldsymbol{\tau}\cdot M\boldsymbol{\eta})}d\boldsymbol{\eta}.\end{aligned}\quad (2.75)$$

Adapun formula Parseval dari transformasi Fourier fraksional *coupled* ditulis sebagai

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}, \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{g\} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\quad (2.76)$$

Khusus untuk $f = g$ diperoleh rumus Plancherel untuk transformasi Fourier fraksional *coupled* yaitu

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (2.77)$$

2.7. Distribusi Fraksional Wigner-Ville *Coupled*

Definisi 2.7.1 [DFrWVC] Misal diberikan dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* dari f dan g didefinisikan sebagai

$$\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \overline{g\left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)} d(\gamma) e^{-i(a(\gamma)(|\boldsymbol{\tau}|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2) - \boldsymbol{\tau} \cdot M \boldsymbol{\eta})} d\boldsymbol{\tau}. \quad (2.78)$$

[Teali A. A. et al., 2023]

Misalkan

$$h_{f,g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = f\left(\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \overline{g\left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)}. \quad (2.79)$$

Persamaan (2.78) dapat ditulis kembali sebagai

$$\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}} h_{f,g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) d(\gamma) e^{-i(a(\gamma)(|\boldsymbol{\tau}|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2) - \boldsymbol{\tau} \cdot M \boldsymbol{\eta})} d\boldsymbol{\tau}. \quad (2.80)$$

Dengan menggunakan definisi $K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau})$ pada persamaan (2.73), sehingga persamaan (2.80) menjadi

$$\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}} h_{f,g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) K_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}. \quad (2.81)$$

Lebih lanjut, dengan menerapkan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.20), sehingga persamaan (2.81) menjadi

$$\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta} = \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{h_{f,g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})\}(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.82)$$

Contoh 7. Misalkan

$$f(\boldsymbol{\tau}) = e^{-|\boldsymbol{\tau}|^2} \quad (2.83)$$

dan

$$g(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1 \\ 0, & \tau_1, \tau_2 \text{ lainnya.} \end{cases} \quad (2.84)$$

Carilah distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* dari fungsi tersebut.

Solusi 7. Dengan menggunakan definisi distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled* pada persamaan (2.78) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= d(\gamma) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}|^2} g\left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right) e^{-i(a(\gamma)(|\boldsymbol{\tau}|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2) - \boldsymbol{\tau} \cdot M\boldsymbol{\eta})} d\boldsymbol{\tau} \\
&= d(\gamma) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left((x_1 + \frac{\tau_1}{2})^2 + (x_2 + \frac{\tau_2}{2})^2\right)} g\left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \\
&\quad \times e^{-i(a(\gamma)(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) - \tau_1(b\eta_1 + c\eta_2) - \tau_2(b\eta_2 - c\eta_1))} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= d(\gamma) \int_{2(x_1-1)}^{2x_1} \int_{2(x_2-1)}^{2x_2} e^{-(x_1 + \frac{\tau_1}{2})^2 - ia(\gamma)\tau_1^2 + \tau_1(b\eta_1 + c\eta_2)} \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)} \int_{2(x_1-1)}^{2x_1} e^{-\frac{\tau_1^2}{4} - ia(\gamma)\tau_1^2 + \tau_1(b\eta_1 + c\eta_2) - \tau_1 x_1} d\tau_1 \\
&\quad \times \int_{2(x_2-1)}^{2x_2} e^{-\frac{\tau_2^2}{4} - ia(\gamma)\tau_2^2 + \tau_2(b\eta_2 + c\eta_1) - \tau_2 x_2} d\tau_2. \tag{2.85}
\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)} \int_{2(x_1-1)}^{2x_1} e^{\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)\tau_1^2 + \tau_1(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)} d\tau_1 \\
&\quad \times \int_{2(x_2-1)}^{2x_2} e^{\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)\tau_2^2 + \tau_2(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)} d\tau_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)} \int_{2(x_1-1)}^{2x_1} e^{\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)\left(\tau_1^2 - \tau_1 \frac{b\eta_1 + c\eta_2 - x_1}{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}\right)} d\tau_1 \\
&\quad \times \int_{2(x_2-1)}^{2x_2} e^{\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)\left(\tau_2^2 - \tau_2 \frac{b\eta_2 + c\eta_1 - x_2}{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}\right)} d\tau_2. \tag{2.86}
\end{aligned}$$

Persamaan (2.86) menjadi

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)} \int_{2(x_1-1)}^{2x_1} e^{\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)\left(\tau_1 - \frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)}{2\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)}\right)^2} e^{-\frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)^2}{4\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)}} d\tau_1 \\
&\quad \times \int_{2(x_2-1)}^{2x_2} e^{\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)\left(\tau_2 - \frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)}{2\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)}\right)^2} e^{-\frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)^2}{4\left(\frac{1}{4} + ia(\gamma)\right)}} d\tau_2 \\
&= d(\gamma) e^{-ia(\gamma)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + (x_1^2 + x_2^2) - \frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)^2}{1 + i4a(\gamma)} - \frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)^2}{1 + i4a(\gamma)}} \\
&\quad \times \int_{2(x_1-1)}^{2x_1} e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}\tau_1 - \frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}}\right)^2} d\tau_1 \int_{2(x_2-1)}^{2x_2} e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}\tau_2 - \frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}}\right)^2} d\tau_2. \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Misalkan,

$$u = \frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}} - \sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}\tau_1,$$

dan

$$z = \frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}} - \sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}\tau_2.$$

Persamaan (2.87) menjadi

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{f,g}^{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{\pi}{1 + i4a(\gamma)} d(\gamma) e^{-ia(\gamma)(\eta_1^2 + \eta_2^2) - (x_1^2 + x_2^2) - \frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)^2}{1 + i4a(\gamma)} - \frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)^2}{1 + i4a(\gamma)}} \\ & \left[\left(\operatorname{erf} \left(\frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}} + 2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}(x_1 - 1) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{(b\eta_1 + c\eta_2 - x_1)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}} - 2x_1\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)} \right) \right) \right. \\ & \quad \times \left(\operatorname{erf} \left(\frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}} + 2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}(x_2 - 1) \right) \right. \\ & \quad \left. \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{(b\eta_2 + c\eta_1 - x_2)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)}} - 2x_2\sqrt{\frac{1}{4} + ia(\gamma)} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

dengan

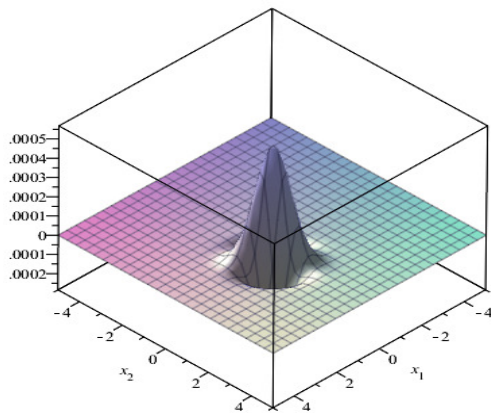
$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \text{for all } z.$$

Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.5 dan 2.6.

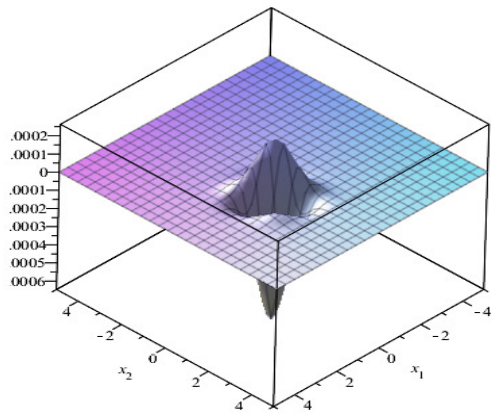
2.8. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Dalam kenyataannya, menghitung kecepatan dan posisi benda bergerak relatif mudah. Akan tetapi dalam dunia partikel kuantum, membuat perhitungan ini tidak mungkin disebabkan suatu hubungan matematis yang disebut prinsip ketidakpastian. Prinsip ketidakpastian adalah hasil matematis yang memberikan batasan pada lokalisasi simultan dari suatu fungsi dan transformasi Fouriernya.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg merupakan salah satu hukum dasar dari mekanika kuantum dan sebagian besar memberikan pernyataan mengenai batasan dengan tidak adanya hasil pengukuran mutlak dalam setiap pengukuran kuantum. Werner Heisenberg (1927) mengemukakan formulasi ini dengan menyatakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tidak dapat ditentukan dalam waktu yang bersamaan, karena semakin akurat

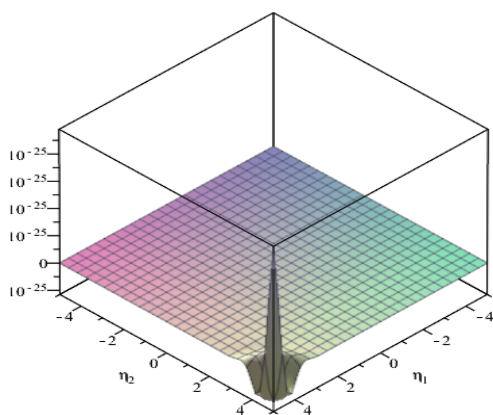


(a)

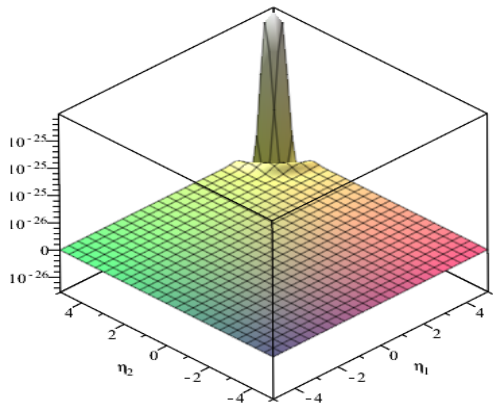


(b)

Gambar 2.5 (a) bagian riil, (b) bagian imajiner dari distribusi fractional Wigner-Ville *coupled* dari Contoh 7 dengan domain spasial (x domain) untuk $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = 5$, $\mathbf{x} = [-5, 5]$.



(a)



(b)

Gambar 2.6 (a) bagian riil, (b) bagian imajiner dari distribusi fractional Wigner-Ville *coupled* dari Contoh 7 dengan domain frekuensi (η domain) untuk $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ $x = 5$ dan $\eta = [-5, 5]$.

momentum ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya, demikian sebaliknya.

Berikut merupakan bentuk umum persamaan prinsip ketidakpastian Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}, \quad (2.89)$$

dengan keterangan, Δx adalah ketidakpastian posisi, Δp adalah ketidakpastian momentum, dan h adalah konstanta.

Dari Persamaan (2.89) diketahui bahwa hasil kali ketidakpastian posisi (Δx) suatu benda dan ketidakpastian momentum (Δp) dalam arah x akan lebih besar atau sama dengan hasil bagi konstanta oleh 4π . Bentuk lain dari prinsip ketidakpastian Heisenberg juga tidak kalah penting. Salah satunya adalah modifikasi prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Dalam keadaan ini, Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier.

2.8.1. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier

Hasil-hasil berikut berguna dalam membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.

Teorema 2.8.1 (Teorema Fubini) *Jika $f = f(x, y)$ adalah fungsi kontinu didefinisikan pada persegi panjang $R = [a, b] \times [c, d]$ di \mathbb{R}^2 , maka*

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.90)$$

[Lovric M., 1997].

Teorema 2.8.2 *Misalkan $f(\tau) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dan $\mathcal{F}\{f\}(\eta), \eta \mathcal{F}\{f\}(\eta) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, maka berlaku pertidaksamaan berikut*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tau|^2 |f(\tau)|^2 d\tau \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^2 |\mathcal{F}\{f\}(\eta)|^2 d\eta \geq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.91)$$

[Rahmah S., 2022].

Prinsip ketidakpastian ini digeneralisasi ke distribusi fraksional Wigner-Ville *coupled*.