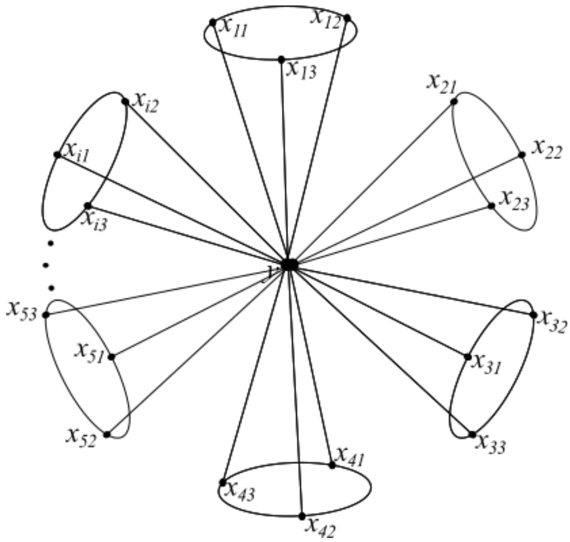
DIMENSI METRIK GRAF JAM PASIR YANG DIMODIFIKASI



DENIZAR KEMALA

H011171313

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2024

DIMENSI METRIK GRAF JAM PASIR YANG DIMODIFIKASI

DENIZAR KEMALA

H011171313

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

DIMENSI METRIK GRAF JAM PASIR YANG DIMODIFIKASI

DENIZAR KEMALA

H011171313

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana

Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan
dengan sungguh-sungguh

Dimensi Metrik Graf Jam Pasir yang Dimodifikasi

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum
pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 11 Juni 2024

Denizar Kemala

NIM. H011171313

DIMENSI METRIK GRAF JAM PASIR YANG DIMODIFIKASI

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 197008072000031002	**NIP. 196402071991031013**

Ketua Program Studi Matematika,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

Dr. Firman, S.Si., M.Si

NIP. 196804292002121001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Denizar Kemala
NIM	: H011171313
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Dimensi Metrik Graf Jam Pasir yang Dimodifikasi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	( )
Sekretaris	: Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	( )
Anggota	: Naimah Aris, S.Si., M.Math.	( )
Anggota	: Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 11 Juni 2024

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala, atas limpahan rahmat, nikmat, taufik, serta hidayah yang tak pernah berhenti mengalir dari-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya.

Penulisan skripsi yang berjudul **"Dimensi Metrik Graf Jam Pasir yang Dimodifikasi"**, disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, arahan, serta bimbingan dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya terutama kepada kedua orang tua penulis, Ayahanda **Drs. H. Muhammad Sainal, MA** dan Ibunda **Hj. Salinah Taju, S.E**, serta keluarga besar penulis yang selalu memberikan nasihat, perhatian, doa, serta dukungan material dan moral. Penulis juga menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M. Sc.,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. **Dr. Eng. Amiruddin, M. Si.,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
3. **Dr. Firman, S. Si., M. Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
4. **Prof. Dr. Nurdin, S. Si., M. Si.,** selaku dosen pembimbing utama yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran ditengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing, mengarahkan, serta memotivasi penulis selama penyusunan skripsi ini.
5. **Dr. Muhammad Zakir, M. Si.,** selaku dosen pembimbing pertama yang dengan sabar dan ikhlas meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran ditengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing, mengarahkan, serta memotivasi penulis selama penyusunan skripsi ini.
6. **Naimah Aris, S. Si., M. Math.,** selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan kritikan dan saran yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
7. **Jusmawati Massalesse, S. Si., M. Si.,** selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan perhatian, dukungan, kritikan, serta saran yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
8. **Para Tendik/Dosen** Departemen Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin yang telah membekali ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama perkuliahan.

9. **Para Pegawai/Staff** Departemen Matematika, Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin yang telah membantu selama perkuliahan dan berbagai persuratan untuk penyusunan Skripsi ini.
10. **Amanda Devita** yang selalu setia mendampingi setiap saat, menyemangati, memberikan bantuan, perhatian, nasihat, serta dukungan kepada penulis.
11. Teman-teman **24/7 Lucknut**, yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan selalu memberikan semangat selama menyusun skripsi ini.
12. Teman-teman **Matematika 2017**, yang telah mendukung dan berjuang bersama selama masa perkuliahan. Serta semua pihak yang telah membantu penulis dan tak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis memohon maaf apabila dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 11 Juni 2024

Denizar Kemala

ABSTRAK

Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan W adalah suatu sub himpunan dari himpunan titik V pada G. Himpunan W disebut himpunan penentu pada G jika untuk setiap titik pada G memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Himpunan penentu dengan banyak anggota minimum disebut himpunan penentu minimum atau basis dari G dan kardinalitas himpunan penentu minimum menyatakan dimensi metrik pada graf G. Dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Pada skripsi ini membahas mengenai dimensi metrik graf jam pasir yang dimodifikasi mHg_n yang dikontruksi dari graf lengkap K_1 dengan graf C_n. Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh bahwa $\dim(mHg_n)$ dengan $m \geq 3$ dan $3 \leq n \leq 5$ adalah $2m$.

Kata kunci: *graf G, himpunan penentu, basis, dimensi metrik, graf jam pasir yang dimodifikasi.*

ABSTRACT

Suppose G is a connected graph and W is a subset of the vertex set V of G. The set W is called a resolving set of G if every vertex in G has a unique representation with respect to W. A resolving set with the minimum number of element is called a minimumresolving set or basis of G, and the cardinality of the minimum resolving set is a metric dimension of the graph $G,$ denoted by $\dim(G)$.

This thesis discusses the metric dimension of a modified hourglass graph mHg_n, constructed from the complete graph K_1 with the cycle graph C_n. Based on the discussion, it is found that $\dim(mHg_n)$ with $m \geq 3$ and $3 \leq n \leq 5$ is $2m$.

Keyword: *graph G, resolving set, basis, metric dimension, modified hourglass graph.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
G	Graf G	1
$V(G)$	Himpunan titik graf G	1
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	1
u, v	Titik u dan titik v	1
$d(u, v)$	Jarak antara titik u dan v pada graf G	1
W	Himpunan W	1
$r(v\|W)$	Representasi titik v terhadap himpunan W	1
$\dim(G)$	Dimensi metrik graf G	1
Hg_n	Graf jam pasir dengan orde n	2
mHg_n	Graf jam pasir yang dimodifikasi	2
k_1	Graf lengkap orde 1	2
C_n	Graf sikel orde n	2
"| |"	kardinalitas	3
$p(G)$	Orde titik graf G	3
$q(G)$	Size (ukuran) sisi pada graf G	3
P_n	Graf lintasan orde n	4
K_n	Graf lengkaporde n	5
■	Symbol terbukti	10

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori Graf merupakan salah satu cabang ilmu dalam Matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler Pada tahun 1736. Ia menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg di Rusia dalam karyanya "*Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis".* Pada permasalahan ini Euler ingin mencoba membuktikan melintasi tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan dalam sekali lintasan [1], Permasalahan ini ia gambarkan dengan menjadian ke-empat daratan menjadi sebuah titik dan tujuh jembatan yang menghubungkannya menjadi sebuah sisi. Hal ini yang menjadi cikal bakal terlahirnya konsep Teori graf.

Graf G didefinisikan sebagai himpunan tak-kosong dan berhingga $V(G)$ dengan anggotanya disebut titik serta $E(G)$ adalah himpunan sisi (mungkin kosong) yang anggota-anggotanya terdiri atas pasangan tak-terurut dua titik berbeda yang merupakan elemen $V(G)$ yang disebut sisi/garis. Dalam teori graf terdapat berbagai konsep, dimana salah satunya adalah Dimensi Metrik. Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, kemudian secara terpisah oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 [2]. Misalkan $V(G)$ adalah himpunan titik-titik pada Graf G, jarak antara dua titik yang dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah Panjang lintasan terpendek dari u ke v. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari titik-titik graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-tuple) $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum (*basis metrik*), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dengan *dimensi metrik* dan dinotasikan dengan $dim(G)$ $[3]$.

Penelitian tentang dimensi metrik sudah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, seperti contohnya penelitian tentang dimensi metrik pada graf umum yang dilakukan oleh Klein, D.J.,Yi, E (2012) yang meneliti tentang perbandingan dimensi metrik suatu graf dengan graf baru bentuknya, Kousar, I. dkk (2010) meneliti tentang graf-graf yang memiliki dimensi metrik yang sama, dan Glen G Chappel adalah peneliti yang memiliki peranan penting dalam pengembangan dimensi metrik secara khusus, terutama untuk penelitian dimensi metrik dari graf khusus. Dalam teori graf terdapat banyak jenis graf khusus, diantaranya adalah graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf bipartit dan graf bintang. Sebagaimana dalam matematika secara umum, dalam teori graf dikenal juga operasi dua graf. Operasi pada graf menggunakan istilah yang sama dengan operasi pada aljabar, antara lain, gabungan, penjumlahan, perkalian, lebih lanjut terdapat juga operasi corona dan amalgamasi pada suatu graf.

Graf jam pasir (*hourglass) yang dinotasikan dengan* (Hg_n) merupakan graf jenis baru yang diperkenalkan oleh Syamsuddin dalam penelitiannya *"Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran untuk Graf Lintasan Versus Graf Jam Pasir."* Graf jam pasir Hg_n adalah graf hasil operasi tambah graf K_1 dengan graf $2C_n$ $(k_1 + 2C_n)$. Namun disini peneliti memodifikasi graf jam pasir dengan menambahkan C_n sebanyak m-kopian. Karena graf ini terbilang graf baru, sehingga peneliti tertarik untuk melakukan penelitian terkait Dimensi metrik pada graf Jam Pasir yang dimodifikasi dengan judul ***"Dimensi Metrik Graf Jam Pasir yang dimodifikasi."***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, penulis ingin mengetahui berapakah dimensi metrik pada graf jam pasir yang dimodifikasi (mHg_n).

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini penulis hanya membahas tentang dimensi metrik pada graf jam pasir yang dimodifikasi dengan notasi mHg_n dengan $m \geq 3$ dan $3 \leq n \leq 5$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi metrik pada graf jam pasir yang dimodifikasi (mHg_n)

1.5 Manfaat Penelitian

Untuk mengetahui dimensi metrik graf jam pasir yang dimodifikasi (mHg_n) serta dapat digunakan sebagai rujukan untuk peneliti lain terkait dimensi metrik.

1.6 Landasan Teori

1.6.1 Graf

Beberapa definisi dari skripsi ini dikutip dari buku "Pengantar dan Jenis-jenis Graf" oleh Prof. Dr. Hasmawati, M.Si

Definisi 1.6.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E)*, dimana* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, sedangkan* E *adalah pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi.* [4]

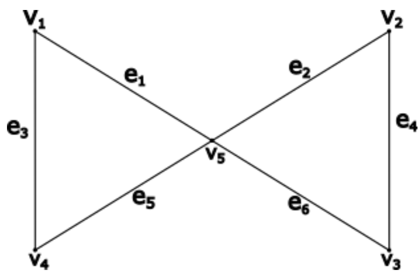
Berdasarkan definisi 1.6.1.1 himpunan V disebut himpunan titik *(vertex set)* dan E disebut himpunan sisi *(edge set).* kadang-kadang ada yang menyebut titik sebagai *noktah* dan sisi sebagai point, busur, rusuk, atau garis. Secara Matematika, Definisi 1.6.1.1 dapat ditulis sebagai berikut: ***Graf*** $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u \text{ } disebut \text{ } titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ dengan (u, v) disebut sisi, namun pada pembahasan ini, selanjutnya sisi (u, v) akan ditulis uv.

Definisi 1.6.1.2 *Kardinalitas dari suatu himpunan adalah banyaknya anggota dari suatu himpunan tersebut, kardinalitas biasanya dinotasikan dengan* "| |".

Orde *(order)* dari graf G adalah banyaknya anggota dari $V(G)$ dan dinyatakan dengan $p(G)$ sedangkan **ukuran** *(size)* adalah banyaknya sisi pada graf G dan dinotasikan dengan $q(G)$. Jadi apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukurannya, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Definisi 1.6.1.3 *Derajat suatu titik v_i dalam suatu graf G, dilambangkan dengan "$d(v_i)$", adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$.*

Contoh 1.6.1.1 Misalkan suatu Graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = v_1v_5,\ e_2 = v_2v_5,\ e_3 = v_1v_4,\ e_4 = v_2v_3,$ $e_5 = v_4v_5$.

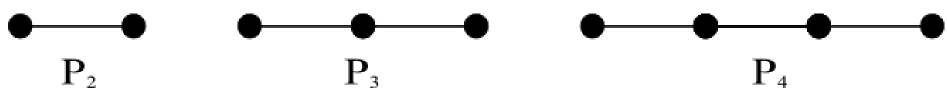


Gambar 1.6.1.1 Graf G

Dari Gambar 1.6.1.1 di atas dapat dilihat bahwa terdapat empat titik berderajat dua, yakni v_1, v_2, v_3, v_4, dan satu titik berderajat empat yakni v_5, dan graf di atas memiliki orde $p(G) = 5$ dan size $q(G) = 6$.

Definisi 1.6.1.4 *Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari suatu barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_iv_{i+1}, i = 1,2, \ldots, n-1$ dan dinotasikan dengan P_n.*

Berikut akan diperlihatkan graf lintasan pada gambar 2 di bawah:



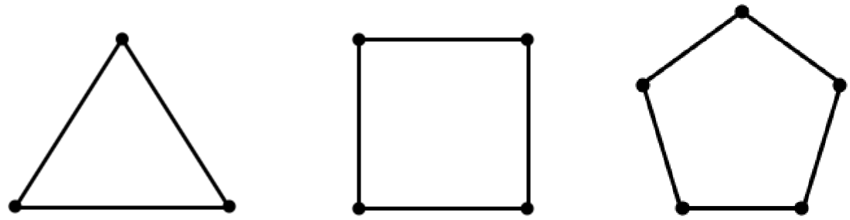
Gambar 1.6.1.2 Graf Lintasan

Dari Gambar 1.6.1.2 di atas merupakan contoh dari graf lintasan P_2, P_3, P_4

Definisi 1.6.1.5 *Graf siklus (cycle) dengan n titik dan n sisi dimana $n \geq 3$ dan dinotasikan dengan C_n adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi*

$E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$.

selanjutnya akan ditunjukan beberapa contoh graf siklus di bawah ini:



Gambar 1.6.1.3 Graf Siklus

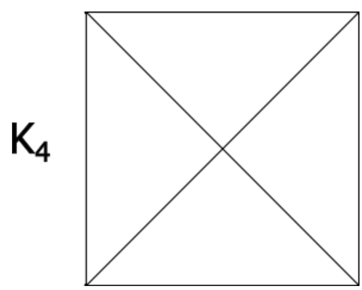
Dari tiga gambar di atas dapat dilihat beberapa graf siklus C_3, C_4, C_5.

Graf G dikatakan graf **terhubung** jika setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v. Berdasarkan pengertian ini, graf siklus merupakan graf terhubung.

Definisi 1.6.1.6 *Graf G dikatakan Graf Lengkap jika setiap dua titik pada graf G bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan K_n.*

Graf lengkap memiliki ciri khusus yakni berderajat sama, graf yang setiap titiknya berderajat sama disebut graf *regular*. Jika derajat graf regular adalah r, dinotasikan $r - reguler$, maka graf lengkap $K_n = (n-1) - reguler,$ karena setiap titik pada graf K_n berderajat $n - 1$. [4].

Berikut diberikan gambar graf lengkap :

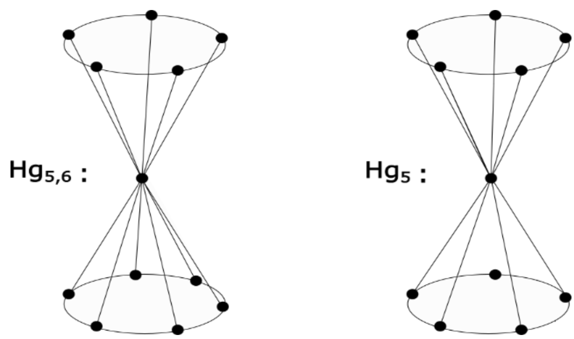


Gambar 1.6.1.4 Graf Lengkap

Definisi 1.6.1.7 *Distance dari titik u ke titik v pada graf G dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah Panjang lintasan terpendek dari u ke v, $d(u, v) \geq 0$ untuk semua pasangan titik u, v di graf G dan $d(u, v) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$. Jika tidak terdapat lintasan dari u ke v, maka $d(u, v) = \infty$.* [5]

Definisi 1.6.1.8 *Graf jam pasir $(Hg_{n,r})$ adalah graf jumlah antara graf lengkap K_1 dengan gabungan dua graf sikel dengan n titik pada satu sikel dan r titik pada sikel lainnya. Jika $n = r$ maka graf jam pasir $Hg_{n,r}$ dapat dikatakan graf jam pasir seimbang, dan dinotasikan dengan Hg_n.* [6]

Berikut akan ditunjukan representasi dua contoh graf jam pasir, yaitu $Hg_{5,6}$ dan Hg_5:



Gambar 1.6.1.1 Graf $Hg_{5,6}$ dan Graf Hg_5

Dari gambar 5 di atas titik graf lengkap K_1 pada graf jam pasir $Hg_{n,r}$ sebagai titik pusat. Titik pusat $Hg_{n,r}$ berderajat $n + r$, n pada titik C_n berderajat 3 dan r pada C_r juga berderajat 3. Jika $n = r$ graf jam pasir disebut seimbang, dan dinotasikan dengan Hg_n.

Selanjutnya akan didefinisikan graf Hg_n dalam bentuk matematika sebagai berikut:

$$V(Hg_n) = \{x_{ij}, y \mid 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq n - 1\},$$

$$E(Hg_n) = \{x_{ij}y, x_{ij}x_{i(j+1)\ mod\ n} \mid 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq n - 1\}$$

1.6.2 Basis dan Dimensi Metrik

Berikut ini akan dijelaskan definisi basis dan dimensi metrik pada graf:

Definisi 1.6.2.1 *Misalkan G graf terhubung dan terdapat himpunan terurut* $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\} \subseteq V(G)$, ***representasi dari titik*** $\boldsymbol{v \in V(G)}$ *terhadap* W *adalah pasangan terurut k-tupel, yaitu* $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_n)\big)$.

Definisi 1.6.2.2 *Himpunan* W *disebut* ***himpunan penentu*** *jika untuk setiap dua titik* $x, y \in V(G)$ *yang berbeda memenuhi* $r(x|W) \neq r(y|W)$. [7]

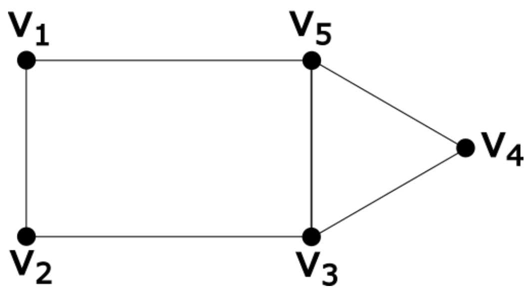
Definisi 1.6.2.3 Himpunan penentu yang mempunyai kardinalitas paling minimum disebut himpunan penentu minimum **(*minimum separated set*).** [7]

Definisi 1.6.2.2 *Basis dari suatu graf* G *adalah himpunan penentu minimum dari* G.[7]

Definisi 1.6.2.3 *Dimensi metrik* dari graf G adalah banyaknya kardinalitas dari himpunan penentu minimum (basis) dan dinotasikan $\mathbf{dim}\ (\boldsymbol{G})$**.** [7]

Contoh 1.6.2.1

Misal G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_5v_4, v_5v_3, v_3v_4\}$. Bentuk graf G dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1.6.2.1 Graf G

Misalkan dipilih $W_1 = \{v_1, v_3\}$, representasi setiap titik pada graf G terhadap W_1 adalah:

$r(v_1|W_1) = (0,2)$ $\quad$ $r(v_2|W_1) = (1,1)$ $\quad$ $r(v_3|W_3) = (2,0)$

$r(v_4|W_1) = (2,1)$ $\quad$ $r(v_5|W1) = (1,1)$

Karena terdapat representasi yang sama yakni $r(v_2|W_1) = r\{v_5|W_1) = (1,1). maka\ W_1$ bukan himpunan penentu pada graf G.

Misalkan dipilih $W_2 = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_4\}$ representasi setiap titik pada graf G terhadap W_2 adalah

$r(v_1|W_2) = (0,2)$ $\quad$ $r(v_2|W_2) = (1,2)$ $\quad$ $r(v_3|W_2) = (2,1)$

$r(v_4|W_2) = (2,0)$ $\quad$ $r(v_5|W_2) = (1,1)$

Karena tidak terdapat representasi yang sama maka dapat disimpulkan bahwa W_2 merupakan himpunan penentu di graf G. Selanjutnya akan diselidiki apakah W_2 merupakan basis dari graf G, dengan menghitung representasi sebarang titik elemen $V(G)$ yang mempunyai kardinalitas kurang dari W_2. Seperti yang tertera pada tabel berikut:

Tabel 1.6.2.1 Tabel representasi setiap titik pada graf G terhadap himpunan W dengan $|W| < |W_2|$

	$r(v_1\|W)$	$r(v_2\|W)$	$r(v_3\|W)$	$r(v_4\|W)$	$r(v_5\|W)$
$W = v_1$	(0)	(1)	(2)	(2)	(1)
$W = v_2$	(1)	(2)	(2)	(1)	(0)
$W = v_3$	(2)	(1)	(1)	(0)	(1)
$W = v_4$	(2)	(1)	(0)	(1)	(2)
$W = v_5$	(1)	(0)	(1)	(1)	(2)

Dari Tabel 1.6.2.1, dapat dilihat bahwa semua himpunan bagian dari $V(G)$ yang mempunyai banyak anggota kurang dari $|W_2|$ bukan merupakan himpunan penentu karena setiap titik pada graf G memiliki representasi yang sama terhadap W. Jadi W_2 adalah himpunan penentu minimum. Sehingga $W_2 = \{v_1, v_4\}$ adalah basis pada graf G,dan $\dim G = 2$.

Teorema 1.6.2.1 Misalkan G adalah graf terhubung dengan ordo $n \geq 2$, maka $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

Teorema 1.6.2.2 Jika C_n adalah graf siklus dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $\dim\,(C_n) = 2$

Bukti:

Misalkan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ adalah titik-titik pada siklus dengan $n \geq 3$ pada graf G.

i. Untuk siklus dengan n ganjil.

Misalkan $W = \{u_{n-1}, u_n\}$ akan dibuktikan W himpunan penentu. Representasi setiap titik pada Graf C_n terhadap S adalah

$$r(v_1|W) = (2{,}1)$$
$$r(v_2|W) = (3{,}2)$$
$$r(v_3|W) = (4{,}3)$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n-3}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$

$$r\left(v_{\frac{n-1}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+1}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+3}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1,2)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (0,1)$$
$$r(v_n|W) = (1,0)$$

karena untuk setiap $u, v \in V(C_n), u \neq v$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n)$ adalah himpunan penentu.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $W = \{v_{n-1}, v_n)$ adalah himpunan penentu dengan kardinalitas minimum. Karena graf C_n adalah graf siklus, berdasarkan Teorema 1.6.2.1, maka $dim(C_n) \neq 1$, sehingga tidak ada himpunan penentu dengan kardinalitas kurang dari 2. Oleh karena itu, $|W| = 2$ merupakan himpunan penentu dengan kardinalitas minimum, sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n ganjil.

i. Untuk siklus dengan n genap

Misalkan $W = \{v_{(n-1)}, v_n\}$. Akan dibuktikan bahwa W adalah himpunan penentu. Representasi setiap titik pada graf C_n terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2,1)$$
$$r(v_2|W) = (3,2)$$
$$r(v_3|W) = (4,3)$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n-2}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n}{2},\frac{n-2}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+2}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-4}{2},\frac{n-2}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1,2)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (0,1)$$
$$r(v_n|W) = (1,0)$$

karena untuk setiap $u, v \in V(C_n), u \neq v$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n)$ adalah himpunan penentu.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $W = \{v_{n-1}, v_n)$ adalah himpunan penentu dengan kardinalitas minimum. Karena graf C_n adalah graf siklus, berdasarkan Teorema 1.6.2.1, maka $dim(C_n) \neq 1$, sehingga tidak ada himpunan penentu dengan kardinalitas kurang dari 2. Oleh karena itu,

$|W| = 2$ merupakan himpunan penentu dengan kardinalitas minimum, sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n genap.

Berdasarkan I dan ii, terbukti bahwa graf siklus (C_n) dengan n ganjil dan n genap maka $dim(C_n) = 2$■