BASIS DAN DIMENSI RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF LOLLIPOP

ADE IRMAYANTI

H011191052

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

BASIS DAN DIMENSI RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF LOLLIPOP

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Ade Irmayanti

H011191052

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ade Irmayanti
NIM	: H011191052
Progran Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan yang berjudul:

BASIS DAN DIMENSI RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF LOLLIPOP

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa tulisan skripsi yang saya tulis ini benat-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 6 Maret 2024

Yang menyatakan,

10000 SEPULUH RIBU RUPIAH METERAI TEMPEL A6B28ALX081954020

Ade Irmayanti

NIM. H011191052

LEMBAR PENGESAHAN

BASIS DAN DIMENSI RUANG EIGEN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF LOLLIPOP

Disusun dan diajukan oleh

ADE IRMAYANTI

H011191052

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan AlamUniversitas Hasanuddin

Pada tanggal 6 Maret 2024

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP. 19700807 200003 1 002**

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.

NIP. 19680429 200212 1 001

KATA PENGANTAR

Segala puja dan puji syukur kepada Allah SWT, Dialah sang Raja yang memberikan kehidupan kepada jiwa dan pertolongan hati, yang mampu melihat dan mendengar segala sesuatu, yang memberikan kepada segala makhluk sebuah waktu yang telah ditentukan di atas bumi, dari burung di udara sampai kepada ikan di kedalaman samudera. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW, kerabat, sahabat, dan seluruh umat yang berdiri tegak di jalan-Nya. Skripsi berjudul **"Basis dan Dimensi Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Lollipop"** ini merupakan salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini banyak dukungan, bantuan, bimbingan serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, perkenankan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Kedua orang tua penulis, ayahanda yang terhormat **Ir. Amiruddin** dan ibunda tercinta **Buniani**. Merekalah representasi Tuhan di bumi, layaknya malaikat yang selalu disampingku. Berkat kasih sayangnya, pengorbanannya dan usahanya untuk menyekolahkan anaknya hingga setinggi-tingginya, satu kalimat yang beliau tekankan kepada saya "Tak ada yang bisa menyelamatkan dirimu selain dirimu sendiri, hidup tidak terwakilkan. Yang kamu kerjakan hari ini adalah konsekuensi untuk dirimu dimasa yang akan datang". Terima kasih sudah mempercayakan saya untuk menuntut ilmu diperantauan.
2. Satu-satunya saudara penulis yang tersayang **Ardianto, S.H., M.H.** yang telah menemani, memberikan semangat, doa dan harapan sehingga Penulis bisa menyelesaikan studi kali ini.
3. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
4. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** yang siap meluangkan waktunya untuk mendengar keluhan mahasiswa demi perkembangan dan kemuajuan fakultas.

5. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
6. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama dan **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama yang telah dengan sabar dan tulus membimbing serta menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
7. Bapak **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** selaku penguji sekaligus penasihat akademik yang telah memberikan banyak saran dan arahan yang sangat membantu kepada penulis sejak perkuliahan hingga di tahap penyelesaiaan tugas akhir.
8. Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.** selaku penguji yang telah memberikan banyak saran yang sangat membantu dalam penyempurnaan skripsi ini.
9. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan serta seluruh pegawai/staf Departemen Matematika Universitas Hasanuddin.
10. **Irfa, Tasya, Sukma**, **Ichsan** dan **Aan** serta **Matematika 2019** yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis.
11. Teman-teman **KKN SMART VILLAGE BARRU** khususnya **POSKO 5** serta warga di **Kelurahan Sepe'e**.

Penulis menyadari dalam hasil skripsi ini masih memiliki kekurangan, untuk itu kritik dan saran yang konstruktif sangat di harapkan sehingga penulis dapat berkarya lebih baik dimasa yang akan datang. Akhir kata, semoga Allah SWT membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis. ***Aamiin Ya Rabbal Aalamiin***.

Makassar, 6 Maret 2024

Ade Irmayanti

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ade Irmayanti
NIM	: H011191052
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universias Hasanuddin **Hak Bebas Royalti noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Basis dan Dimensi Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf Lollipop

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal, 6 Maret 2024.

Yang menyatakan

Ade Irmayanti

ABSTRAK

Graf lollipop $(L_{m,n})$ merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan graf lengkap K_m dan graf lintasan P_n. Misalkan $M(L_{m,n})$ merupakan matriks ketetanggaan graf lollipop. Matriks ketetanggaan graf lollipop $M(L_{m,n})$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks blok. Suatu vektor yang bebas linear disebut basis dari suatu ruang eigen. Ruang eigen dari suatu nilai eigen pada matriks ketetanggaan graf lollipop dinotasikan sebagai $E_\lambda\left(M(L_{m,n})\right)$. Adapun dimensi ruang eigen dari matriks ketetanggaan lollipop $M(L_{m,n})$, dinotasikan dengan $dimE_\lambda\left(M(L_{m,n})\right)$. Pada skripsi ini akan ditentukan basis dan dimensi ruang eigen dari matriks ketetanggaan graf lollipop $M(L_{m,n})$ dengan hanya menggunakan nilai eigen berupa bilangan bulat, $\lambda \in \mathbb{N}$.

Kata Kunci: graf lollipop, matriks ketetanggaan, matriks blok, nilai eigen, basis ruang eigen, dimensi ruang eigen

Judul	: Basis dan Dimensi Ruang Eigen Matriks Ketetanggaan Graf lollipop
Nama	: Ade Irmayanti
NIM	: H011191052
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

The lollipop graph $(L_{m,n})$ *is graph obtained by combining the complete graph* K_m *and the path graph* P_n*. Let* $M(L_{m,n})$ *be the adjacency matrix of the lollipop graph. The adjacency matrix of the lollipop graph* $M(L_{m,n})$ *can be expressed in block matrix form. A linearky vecktor is called the basis of an eigenspace. The eigenspace of an eigenvalue in the adjacency matrix of lollipop graph is denoted as* $E_\lambda\left(M(L_{m,n})\right)$*. The dimensions of the eigenspace of the lollipop adjacency matrix* $M(L_{m,n})$ *are donated by* $dimE_\lambda\left(M(L_{m,n})\right)$*. In this thesis, we will determine the basis and dimensions oh the eigenspace of the adjacency matrix of the lollipop graph* $M(L_{m,n})$ *using only eigenvalues in the form of integers,* $\lambda \in \mathbb{N}$.

Keywords: *lollipop graph, adjacency matrix, block matrix, eigenvalues, eigenspace basis, eigenspace dimensions.*

Title	*: Basis and Dimensions of the eigenspace of the lollipop graph adjacency matrix*
Name	*:* Ade Irmayanti
Student ID	: H011191052
Study Program	*: Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$V(G)$	Himpunan titik graf G	4
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	4
C_n	Graf lingkaran dengan n titik	6
K_m	Graf lengkap dengan n titik	6
P_n	Graf lintasan dengan n titik	7
$L_{(m,n)}$	Graf lollipop	7
i	Baris pada matriks	8
j	Kolom pada matriks	8
x	Vektor eigen	10
λ	Nilai eigen	10
I	Matriks identitas	10
$M\left(L_{(m,n)}\right)$	Matriks ketetanggaan graf lollipop	16
$E_\lambda\left(M\left(L_{(m,n)}\right)\right)$	Ruang eigen dari suatu nilai eigen pada matriks ketetanggaan graf lollipop	19
$\beta E_\lambda\left(M\left(L_{(m,n)}\right)\right)$	Basis ruang eigen dari suatu nilai eigen pada matriks ketetanggaan graf lollipop	31
$dimE_\lambda\left(M\left(L_{(m,n)}\right)\right)$	Dimensi ruang eigen pada matriks ketetanggaan graf lollipop	19

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar linear merupakan salah satu bidang studi matematika yang mempelajari tentang matriks, nilai eigen dan vektor eigen serta sistem persamaan linear. Aljabar linear memiliki peran hampir di semua bidang ilmu matematika. Sebagai contoh, aljabar linear menjadi dasar dalam menjelaskan geometri secara modern, termasuk dalam mendefinisikan objek-objek dasar seperti garis, bidang, rotasi maupun ruang fungsi.

Matriks merupakan sekumpulan bilangan khususnya bilangan riil yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan didalam tanda kurung. Bentuk matriks dapat berupa persegi ataupun persegi Panjang. Hal ini bergantung pada jumlah baris dan kolom dari matriks tersebut. Adapun matriks yang diperoleh dari merepresentasikan suatu graf dengan cara melihat hubungan antar simpul atau titik yang ada pada graf disebut matriks ketetangaan. Matriks ketetanggaan atau matriks adjacency merupakan salah satu permasalahan yang dibahas dalam teori graf.

Dalam konteks aljabar linear, ruang eigen merujuk pada himpunan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tertentu dari suatu matriks. Basis ruang eigen adalah kumpulan atau himpunan vektor eigen yang membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tertentu. Sedangkan dimensi ruang eigen adalah jumlah vektor eigen yang membentuk basis untuk suatu ruang eigen.

Selain aljabar linear, dalam matematika dikenal pula teori graf. Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek dsikrit dan hubungan antara objek-objek tersebut (Munir, R., 2005). Teori graf pertama kali muncul pada tahun 1736, yaitu karena adanya masalah jembatan Königsberg. Königsberg terhubung ke daratan oleh tujuh jembatan, yang dibelah oleh Sungai Prega, yang mengelilingi Pulau Kneiferhof, dan kemudian terbagi menjadi dua anak sungai. Matematikawan Swiss Leonhard Euler adalah orang pertama yang memecahkan masalah jembatan Königsberg, yaitu menemukan kemungkinan melintasi seluruh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula.

Banyak hal tak terduga dan berguna yang dihasilkan dengan menghubungkan dua bidang studi matematika yaitu aljabar linear dan teori graf. Berbagai penelitian telah dilakukan terkait aljabar linear dan graf. Pada tahun 2014, Soleha dan Dian W. Setyawati dari Institut Teknologi Sepuluh Nopember melakukan penelitian tentang karakterisasi aljabar pada graf bipartit. Di tahun yang sama, Igaku Ayu Kinanthi, seorang mahasiswa dari Universitas Brawijaya melakukan penelitian mengenai penentuan spektrum dan diameter graf menggunakan nilai eigen. Kemudian pada tahun 2020, Juwita Fransiska Mandey, dengan kedua rekannya meneliti tentang automorfisma graf lollipop. Selain itu, pada tahun 2021, Iffa Rahma Larasati juga melakukan penelitian mengenai graf lollipop yaitu determinan matriks ketetanggaan dari graf lollipop $L_{(3,n)}$ dan $L_{(4,n)}$. Selain beberapa penelitian yang telah disebutkan di atas, masih banyak penelitian lain terkait teori graf dan aljabar linear.

Berdasarkan penulusuran literatur yang dilakukan, penulis tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut terkait graf khususnya graf lollipop. Jika sebelumnya peneliti lain menentukan hingga determinan matriks ketetanggaan pada graf lollipop, maka pada penelitian ini dilakukan untuk memperoleh basis ruang eigen dari matriks ketetanggaan graf lollipop. Oleh karena itu, penulis memutuskan untuk melakukan penelitian terkait basis dan dimensi ruang eigen dari matriks ketetanggaan graf lollipop.

1.2 Rumusan Masalah

Setiap matriks memiliki suatu nilai eigen yang bersesuaian dengan basis dari satu atau lebih vektor eigen yang membentuk suatu ruang eigen maka masalah yang dapat dirumuskan yaitu bagaimana basis dan dari ruang eigen yang dihasilkan dari matriks ketetanggaan graf lollipop?

1.3 Batasan Masalah

Untuk matriks berukuran $n \times n$, jumlah nilai eigen yang mungkin adalah n, sehingga terdapat beberapa ruang eigen matriks ketetanggaan graf lollipop. Oleh karena itu diberikan batasan masalah sehingga pada penelitian ini yang dibahas hanya nilai eigen yang berupa bilangan bulat.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk memperoleh basis dan dimensi ruang eigen dari matriks ketetanggaan lollipop pada ruang eigen tertentu.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan baru bagi penulis dan pembaca terkait basis dan dimensi ruang eigen yang dihasilkan dari matriks ketetanggaan suatu graf, khususnya pada graf lollipop serta dapat menjadi sumber referensi terutama bagi yang ingin melakukan penelitian mengenai basis dan dimensi ruang eigen matriks ketetanggaan graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

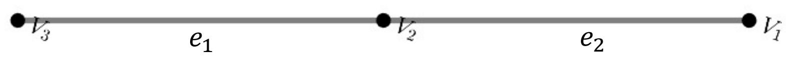
Pada bab ini akan dijelaskan mengenai secara singkat konsep dasar yang menunjang pembahasan masalah, seperti definisi, teorema dan istilah-istilah serta beberapa contoh graf yang berkaitan dengan basis dan dimensi ruang eigen matriks ketetanggaan graf lollipop

2.1 Dasar-dasar graf

Secara umum, graf dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Graf merupakan pasangan himpunan (V, E) dapat ditulis dengan $G = (V, E)$ dengan V adalah suatu himpunan tak kososng dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai simpul, dan E adalah suatu himpunan (yang mungkin kosong) yang berisi pasangan simpul yang tak berurutan dari simpul-simpul yang berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dituliskan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dituliskan dengan $E(G)$. (Munir, R, 2005)

Contoh 2.1.1 Gambar di bawah ini merupakan contoh dari suatu graf.



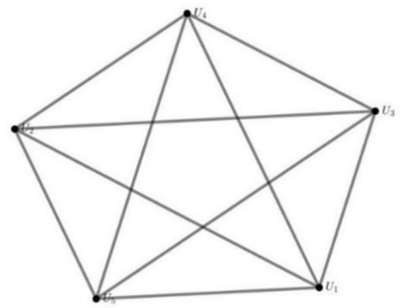
Gambar 2.1.1 Graf

Berdasarkan gambar 2.1.1, terdapat simpul v_1, v_2 dan v_3 yang dihubungkan oleh sisi e_1 dan e_2, atau dapat dapat ditulis $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ atau $E(G) = \{e_1, e_2\}$.

Pengelompokkan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda maupun gelang ataupun berdasarkan orientasi arahnya. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan menjadi 2 jenis yaitu graf tak-berarah dan graf berarah. Namun dalam penelitian ini, jenis graf yang digunakan adalah graf tak-berarah.

Definisi 2.1.2 Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. (Munir, R, 2010)

Contoh 2.1.2 Berikut merupakan contoh dari graf tak berarah



Gambar 2.1.2 Graf tak berarah

Gambar 2.1.2 adalah graf tak berarah yang memiliki 5 simpul yang berbeda serta dihubungkan oleh sebuah sisi, dengan setiap sisinya merupakan pasangan tak-terurut, sehingga dapat ditulis $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$.

Berikut akan dijelaskan mengenai beberapa istilah yang diperlukan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1.3 (Hasmawati, 2020) Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa

1. Titik v_i **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik v_j.
2. Sisi x **terkait** (*incident*) dengan titik v_i, demikian pula untuk v_j.

Contoh 2.1.3 Berdasarkan gambar 2.1.2, simpul u_1 bertetangga dengan simpul u_2, u_3, u_4 dan u_5. Sedangkan simpul u_2 bertetangga dengan u_1, u_3, u_4 dan u_5.

Definisi 2.1.4 Derajat *(Degree)* merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul pada graf tak-berarah. Derajat dari simpul v dapat dilambangkan sebagai $d(v)$. (Munir, R, 2005)

Contoh 2.1.4 berdasarkan gambar 2.1.2, derajat yang dimiliki oleh semua simpul adalah sama yaitu $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = 4$.

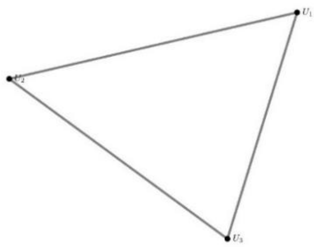
Definisi 2.1.5 Lintasan *(path)* merupakan barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf dengan panjang n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n pada graf G. (Munir, R, 2005)

Contoh 2.1.5 Berdasarkan gambar 2.1.2 barisan v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 merupakan suatu lintasan dengan barisan sisinya, yaitu $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), e_3 = (v_3, v_4), e_4 = (v_4, v_5)$.

Graf dapat dikelompokkan berdasarkan ciri khusus yang dimilikinya. Salah satu ciri tersebut berupa ada tidaknya gelang pada suatu graf.

Definisi 2.1.6 Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung gelang (*loop)* maupun sisi ganda. (Munir, R, 2005)

Contoh 2.1.6



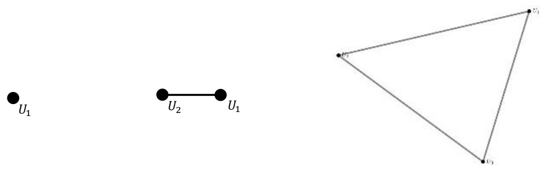
Gambar 2.1.3 Grar lingkaran C_3

Graf lingkaran *(cycle)* adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. (Munir, 2005)

Penelitian ini membahas basis dan dimensi ruang eigen matriks ketetanggaan graf lollipop. Sebelum menjelaskan definisi dari graf lollipop, berikut dikemukakan definisi graf lengkap dan graf lintasan.

Definisi 2.1.7 Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$. (Munir, R, 2005)

Contoh 2.1.7



$K1$ $K2$ $K3$

Gambar 2.1.4 Graf lengkap K_n dengan $1 \leq n \leq 3$

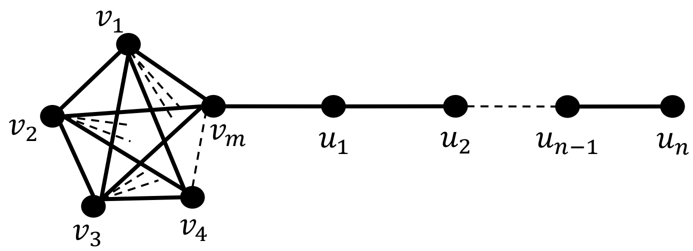
Definisi 2.1.8 Graf lintasan merupakan suatu graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dilambangkan dengan P_n, graf lintasan dengan n titik memiliki $n - 1$ sisi. (Hanif dkk, 2018)

Contoh 2.1.8

P_1 P_2 P_3

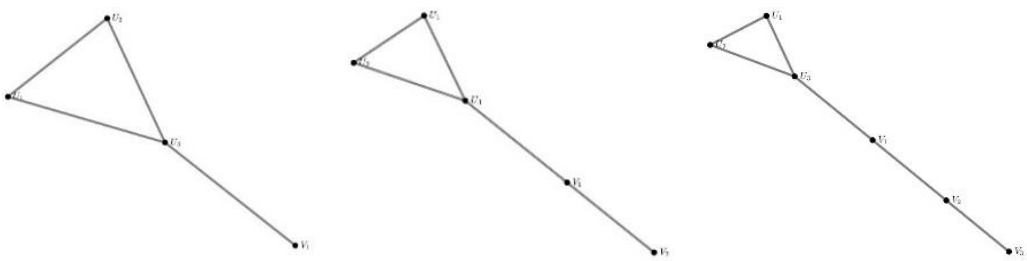
Gambar 2.1.5 Graf lintasan P_n dengan $1 \leq n \leq 3$

Definisi 2.1.9 (Weisstein, 2003) mendefinisikan graf lollipop sebagai graf yang diperoleh dengan menggabungkan sebuah graf lengkap K_m pada sebuah lintasan P_n melalui sebuah jembatan. Penggabungan graf lengkap K_m dengan graf lintasan P_n dihubungkan di titik m pada K_m. Graf lollipop dapat dinotasikan dengan $L_{m,n}$ dengan m menyatakan banyaknya titik pada graf lengkap K_m dan n merupakan banyaknya titik pada graf lintasan P_n.



Gambar 2.1.6 Graf lollipop $L_{(m,n)}$

Contoh 2.1.9



$\boldsymbol{L_{3,1}}$ $\boldsymbol{L_{3,2}}$ $\boldsymbol{L_{3,3}}$

Gambar 2.1.7 Graf Lollipop untuk $m = 3$ dan $1 \leq n \leq 3$

2.2 Matriks Blok

Matriks adalah sekumpulan elemen-elemen a_{ij} dengan $i = 1,2,3, \ldots, m$ menyatakan baris dan $j = 1,2,3, \ldots, n$ menyatakan kolom. Secara umum bentuk dari suatu matriks A yang berukuran $m \times n$ adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.1 Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut dikatakan entri dari matriks. (Anton, H. dan Rorres, C., 2005)

Contoh 2.2.1 Berikut ini beberapa contoh matriks

$$A = [1 \quad 3], \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks ditentukan oleh jumlah baris dan kolom yang dimiliki matriks tersebut. berdasarkan Contoh 2.2.1, matriks A mempunyai 1 baris dan 2 kolom, sehingga ukuran matriksnya adalah 1×2. Sedangkan matriks B, C dan D berturut-turut memiliki ukuran $3 \times 1, 2 \times 2$ dan 3×3.

Definisi 2.2.2 (Anton, H. dan Rorres, C., 2005) Matriks blok atau matriks partisi merupakan matriks yang dipartisi menjadi beberapa matriks berukuran lebih kecil dengan menambahkan garis horizontal dan vertikal antara baris dan kolom pada suatu matriks. Matriks-matriks kecil hasil partisi disebut submatriks.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss

Definisi 2.3.1 (Chapra, S. C., & Raymond P. C., 2010) Eliminasi Gauss adalah suatu sistem yang digunakan untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear (2.1) diubah kedalam perkalian matriks, sehingga bentuk menjadi persamaan (2.2).

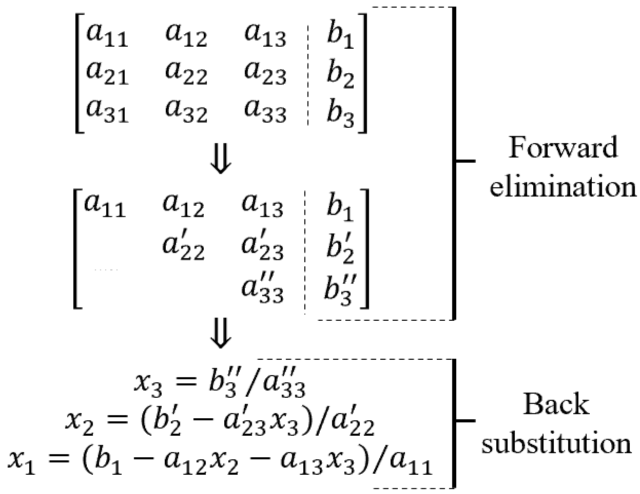
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \tag{2.1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{C} \tag{2.2}$$

Dalam proses Eliminasi Gauss, matriks A dilakukan operasi perkalian, penjumlahan, pengurangan dan/atau pembagian baris matriks hingga terbentuk A' pada persamaan (2.3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}}_{C'} \tag{2.3}$$

Selanjutnya dilakukan proses *back substitution* agar mendapatkan solusi dari persamaan linear. Gambar 2.3.1 di bawah menunjukkan proses eliminasi Gauss dari awal sampai proses *back substitution*. Berikut ilustrasi proses eliminasi Gauss



Gambar 2.3.1 Ilustrasi Proses Eliminasi Gauss

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.4.1 Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di R^n disebut vektor eigen dari A jika $A_{\boldsymbol{x}}$ adalah kelipatan skalar dari x, yaitu

$$Ax = \lambda x \tag{2.4}$$

untuk suatu skalar dari λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, H & Rorres, 2004).

Untuk menentukan nilai eigen pada matriks A berukuran $n \times n$. Persamaan (2.4) dapat ditulis sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

Atau

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Teorema 2.4.1 (Anton, H & Rorres, 2004) Jika sebuah matriks berukuran $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.5}$$

Disebut persamaan karakteristik dari A.

Teorema 2.4.2 Jika A adalah sebuah matriks berukuran $n \times n$, pernyataan berikut ekuivalen.

(a) λ adalah nilai eigen dari A.

(b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ memiliki solusi nontrivial.

(c) Terdapat suatu vektor tak nol x sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$.

(d) λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

Contoh 2.4.1 Eigen vektor dan basis untuk ruang eigen

Tentukan basis untuk ruang eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi Berdasarkan teorema 2.4.1, persamaan karakteristik yang berkaitan dengan matriks A adalah

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

Pada Persamaan karakteristik dari A adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, atau dalam bentuk faktor, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Sehinnga, diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, jadi terdapat dua ruang eigen dari A.

Dengan definisi

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari A yang memenuhi λ jika dan hanya jika x adalah solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$**,** atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan elimininasi Gauss seperti yang dijelaskan pada definisi 2.3.1, diperoleh

$$B_2 = -B_2 - B_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = -B_3 - B_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 \ = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s$$

Sehingga, vektor eigen dari A bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor tak nol dari bentuk

$$x = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

Untuk $\lambda = 2$, maka (2.6) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan elimininasi Gauss, diperoleh

$$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$$

Sehingga, vektor eigen dari A bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor tak nol dari bentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah bebas linear, maka vektor tersebut merupakan basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$.

2.5 Matriks Ketetanggaan

Matriks ketetanggaan merupakan salah satu matriks yang diperoleh dari merepresentasikan suatu graf dengan cara melihat hubungan antar simpul yang ada pada suatu graf tersebut. (Saputri, N.I., dkk, 2020)

Definisi 2.5.1 (Biggs, N., 1993) Matriks ketetatanggan dari graf G adalah matriks $A_{n\times n} = A(G)$ berukuran $n \times n$ dengan a_{ij} didapatkan dari

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, jika\ v_i\ dan\ v_j\ bertetangga \\ 0, \qquad\qquad yang\ lainnya \end{cases}$$

Contoh 2.5.1 Matriks ketetanggaan dari graf pada gambar 2.1.9 untuk $L_{3,1}$ adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beberapa entri bernilai 0 karena graf tersebut tidak memiliki gelang, sisi ganda serta simpulnya tidak bertetangga dengan simpul lain. Sedangkan entri yang bernilai 1 artinya simpul tersebut bertetangga dengan simpul lainnya.

Matriks pada contoh 2.5.1 merupakan matriks ketetanggaan graf lollipop dengan $m = 3$ dan $n = 1$. Basis dari matriks ketetanggaan seperti di atas yang akan dibahas pada BAB IV.