DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI AMALGAMASI SISI GRAF TANGGA DENGAN GRAF SIKLUS C_3

SKRIPSI

AHMAD NURHIDAYAT
H011 18 1314

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

MEI 2024

DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI AMALGAMASI SISI GRAF TANGGA DENGAN GRAF SIKLUS C_3

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

AHMAD NURHIDAYAT
H011 18 1314

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh

Bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Amalgamasi Sisi

Graf Tangga dengan Graf Siklus C_3

adalah benar karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 14 Mei 2024

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 TGL. 20 METERAI TEMPEL 9F6D9ALX138073650

Ahmad Nurhidayat
NIM. H011181314

DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI AMALGAMASI SISI GRAF TANGGA DENGAN GRAF SIKLUS C_3

Disetujui oleh :

Mengesahkan :

Pembimbing

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

Mengetahui :

Ketua Program Studi

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama	: Ahmad Nurhidayat
NIM	: H011181314
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	(..............................)
Anggota	: Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	(..............................)
Anggota	: Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M. Si	(..............................)

Ditetapkan di : Makassar

Pada Tanggal :26 April 2024

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, dengan memanjatkan segala puja dan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya. Salawat serta senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW, sebagai suri taulan bagi seluruh manusia.

Skripsi dengan judul **"Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Amalgamasi Sisi Graf Tangga dengan Graf Siklus C_3"** disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak.

Penulis menyampaikan terima kasih tak terhingga kepada orang tua penulis: Bapak Sudarmin dan Ibu Darma atas kasih sayang, perhatian, pengorbanan tak terhingga serta doa yang tak henti-hentinya beliau panjatkan. Rasa terima kasih juga kepada Kakak tercinta atas dukungannya selama ini baik secara materil dan nonmaterial.

Dalam kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya atas seluruh bantuannya kepada:

1. Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya;
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya;
3. Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam;
4. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing. Terima kasih telah meluangkan waktunya dan memberikan arahan kepada penulis. Terima kasih atas kesabaran dan nasehat yang diberikan selama pengerjaan skripsi;
5. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji dan juga penasehat akademik yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
6. Bapak Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;

7. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama masa perkuliahan;
8. Bapak/Ibu pegawai/staff Departemen, Fakultas, dan Universitas yang telah banyak membantu mengurus berkas selama perkuliahan dan penyusunan skrispsi ini;
9. Bapak Ir. H. Abdurrahman, M.M. dan Ibu yang telah menjadi orang tua penulis selama di berada Makassar. Terima kasih yang tak terhingga atas segalanya yang telah diberikan;
10. Kepada seluruh pembina dan pengurus keluarga besar Rumah Tahfidz Abdurrahman yang namanya tidak bisa kami sebut semuanya. Terima kasih atas doa, dukungan, bantuan dan perhatiannya selama ini. Terima kasih selalu mengingatkan tentang kebaikan;
11. Kepada keluarga besar UKM LDK MPM Unhas dan Mushalla Istiqamah. Terimah kasih atas bantuan, pengalaman yang berharga dan prosesnya selama perkuliahan ini sehingga perkuliahan ini lebih berwarna;
12. Teman-teman penulis yang tidak bisa disebutkan namanya satu-satu, teman-teman Integral 18, teman-teman Matematika 18 dan seluruh teman-teman yang membantu selama proses perkuliahan. Terima kasih atas pelajaran, bantuan, semangat, dukungan dan doannya selama ini. Sampai ketemu di lain waktu.

Akhir kata, penulis berharap semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 14 Mei 2024

Ahmad Nurhidayat

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ahmad Nurhidayat

NIM : H011181314

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI AMALGAMASI SISI GRAF TANGGA DENGAN GRAF SIKLUS C_3

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 14 Mei 2024

Yang menyatakan,

Ahmad Nurhidayat

ABSTRAK

Misalkan diberikan suatu graf terhubung $G = (V, E)$ dan S merupakan himpunan bagian dari V. Himpunan S dikatakan himpunan pembeda, jika titik-titik pada graf G mempunyai representasi yang berbeda terhadap S. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Kardinalitas dari basis tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim(G)$. Pada tugas akhir ini, dibahas mengenai dimensi metrik dari hasil operasi amalgamasi sisi graf tangga dengan graf siklus C_3. Dari hasil penelitian ini, diperoleh 3 hasil yaitu $Amal(L_n; C_3, w_i r_i)$, $Amal(L_n; C_3, w_i w_{i+1})$ dan $Amal(L_n; C_3, r_i r_{i+1})$.

Kata kunci : Himpunan Pembeda, Himpunan Bagian, Basis, Kardinalitas.

Judul : Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Amalgamasi Sisi Graf Tangga dengan Graf Siklus C_3

Nama : Ahmad Nurhidayat

NIM : H011181314

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

If connected graph $G = (V, E)$ is given and S is part of V. S set is categorizedas difference set, if the points in the graph G have different representation towards S. A set with minimum cardinality is called minimum differenceset or the basis of the graph G. The cardinality of the basis is called the metric dimension of G, denoted with $\dim(G)$. In this final project, we discuss the metric dimensions of the results of ladder graph side amalgamation operation with C_3 graph cycle. Based on the results of this research, 3 results are obtained, namely
$\mathrm{Amal}(L_n; C_3, w_i r_i)$, $\mathrm{Amal}(L_n; C_3, w_i w_{i+1})$ and $\mathrm{Amal}(L_n; C_3, r_i r_{i+1})$.).

Keywords: *Difference set, Subset, Basis, Cardinality.*

Title : Metric Dimension of the Results of Ladder Graph Side Amalgamation Operation with Graph Cycle C_3

Name : Ahmad Nurhidayat

Student ID : H011181314

Study Program: Mathematics

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang sangat sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari, baik secara langsung atau tidak langsung. Kebanyakan manusia hanya memahami bahwa matematika adalah ilmu untuk menghitung. Namun hal ini terlalu sempit untuk mendeskripsikan matematika. Pada hakikatnya matematika adalah ilmu yang bertujuan untuk membentuk pola pikir yang sistematis dalam mecari solusi atas permasalahan yang dihadapi. Sebagai contoh, dalam kasus operasi bilangan, maka operasi perkalian (×) atau pembagian (÷) lebih dahulu diselesaikan daripada operasi penjumlahan (+) dan pengurangan (-). Hikmah yang dapat diambil dari contoh tersebut ialah dalam mencari solusi atas beberapa masalah yang dihadapi, perlu ada skala prioritas agar tidak salah dalam mengambil langkah penyelesaian. Di samping itu, dalam matematika terdapat berbagai cabang ilmu yang dapat digunakan dalam mencari solusi permasalahan yang ada dalam kehidupan sehari-hari dengan memodelkan permasalahan tersebut ke dalam model matematika kemudian diselesaikan dengan menggunakan cabang ilmu matematika yang bersesuaian. Salah satu cabang ilmu matematika yang dimaksud ialah teori graf. (Syamsuddin, 2019).

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah jembatan Konisberg tersebut dapat dinyatakan dalam graf dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai. (Septiana dan Rahadjeng, 2012).

Salah satu topik penelitian dalam teori graf yang telah berkembang adalah dimensi metrik. Dalam penentuan dimensi metrik pada graf digunakan beberapa istilah seperti istilah jarak, himpunan pembeda dan basis. Diberikan suatu graf terhubung G, jarak antara dua titik u dan v dinotasikan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf terhubung G. Untuk himpunan terurut

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dan $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W dinotasikan $r(v|W)$ adalah pasangan terurut k-tuple $r(v|W) = (d(v, w_1)d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika titik-titik pada G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W untuk setiap tiik di $V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Kardinalitas dari basis tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim(G)$. (Wahyudi, dkk., 2011).

Konsep dimensi metrik ini telah diaplikasikan oleh banyak peneliti dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan nyata. Slater mengaitkan permasalahan dimensi metrik dengan masalah jaringan. Pada tahun 1996, Khuller, ddk., menjelaskan aplikasi permasalahan dimensi metrik graf pada bidang sains komputasi dan robotika. Pada tahun 2000, Chartrand, dkk., juga mengaplikasikan himpunan pembeda dalam dimensi metrik pada bidang kimia.

Suatu graf baru dapat dibentuk dengan cara menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Salah satu operasi graf adalah operasi amalgamasi. Beberapa penelitian yang telah dilakukan terkait dengan dimensi metrik dalam operasi amalgamasi diantaranya, pada tahun 2013, Simanjuntak dkk meneliti mengenai Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen. Selanjutnya pada tahun 2020, Muhammad Zikri dengan skripsi berjudul “Penentuan Dimensi Metrik Dari Amalgamasi Sisi Graf Siklus dan Graf Roda”. Pada tahun 2022, Itsnaini Nur meneliti mengenai “Dimensi Metrik dari Amalgamasi Titik Pusat Graf Roda dengan Graf Siklus”.

Berdasarkan hasil penelitian tersebut menjadi acuan dalam mencari dimensi metrik dari graf yang diperoleh dari hasil operasi amalgamasi. Oleh karena itu, penulis mendapatkan suatu permasalahan baru yang dapat dikaji menjadi suatu bentuk penelitian yaitu “Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Amalgamasi Sisi Graf Tangga dengan Graf Siklus C_3”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang sebelumnya, maka rumusan masalah pada penelitian tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan dimensi metrik dari hasil operasi amalgamasi sisi graf tangga dengan graf siklus C_3.

1.3 Batasan Masalah

Dalam tugas akhir ini, diberikan batasan masalah yang akan dikaji yaitu penelitian hanya mencakup pada amalgamasi graf tangga L_n untuk $n \geq 2$ dan graf siklus C_3. Operasi amalgamasi yang digunakan adalah amalgamasi sisi dengan menggabungkan satu sisi dari masing-masing graf, yaitu sebarang sisi pada graf tangga L_n dengan sebarang sisi pada graf siklus C_3 .

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, penetian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik dari hasil operasi amalgamasi sisi graf tangga dengan graf siklus C_3.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yaitu :

1. Menambah pengetahuan penulis tentang graf dan pelabelan graf, serta dimensi pada graf.
2. Memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan bidang teori graf
3. Sebagai sarana informasi dan referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait dimensi metrik dari graf tangga dengan graf siklus c3.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memuat teori dan konsep dasar graf yang disajikan secara singkat yaitu terkait definisi, terminologi, operasi, jenis-jenis graf, dimensi metrik yang relevan dengan topik penelitian yaitu dimensi metrik dari hasil operasi amalgamasi graf tangga dengan graf siklus C_3.

BAB III METEDOLOGI PENELITIAN

Bab ini memuat metode penelitian yang dilakukan serta tahapan-tahapan dalam melaksanakan penelitian ini.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi uraian hasil dan pembahasan tentang dimensi metrik dari hasil operasi amalgamasi sisi graf tangga dengan graf siklus C_3.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil penelitian yang telah didapatkan serta saran bagi peneliti lain untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini dibahas beberapa materi yang dijadikan landasan teori untuk memahami penentuan dimensi metrik suatu graf, khususnya graf operasi amalgamasi, graf tangga dan graf siklus. Materi tersebut meliputi dasar-dasar graf, operasi dalam graf dan dimensi metrik. Adapun definisi, istilah, dan notasi yang dibahas pada bab ini umumnya paling banyak dikutip dari buku Prof. Hasmawati, M.Si. yang berjudul "Pengantar dan Jenis-jenis Graf" tahun 2020.

2.1 Graf

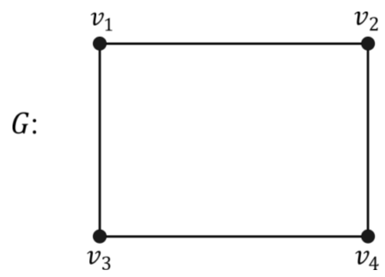
Definisi 2.1.1 (Definisi graf secara umum) Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Jika graf $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u\text{: } u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v)\text{: } u, v \in V(G)\}$ atau (u, v) dapat ditulis dengan uv yang disebut sebagai sisi. Jika $uv = vu$ dan $u \neq v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka graf G disebut **graf sederhana**.

Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde *(order)* dari graf G dengan notasi $p(G)$ dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran *(size)* dengan notasi $q(G)$. Sedangkan, banyaknya anggota pada himpunan tersebut disebut **kardinalitas** yang dinyatakan dengan simbol **"| |".** Jadi apabila $p(G)$ adalah orde graf dan $q(G)$ adalah ukuran graf, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Jika $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan titik u **bertetangga** *(adjacent)* dengan v demikian juga sebaliknya, dan sisi e **terkait** *(incident)* dengan titik u dan titik v. Suatu graf berorde n disebut **graf lengkap** jika setiap dua titiknya bertetangga.

Contoh 2.1.1 Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$dengan $p(G) = 4$ dan $q(G) = 4$, graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.

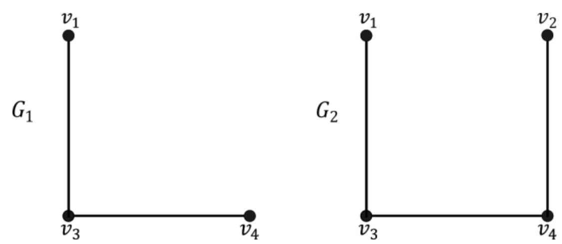


Gambar 2.1.1 Graf sederhana G berorde 4.

Suatu graf H merupakan subgraf dari graf G jika setiap anggota yang ada pada H juga berada pada G. Berikut disajikan definisi mengenai subgraf.

Definisi 2.1.2 Misalkan dua graf $H = (V(H), E(H))$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Contoh 2.1.2 Subgraf dari graf G pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.2 Graf G_1dan G_2adalah subgraf dari G

Derajat suatu graf akan diketahui jika derajat setiap titik pada graf tersebut diketahui. Berikut ini disajikan definisi derajat suatu titik pada graf.

Definisi 2.1.3 Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dinotasikan dengan "$d(v_i)$",yaitu banyaknya yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$, $N_G(v) = \{u|uv \in E(G)\}$ yaitu himpunan titik yang bertetangga dengan V.

Contoh 2.1.3 Dari Gambar 2.1.1 diperoleh $N_G(v_1) = \{v_2, v_4\}$,$N_G(v_2) = \{v_1, v_3\}, N_G(v_3) = \{v_2, v_4\}$, dan $N_G(v_4) = \{v_1, v_3\}$, maka derajat untuk setiap titiknya adalah $d(v_1) = |N_G(v_1)| = 2, d(v_2) = |N_G(v_2)| = 2, d(v_3) = |N_G(v_3)| = 2$ dan $d(v_4) = |N_G(v_4)| = 2$. Dengan demikian, diperoleh $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 2$.

Untuk mencari jarak terpendek dari suatu graf G, maka diberikan definisi tentang lintasan dan jarak sebagai berikut.

Definisi 2.1.4 Misal G adalah graf dengan $u, v \in V(G)$. Lintasan dari titik u ke v pada graf G adalah barisan antara titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$.

Contoh 2.1.4 Lintasan pada graf sederhana cukup dituliskan sebagai barisan titik-titik saja $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, karena antara dua buah simpul berurutan di dalam lintasan hanya ada satu sisi. Sehingga, pada Gambar 2.1.1 memiliki lintasan dengan barisan sisi yaitu $(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$.

Definisi 2.1.5 Misalkan u dan v adalah dua titik dalam graf G. Jarak titik u dan v ditulis $d(u, v)$, yang memenuhi

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, & jika\ u = v \\ k, & jika\ panjang\ lintasan\ terpendek\ u - v \text{ adalah } k \\ \infty, & jika\ tidak\ ada\ lintasan\ dari\ u\ ke\ v \end{cases}$$

Contoh 2.1.5 Dari Gambar 2.1.1 dapat ditentukkan jarak antara dua titik sebagai berikut.

Diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dan

$d(v_1, v_1) = 0, d(v_1, v_2) = 1, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 1$

$d(v_2, v_1) = 1, d(v_2, v_2) = 0, d(v_2, v_3) = 1, d(v_2, v_4) = 2$

$d(v_3, v_1) = 2, d(v_3, v_2) = 1, d(v_3, v_3) = 0, d(v_3, v_4) = 1$

$d(v_4, v_1) = 1, d(v_4, v_2) = 2, d(v_3, v_4) = 1, d(v_4, v_4) = 0.$

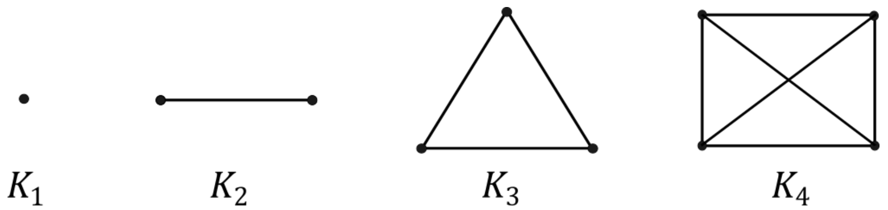
2.2 Jenis-jenis Graf

Selain graf sederhana yang telah dibahas pada Subbab 2.1 , dan telah banyak ditemukan jenis-jenis graf yang baru, sehingga pada Subbab 2.2 ini disajikan beberapa definisi jenis-jenis graf sebagai berikut.

a. Graf Lengkap

Definisi 2.2.1 Graf lengkap adalah graf yang dimana setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan K_n. (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2.1

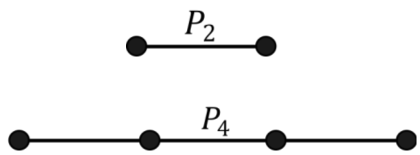


Gambar 2.2.1 Graf Lengkap K_1, K_2, K_3 dan K_4.

b. Graf Lintasan

Definisi 2.2.2 Graf lintasan (*Path*) adalah graf yang terdiri barisan titik dan sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$ adalah sisi-sisi dari graf lintasan. Graf lintasan dinotasikan P_n dengan orde n dan jumlah sisi $n - 1$. Graf lintasan terdiri atas satu lintasan maksimal. (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2.2

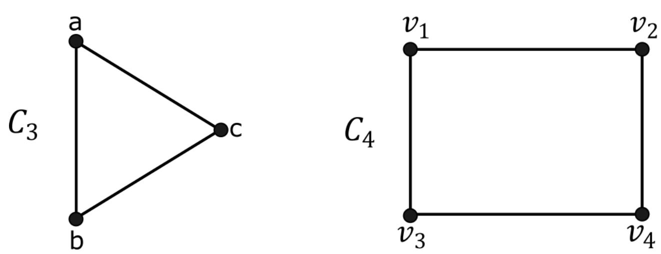


Gambar 2.2.2 Graf Lintasan P_2 dan P_4.

c. Graf Siklus

Definisi 2.2.3 Graf siklus (*Cycle*) dinotasikan C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$. (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2.3

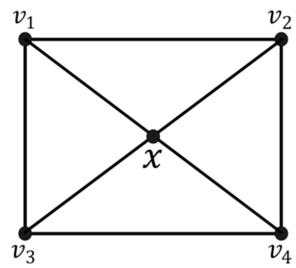


Gambar 2.2.3 Graf Siklus C_3 dan C_4

d. Graf Roda

Definisi 2.2.4 Graf Roda (*Wheel*) adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan W_n. (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2.4



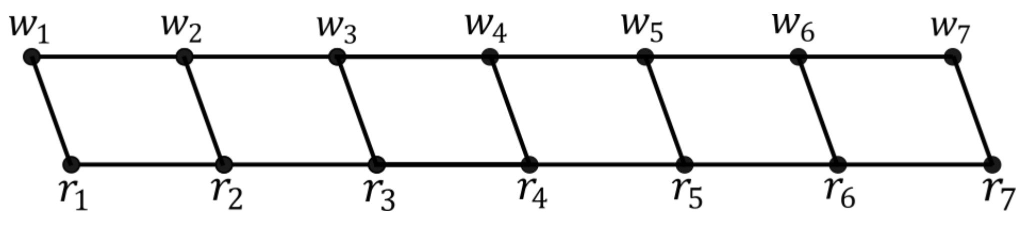
Gambar 2.2.4 Graf Roda W_4

e. Graf Tangga

Definisi 2.2.5 Graf tangga (*Ladder*) adalah graf terhubung yang dikontruksi dari hasil kali graf lintasanP_2 dengan P_n dan dinotasikan dengan L_n.

Berdasarkan pada Definisi 2.2.5., jika $V(P_2) = \{v_2, v_1\}$ dan $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, \mathrm{u_n}\}$, maka $V(L_n) = \{v_1u_1, v_1u_2, \dots, v_1u_n v_2u_1 v_2u_2, \dots, v_2u_n\}$. Apabila ditulis $v_1u_i = w_i$ dan $v_2u_i = r_i, i = 1,2, \dots, n,$ maka $E(L_n) = \{(w_ir_i): i = 1,2, \dots, n\}$.(Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2.5 Diberikan $V(P_2) = \{v_2, v_1\}$ dan $V(P_7) = \{u_1, u_2, \dots, \mathrm{u_7}\}$, maka $V(L_7) = \{v_1u_1, v_1u_2, \dots, v_1u_7 v_2u_1 v_2u_2, \dots, v_2u_7\}$. Tulis $v_1u_i = w_i$ dan $v_2u_i = r_i, i = 1,2, \dots,7,$ maka himpunan titik $V(L_7) = \{w_1, w_2, \dots, w_7, r_1, r_2, \dots, r_7,\}$ dan himpunan sisi $E(L_7) = \{(w_1r_1), (w_2r_2), (w_3r_3), (w_4r_4), (w_5r_5), (w_6r_6), (w_7r_7)\}$. Bentuk graf tangga L_7 seperti pada gambar 2.1.7 berikut.



Gambar 2.2.5 Graf Tangga L_7

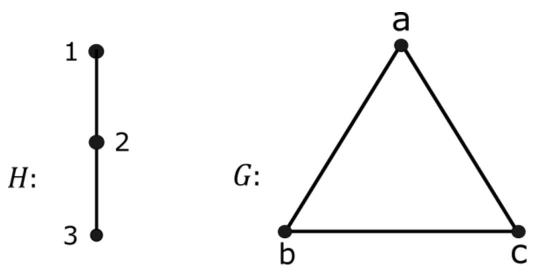
2.3 Beberapa Operasi Pada Graf

Operasi pada graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh graf-graf baru. Terdapat berbagai macam operasi dalam graf, namun yang akan dibahas di sini antara lain: operasi gabung, operasi jumlah, operasi kali dan operasi amalgamasi.

Definisi 2.3.1 Misalkan G adalah graf dengan dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Maka :

a. Graf gabung (*union graph*) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.
b. Graf jumlah/tambah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H)$.
c. Graf kali $G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G \times H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H) = E(G) \cup E(H)$ adalah himpunan $\{xy | x = u_1v_1, \mathrm{y} = u_2v_2 = u_2$ dan $v_1v_2 \in$ E(H) atau $v_1 = v_2$dan $u_1u_2 \in$ E(G)} .

Contoh 2.3.1 Misalkan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{1,2,3\}$ dan $X(G) = \{12,23\}$, serta H adalah graf dengan $V(G) = \{1,2,3\}$ dan $V(G) = \{12,23\}$. Maka gambar graf G dan H adalah sebagai berikut.



Gambar 2.3.1 Dua Graf Sederhana

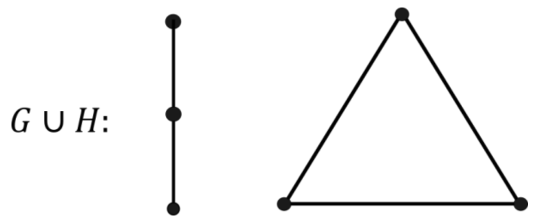
Graf yang diperoleh melalui operasi dua graf pada gambar antara lain :

a. Graf gabung $G \cup H$ mempunyai himpunan titik $V(G \cup H) = \{1,2,3, a, b, c\}$ dan mempunyai himpunan sisi $X(G \cup H) = \{12,23, ab, bc, ca\}$;

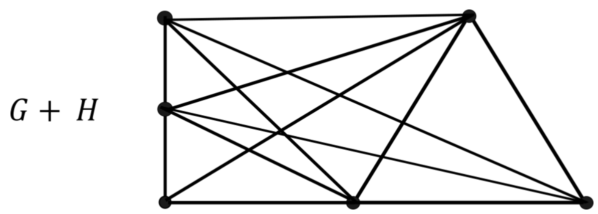
b. Graf jumlah/tambah $G + H$ mempunyai $V(G + H) = \{1,2,3, a, b, c\}$ dan himpunan sisi $X(G + H) = \{12,23, ab, bc, ca\} \cup \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$.

c. Graf kali $W = G \times H$ adalah graf dengan himpunan titik $X(G + H) = \{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$, dan himpunan sisi $E(G \times H) = \left\{\begin{matrix}(1a, 1b), (1a, 1c), (1a, 2a), (1b, 1c), (1b, 2b), (1c, 2c), (2a, 2b), (2a, 2c), \\ (2a, 3a), (2b, 2c), (2b, 3b), (2c, 3c), (3a, 3b), (3a, 3c), (3b, 3c)\end{matrix}\right\}$

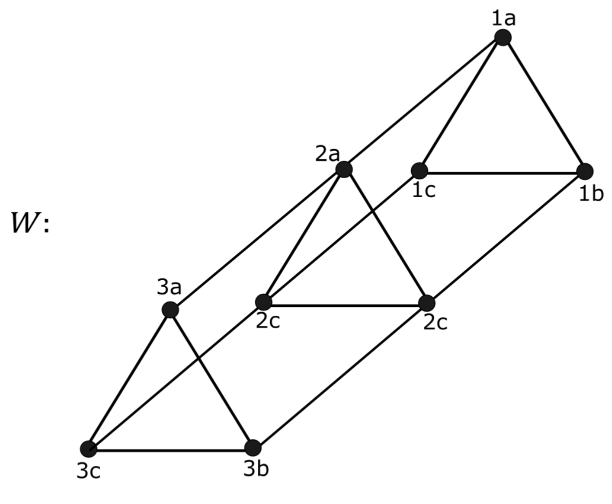
Graf gabung $G \cup H$ dan graf jumlah $G + H$ dapat dilihat pada Gambar 2.3.2 dan Gambar 2.3.3. Sedangkan graf kali $G \times H$ dapat dilihat pada Gambar 2.3.4.



Gambar 2.3.2 Graf Gabung



Gambar 2.3.3 Graf Tambah/Jumlah



Gambar 2.3.4 Graf Kali

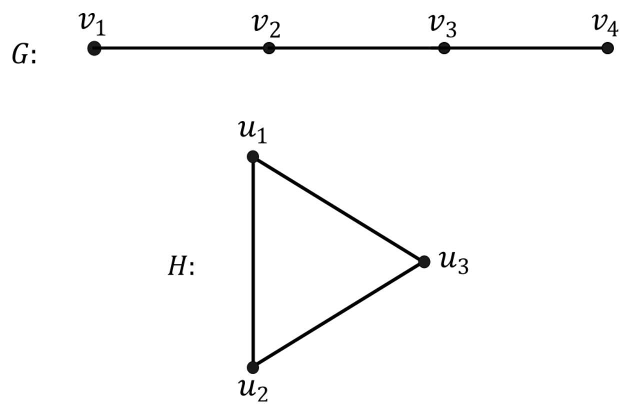
Adapun operasi amalgamasi pada graf terbagi atas dua, yaitu amalgamasi titik dan amalgamasi sisi.

a. Amalgamasi Titik

Definisi 2.3.2 Misalkan $\{G_i | i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}$ untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$, merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing G_i memiliki titik tetap v_{0i} yang disebut terminal. Amalgamasi $Amal(G_i, v_{0i})$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua G_i dan menyatukan terminalnya. (Daming dkk,2020).

Graf $Amal(G_i, v_{0i})$ dapat ditulis $Amal(G_1; G_2; \dots, G_k, v_{01}, v_{02}; \dots, v_{0k})$. Jika $G_i = G_j$ untuk setiap i, j, maka $Amal(G_1; G_2; \dots, G_k, v_{01}, v_{02}; \dots, v_{0k})$ dapat ditulis $Amal(kG_i, v_{0i})$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, k\}$. (Hasmawati,2020).

Contoh 2.3.2. Diberikan graf G dan H sebagai berikut.



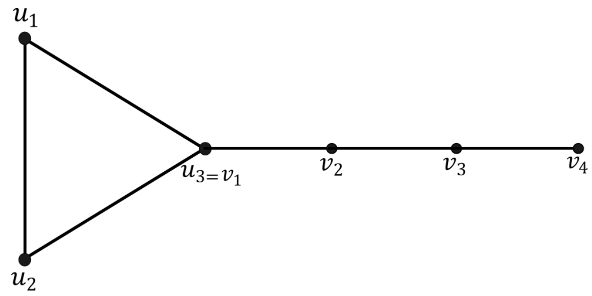
Gambar 2.3.5 Graf $G = P_3, H = C_3$

Pada gambar 2.3.5, diperoleh himpunan titik sebagai berikut.

$$V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \text{ dan}$$

$$V(C_3) = \{u_1, u_2, u_3\}.$$

Operasi amalgamasi titik pada graf P_4 dengan graf C_3 adalah $Amal(P_4; C_3, v_1)$ dengan himpunan titik $V(Amal)P_4; C_3, v_1)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3\}$, dengan $v_1 = u_3$. Maka diperoleh graf baru seperti berikut.

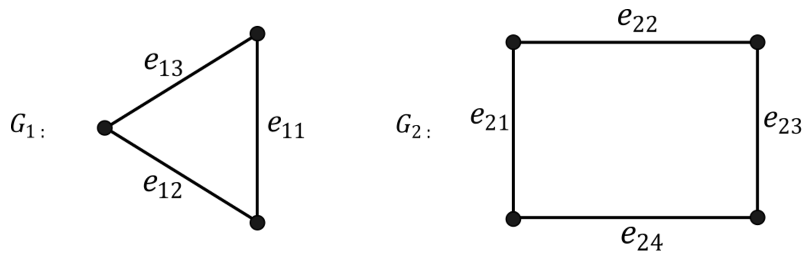


Gambar 2.3.6 Graf $Amal(P_4; C_3, v_1)$

b. Amalgamasi Sisi

Definisi 2.3.3 Misalkan terdapat graf sembarang $G_i, i = 1,2, \dots, n$ dengan $E(G_i) = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ij}\}$. Amalgamasi sisi G_i merupakan penggabungan suatu sisi G_i dengan $e_{1j} = e_{2j} = \cdots = e_{nj}$ untuk suatu $j \in \mathbb{N}$ menjadi sisi pusat. Amalgamasi sisi tersebut dinotasikan dengan $Amal(G_i, e_{ij})$. (Hasmawati, 2013).

Contoh 2.3.3 Diberikan graf G_1 dan G_2 sebagai berikut.



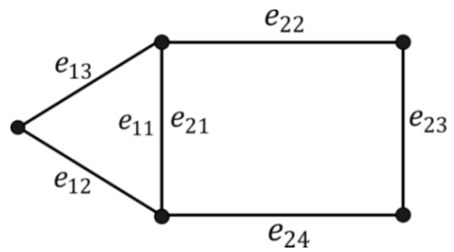
Gambar 2.3.7 Graf $G_1 = C_3$, Graf $G_2 = C_4$

Pada gambar 2.3.7, diperoleh himpunan sisi sebagai berikut.

$$E(C_3) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}, \text{ dan}$$

$$E(C_4) = \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}.$$

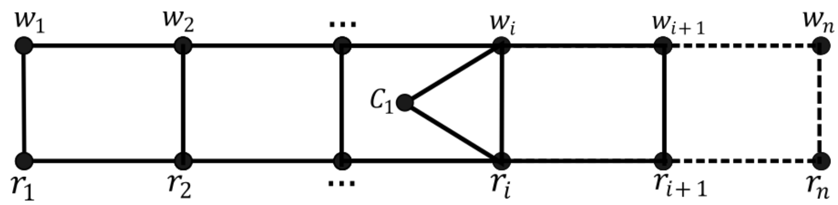
Operasi amalgamasi sisi pada graf C_3 dengan graf C_4 adalah $Amal(C_3; C_4, e_{11})$ dengan himpunan sisi $E(Amal)C_3; C_4, e_{11})) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}$, dengan $e_{11} = e_{21}$. Maka diperoleh graf baru seperti berikut.



Gambar 2.3.8 $Amal(C_3; C_4, e_{11})$

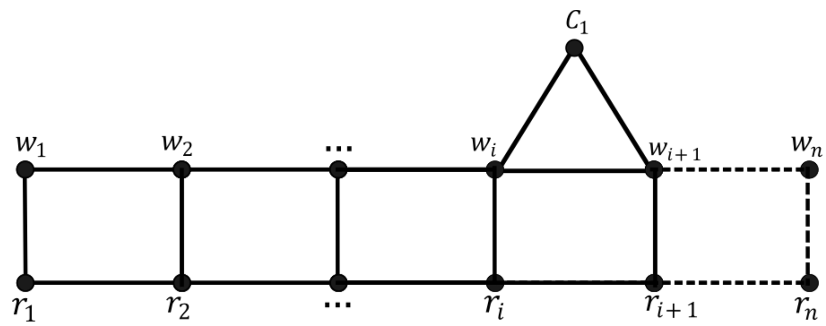
Dalam pengerjaan tugas akhir ini akan digunakan operasi amalgamasi sisi. Operasi amalgamasi sisi tersebut akan diterapkan pada graf tangga L_n dan graf siklus C_3. Amalgamasi sisi pada L_n dengan C_3 dilakukan dengan cara menggabungkan salah satu dari sebarang sisi di L_n dengan sebarang sisi di C_3. Sehingga dari amalgamasi sisi ini diperoleh 3 hasil yang dinotasikan dengan $Amal(L_n; C_3, w_i r_i)$, $Amal(L_n; C_3, w_i w_{i+1})$ dan $Amal(L_n; C_3, r_i r_{i+1})$. Seperti pada gambar berikut.

- Graf $Amal(L_n; C_3, w_i r_i)$



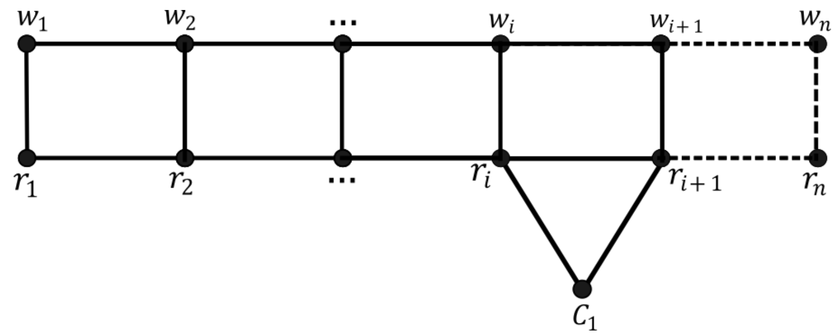
Gambar 2.3.9 Graf $Amal(L_n; C_3, w_i r_i)$

- $Amal(L_n; C_3, w_i w_{i+1})$



Gambar 2.3.10 Graf $Amal(L_n; C_3, w_i w_{i+1})$

- $Amal(L_n; C_3, r_i r_{i+1})$



Gambar 2.3.11 Graf $Amal(L_n; C_3, r_i r_{i+1})$

2.4 Dimensi Metrik Pada Graf

Pada Subbab 2.4 ini disajikan definisi, istilah-istilah dan hasil penelitian yang berkaitan dengan dimensi metrik.

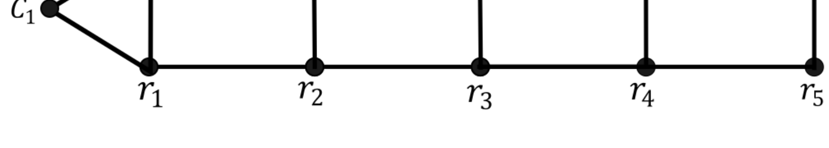
Definisi 2.4.1 Misalkan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan himpunan bagian dari $V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap W di G adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap $u, v \in V(G), u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|S)$. (Eka dan Rahadjeng, 2012).

Definisi 2.4.2 Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Banyaknya anggota atau kardinalitas dari basisnya (himpunan pembeda minimum) disebut dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$. (Wahyudi, dkk., 2011).

Berikut diberikan contoh mengenai penentuan dimensi metrik graf $Amal(C_3; L_5, w_1 r_1)$.

Contoh 2.4.2

Misalkan G adalah graf seperti pada Gambar 2.3.9, untuk $n = 5$ dan $i = 1$. Akan ditentukan dimensi metrik dari graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$.



Gambar 2.4.1 Graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$

Pilih $S_1 = \{c_1, w_1\}$, $S_2 = \{w_1, w_2, r_1\}$, $S_3 = \{r_1, r_2 r_3\}$. Akan ditunjukkan $S_{1,} S_2$ dan S_3 adalah himpunan pembeda dari graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$.

Representasi setiap titik pada graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$ terhadap $S_1 = \{c_1, w_1\}$ adalah.

$$r(c_1|S_1) = \big(d(c_1, c_1), d(c_1, w_1)\big) = (0,1)$$
$$r(w_1|S_1) = \big(d(w_1, c_1), d(w_1, w_1)\big) = (1,0)$$
$$r(w_2|S_1) = \big(d(w_2, c_1), d(w_2, w_1)\big) = (2,1)$$
$$r(w_3|S_1) = \big(d(w_3, c_1), d(w_3, w_1)\big) = (3,2)$$
$$r(w_4|S_1) = \big(d(w_4, c_1), d(w_4, w_1)\big) = (4,3)$$
$$r(w_5|S_1) = \big(d(w_5, c_1), d(w_5, w_1)\big) = (5,4)$$
$$r(r_1|S_1) = \big(d(r_1, c_1), d(r_1, w_1)\big) = (1,1)$$
$$r(r_2|S_1) = \big(d(r_2, c_1), d(r_2, w_1)\big) = (2,2)$$
$$r(r_3|S_1) = \big(d(r_3, c_1), d(r_3, w_1)\big) = (3,3)$$
$$r(r_4|S_1) = \big(d(r_4, c_1), d(r_4, w_1)\big) = (4,4)$$
$$r(r_5|S_1) = \big(d(r_5, c_1), d(r_5, w_1)\big) = (5,5)$$

Karena setiap titik pada graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $S_1 = \{c_1, w_1\}$, maka S_1 merupakan himpunan pembeda dari graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$.

Representasi setiap titik pada graf $Amal(L_5; C_3, w_1 r_1)$ terhadap $S_2 = \{w_1, w_2, r_1\}$ adalah.

$$r(c_1|S_2) = \big(d(c_1, w_1), d(c_1, w_2), d(c_1, r_1)\big) = (1,2,1)$$
$$r(w_1|S_2) = \big(d(w_1, w_1), d(w_1, w_2), d(w_1, r_1)\big) = (0,1,1)$$
$$r(w_2|S_2) = \big(d(w_2, w_1), d(w_2, w_2), d(w_2, r_1)\big) = (1,0,2)$$
$$r(w_3|S_2) = \Big(d(w_3, w_1), d\big(w_3, w_2, d(w_3, r_1)\big)\Big) = (2,1,3)$$
$$r(w_4|S_2) = \big(d(w_4, w_1), d(w_4, w_2), d(w_4, r_1)\big) = (3,2,4)$$
$$r(w_5|S_2) = \big(d(w_5, w_1), d(w_5, w_2), d(w_5, r_1)\big) = (4,3,5)$$
$$r(r_1|S_2) = \big(d(r_1, w_1), d(r_1, w_2), d(r_1, r_1)\big) = (1,2,0)$$
$$r(r_2|S_2) = \big(d(r_2, w_1), d(r_2, w_2), d(r_2, r_1)\big) = (2,1,1)$$

$$r(r_3|S_2) = \big(d(r_3, w_1), d(r_3, w_2), d(r_3, r_1)\big) = (3,2,2)$$
$$r(r_4|S_2) = \big(d(r_4, w_1), d(r_4, w_2), d(r_4, r_1)\big) = (4,3,3)$$
$$r(r_5|S_2) = \big(d(r_5, w_1), d(r_5, w_2), d(r_5, r_1)\big) = (5,4,4)$$

Karena setiap titik pada graf $Amal(L_5; C_3, w_1r_1)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $S_2 = \{w_1, w_2, r_1\}$, maka S_2 merupakan himpunan pembeda dari graf $Amal(L_5; C_3, w_1r_1)$.

Representasi setiap titik pada graf $Amal(L_5; C_3, w_1r_1)$ terhadap $S_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$ adalah

$$r(c_1|S_3) = \big(d(c_1, r_1), d(c_1, r_2), d(c_1, r_3)\big) = (1,2,3)$$
$$r(w_1|S_3) = \big(d(w_1, r_1), d(w_1, r_2), d(w_1, r_3)\big) = (1,2,3)$$
$$r(w_2|S_3) = \big(d(w_2, r_1), d(w_2, w_2), d(w_2, r_3)\big) = (2,1,2)$$
$$r(w_3|S_3) = \Big(d(w_3, r_1), d\big(w_3, r_2, d(w_3, r_3)\big)\Big) = (3,2,1)$$
$$r(w_4|S_3) = \big(d(w_4, r_1), d(w_4, r_2), d(w_4, r_3)\big) = (4,3,2)$$
$$r(w_5|S_3) = \big(d(w_5, r_1), d(w_5, r_2), d(w_5, r_3)\big) = (5,4,3)$$
$$r(r_1|S_3) = \big(d(r_1, r_1), d(r_1, r_2), d(r_1, r_3)\big) = (0,1,2)$$
$$r(r_2|S_3) = \big(d(r_2, r_1), d(r_2, r_2), d(r_2, r_3)\big) = (1,0,1)$$
$$r(r_3|S_3) = \big(d(r_3, r_1), d(r_3, r_2), d(r_3, r_3)\big) = (2,1,0)$$
$$r(r_4|S_3) = \big(d(r_4, r_1), d(r_4, r_2), d(r_4, r_3)\big) = (3,2,1)$$
$$r(r_5|S_3) = \big(d(r_5, r_1), d(r_5, r_2), d(r_5, r_3)\big) = (4,3,2)$$

Karena terdapat $r(c_1|S_3) = r(w_1|S_3) = (1,2,3)$, $r(w_3|S_3) = r(r_4|S_3) = (3,2,1)$ dan $r(w_4|S_3) = r(r_5|S_3) = (4,3,2)$, maka $S_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$ bukan merupakan himpunan penentu bagi graf $Amal(L_5; C_3, w_1r_1)$.

Dari kedua himpunan titik yang merupakan himpunan pembeda yaitu $S_1 = \{c_1, w_1\}$ dan $S_2 = \{w_1, w_2, r_1\}$. Himpunan dengan kardinalitas minimum adalah S_1 dengan $|S_1| = 2$. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa $dim(Amal(L_5; C_3, w_1r_1)) = 2$.

Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik diberikan pada teorema yang disajikan berikut ini.

Teorema 2.4.1 (Chartrand, dkk., 2000) Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$.

Teorema 2.4.2 (Eka dan Rahadjeng, 2012) Jika G graf siklus dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim(C_n) = 2$.

Bukti :

Misalkan $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ siklus dengan n titik dan $n \geq 3$ pada graf G. Untuk siklus dengan n ganjil. Misalkan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$, akan dibuktikan W himpunan pembeda. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2,1)$$
$$r(v_1|W) = (3,2)$$
$$r(v_1|W) = (4,3)$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n-3}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right), \left(\frac{n-3}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n-1}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right), \left(\frac{n-1}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+1}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-3}{2}\right), \left(\frac{n-1}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+3}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-5}{2}\right), \left(\frac{n-3}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1,2)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (0,1)$$
$$r(v_n|W) = (1,0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G), u \neq v, r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ adalah himpunan pembeda.

Akan dibuktikan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena G graf siklus, berdasarkan Teorema 2.4.1, $dim(G) \neq 1$ karena tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n ganjil.

Untuk siklus dengan n genap. Misalkan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$, akan dibuktikan W himpunan pembeda. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2,1)$$

$$r(v_1|W) = (3,2)$$

$$r(v_1|W) = (4,3)$$

$$\vdots$$

$$r\left(v_{\frac{n-2}{2}}|W\right) = \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n-2}{2}\right)$$

$$r\left(v_{\frac{n}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right), \left(\frac{n}{2}\right)$$

$$r\left(v_{\frac{n+2}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-4}{2}\right), \left(\frac{n-2}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$r(v_{n-2}|W) = (1,2)$$

$$r(v_{n-1}|W) = (0,1)$$

$$r(v_n|W) = (1,0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G), u \neq v, r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ adalah himpunan pembeda.

Akan dibuktikan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena G graf siklus, berdasarkan Teorema 2.4.1, $dim(G) \neq 1$ karena tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n genap.

Karena terbukti untuk graf siklus dengan banyak titik ganjil dan genap, maka $dim(C_n) = 2$. ■

Berdasarkan Teorema 2.4.1 dan Teorema 2.4.2, maka $dim\big(Amal(L_5; C_3, w_1r_1)\big) = 2$. ■