SKRIPSI

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KELOPAK BUNGA

Disusun dan diajukan oleh

SARTI MUTHMAINNAH

H011171518

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2024

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KELOPAK BUNGA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SARTI MUTHMAINNAH
H011171518

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
FEBRUARI 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KELOPAK BUNGA

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 20 Februari 2024

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 1A0E2AKX816353218

Sarti Muthmainnah

NIM H011171518

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KELOPAK BUNGA

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

Pembimbing Pertama

Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.
NIP. 199210062020016001

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si
NIP. 196804292002121001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Sarti Muthmainnah
NIM	: H011171518
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik graf Kelopak Bunga

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	(..............................)
Sekretaris	: Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.	(..............................)
Anggota	: Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.	(..............................)
Anggota	: Dra. Nur Erawaty, M.Si.	(..............................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 20 Februari 2024

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, Tuhan yang maha Esa, atas berkat rahmat, hidayah, kemudahan, dan segala limpahan nikmatnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "**Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kelopak Bunga".** Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat dan para pengikutnya yang senantiasa istiqomah menerapkan islam dalam kehidupannya hingga akhir zaman.

Kesulitan dan hambatan yang terjadi telah penulis lalui, mulai dari tahap awal penelitian hingga tahap penyusunan skripsi. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna dan banyak kekurangan dikarenakan keterbatasan kemampuan penulis. Oleh karena itu, penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan dari berbagai pihak sehingga penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Orang tua tercinta dan tersayang, Ayahanda **Rustam** dan Ibunda **Ridwang** yang sangat penulis cintai. Terima kasih atas doa yang tulus, kasih sayang, semangat, nasihat, motivasi, didikan serta kepercayaan yang sangat luar biasa yang telah diberikan kepada penulis. Tiada kata yang mampu penulis ucapkan untuk mengungkapkan terima kasih yang sebesar-besarnya selain ucapan syukur karena senantiasa memberikan kasih sayang sepanjang masa sehingga penulis bisa sampai pada tahap ini. Semoga Allah membalas semua kebaikan Ayah dan Ibu.
2. Kakak tercinta dan tersayang **Amiruddin**, **Sul'hidayah** dan **Harmeni**, terima kasih atas setiap dukungan materil, motivasi dan nasihat yang selalu menguatkan penulis selama masa pendidikan penulis hingga saat ini. Dan juga keponakan tersayang penulis yaitu **Disyah, Nasifa, Naziya, Ghilzah** dan **Ghazi** yang selalu menghibur disela-sela pengerjaan skripsi penulis.
3. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.

4. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang senantiasa memberikan semangat kepada penulis agar dapat menyusun skripsi ini dengan baik.
5. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
6. **Ibu Nur Rohmah Oktaviani Putri, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
7. **Bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
8. **Ibu Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen penguji yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk memberikan masukan, arahan, dan saran yang membangun dalam penulisan skripsi ini.
9. **Bapak** dan **Ibu Dosen Pengajar** serta **Staf Departemen Matematika** yang telah membekali banyak ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
10. **Kakak-kakak Musyrifah dan teman-teman BMI, Kak Munji, Kak Eka, Kak Rahmah, Kak Nisa, Nova, Zainab, Fika** dan teman-teman lainnya yang telah memberi dukungan, motivasi, nasihat dan membersamai selama ini serta senantiasa mengingatkan penulis dalam kebaikan.
11. Terima kasih kepada **Ayu, Defi, Riska, Uni, Mutmainnah, Eda, Fira, Hafsah, MJ, Nurfika, Kayis, Yuni, Nanda, Kaye, Acca, Heru, Kade, Rafika** dan **Math 2017** yang telah memberikan warna selama perkuliahan dan memberi semangat kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebut satu per satu yang telah mendukung dan membantu sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan pada skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak yang berkepentingan.

Makassar, 20 Februari 2024

Sarti Muthmainnah

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Sarti Muthmainnah
NIM	: H011171518
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Nonekslusif** ***(Non-exclusive Royalty-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

"Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kelopak Bunga"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal, 20 Februari 2024

Yang menyatakan

(Sarti Muthmainnah)

ABSTRAK

Penentuan nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga dilakukan dengan menentukan batas bawah dan batas atas. Batas bawah ditentukan berdasarkan sifat-sifat graf FP_n menggunakan teorema pendukung. Sedangkan batas atas ditentukan dengan melakukan pelabelan total pada graf FP_n hingga membentuk pola, kemudian menunjukkan bahwa setiap titiknya memiliki bobot yang berbeda dan menunjukkan bahwa k adalah label terbesar yang digunakan. Apabila nilai batas bawah dan batas atas pada graf kelopak bunga sama, maka diperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga.

Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga FP_n dengan $n \geq 4$ dan n bilangan bulat positif genap adalah

$$tvs(FP_n) = \left\lceil \frac{2+n^2-2n}{3} \right\rceil.$$

Kata kunci: Nilai Total Ketidakteraturan Titik, Pelabelan-k Total Ketidakteraturan Titik, Graf Kelopak Bunga.

ABSTRACT

The total vertex irregularity strength of flower petals graph was conducted by determining the lower bound and upper bound. The lower bound determined based on the properties of the FP_n graph using a supporting theorem. The upper bound determined by labeling the total FP_n graph to form a pattern, then shows that each of vertex has a different weight and indicates that k is the largest label used. If the lower bound and upper bound on the flower petals graph are the same, then obtained the total vertex irregularity strength of flower petals graph.

The result show that the total vertex irregularity strength of flower petals graph FP_n for $n \geq 4$ and n is even positive integers with

$$tvs(FP_n) = \left\lceil \frac{2 + n^2 - 2n}{3} \right\rceil.$$

Keywords: Total Vertex Irregularity Strength, Vertex Irregular Total *k*-Labeling, Flower Petals Graph.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

$G(V, E)$: Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E

$V(G)$: Himpunan titik dari graf G

$E(G)$: Himpunan sisi dari graf G

$d(v_i)$: Derajat suatu titik v_i pada graf G

$\delta(G)$: Derajat minimum pada graf G

$\Delta(G)$: Derajat maksimum pada graf G

P_n : Graf lintasan

C_n : Graf siklus

W_n : Graf roda

SF_n : Graf bunga matahari

MSF_n : Graf bunga matahari yang dimodifikasi

FP_n : Graf kelopak bunga

K_n : Graf lengkap

F_n : Graf kipas

$wt(v)$: Bobot titik v

$f(v)$: Fungsi pelabelan titik v

$f(uv)$: Fungsi pelabelan sisi uv

n_δ : Banyaknya titik berderajat terkecil

n_Δ : Banyaknya titik berderajat terbesar

n_i : Banyaknya titik berderajat i

$tvs(G)$: Nilai total ketidakteraturan titik graf G

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali dikemukakan pada tahun 1736 yakni ketika ahli matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan Jembatan Konigsberg (saat ini bernama Jembatan Kaliningrad). Pada awalnya di kota Konigsberg terdapat tujuh buah jembatan yang menjadi permasalahan penduduk kota saat itu, yakni bagaimana cara melewati ketujuh jembatan tersebut hanya sekali dan kembali ke tempat semula. Pada saat itu Euler menjadi orang pertama yang berhasil menemukan solusi dari permasalahan jembatan Konigsberg. Ia menggunakan pembuktian sederhana dengan merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi. Kemudian Leonhard Euler menuliskan solusi permasalahan jembatan Konigsberg kedalam karya tulisnya dan menjadi karya pertama tentang teori graf.

Salah satu topik pembahasan penting pada teori graf yaitu pelabelan graf. Begitu banyak kegunaan yang dapat diambil dari pengaplikasian pelabelan graf seperti pada teori pengkodean, kristalografi sinar-X, radar, astronomi, desain sirkuit, pengalamatan jaringan komunikasi dan manajemen basis data [1]. Adapun beberapa jenis pelabelan graf yaitu pelabelan harmonis, pelabelan gracefull, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib dan pelabelan total tidak teratur.

Pada tahun 1988 Chartrand dkk, pertama kali memperkenalkan dan mendefinisikan konsep pelabelan total tidak teratur dan nilai ketidakteraturan suatu graf. Pada tahun 2007, Bača dkk., memperkenalkan konsep nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf.

Pelabelan total tidak teratur titik pada suatu graf didefinisikan sebagai pemetaan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,3,\dots,k\}$ sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Bobot yang dimaksud yaitu penjumlahan label titik dan label sisi-sisi yang terkait dengan titik tersebut. Nilai total ketidakteraturan titik pada graf G adalah nilai k terkecil dimana graf G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik.

Sampai saat ini sudah banyak yang meneliti mengenai nilai total ketidakteraturan titik pada beberapa graf diantaranya adalah Riskawati telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf sarang lebah $HC(n)$ dengan hasil $tvs(HC(n)) = \left\lceil \frac{6n^2+2}{4} \right\rceil$, untuk $n \geq 2$ [2]. Sitti Fatimah telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf splitting dengan hasil $tvs\left(Spl(K_{1,n})\right) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 3$ [3]. Sitti Ardianty Badawi telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf grid dengan hasil $tvs\ (G_{n^2}) = \left\lceil \frac{n^2+2}{5} \right\rceil$, untuk $n \geq 2$ [4]. St. Maryam Mahaseng telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf kincir $Wd_{5,m}$ dengan hasil $tvs\left(Wd_{5,m}\right) = \left\lceil \frac{4m+4}{5} \right\rceil$, untuk $m \geq 2$ [5]. Nurlindah telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf dodecahedral yang dimodifikasi dengan hasil $tvs\ (G\mathfrak{D}_n) = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil$ [6]. Nurdin Hinding dkk,. telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf hexagonal cluster dengan hasil $tvs(HC(n)) = \frac{3n^2+1}{2}$, untuk $n \geq 2$ [7] . Ika indriani Rahayu telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf bunga matahari yang dimodifikasi dengan hasil $tvs(MSF_n) = \left\lceil \frac{3n+3}{6} \right\rceil$, untuk $n \geq 6$ [8]. Dian firmayasari telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf berlian dengan hasil $tvs\ (Br_n) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$, untuk $n > 5$ [9]. Defi Lestari telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik graf tangga segitiga melingkar yang dimodifikasi dengan $4n$ titik untuk n ganjil dengan hasil $tvs(MCTL_n) \geq \left\lceil \frac{4n+3}{6} \right\rceil$, untuk $n \geq 3$ dan n adalah bilangan bulat positif ganjil [10] .

Berdasarkan beberapa hasil penelitian yang telah dikaji sebelumnya mengenai nilai total ketidakteraturan titik graf, belum ada yang meneliti mengenai graf kelopak bunga. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga dan menuangkannya kedalam skripsi dengan judul “**Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kelopak Bunga**”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini, yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf kelopak bunga?
2. Bagaimana cara menentukan batas atas nilai total ketidakteraturan titik pada graf kelopak bunga?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf kelopak bunga yang dinotasikan dengan FP_n, dimana $n \geq 4$ dan n adalah bilangan bulat positif genap.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga untuk memperoleh nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu untuk menambah wawasan baru mengenai pelabelan graf dan nilai total ketidakteraturan titik serta dapat dijadikan sebagai salah satu sumber referensi mengenai nilai total ketidakteraturan titik.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang beberapa teori dan konsep dasar graf meliputi definisi, terminologi graf, jenis-jenis graf, pelabelan graf dan pelabelan total tidak teratur titik yang sesuai dengan topik penelitian yaitu terkait nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini memuat metode penelitian yang dilakukan, serta tahapan-tahapan dalam melakukan penelitian ini.

4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi pembahasan hasil utama yang diperoleh dari tugas akhir ini yaitu terkait nilai total ketidakteraturan titik graf kelopak bunga.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh berdasarkan pembahasan serta saran bagi peneliti lain untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf

Menurut Hasmawati, (2020) definisi himpunan adalah kumpulan objek-objek yang keanggotaannya dapat di definisikan dengan jelas. Adapun definisi graf sebagai berikut:

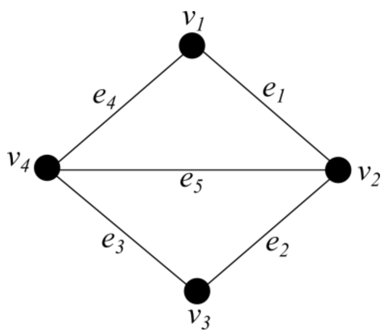
Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E), *dengan* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.*

Berdasarkan definisi 2.1.1, himpunan *V* disebut himpunan titik yang tidak boleh kosong dan *E* disebut himpunan sisi. Secara sederhana graf dapat didefinisikan sebagai sekumpulan objek yang dinamakan titik atau simpul dimana pasangan objek tersebut mempunyai hubungan atau keterkaitan tertentu yang disebut sisi.

Jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$ maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$. Secara matematis, Definisi 2.1.1 dapat dituliskan sebagai berikut:

Graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$, dengan (u, v) disebut sisi. Untuk penyederhanaan, sisi (u, v) hanya ditulis uv atau $e = uv$.

Contoh 2.1.1:



Gambar 2.1.1 Graf G

Pada gambar 2.1.1 menunjukkan graf G yang terdiri dari himpunan titik dan himpunan sisi, dimana $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_1v_4$ dan $e_5 = v_2v_4$.

2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari teori graf maka akan ditemukan banyak terminologi (istilah) dalam graf yang perlu diketahui.

Definisi 2.2.1 *Misalkan* $G(V, E)$ *adalah suatu graf dan* $u, v \in V(G)$, *jika* $e = uv \in E(G)$ *maka titik* u *disebut tetangga (neighbor) dengan* v, *begitu juga sebaliknya. Sehingga titik* u *dan* v *disebut bertetangga sedangkan sisi* e *disebut terkait (incident) dengan* u *dan* v.

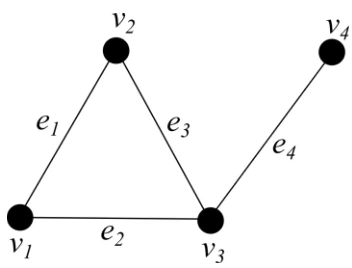
Definisi 2.2.2 *Banyaknya anggota dari* $V(G)$ *disimbolkan dengan* p *disebut orde (order) sedangkan banyaknya anggota dari* $E(G)$ *dapat disimbolkan dengan* q *disebut ukuran (size).*

Definisi 2.2.3 *Derajat pada suatu titik* v_i *ditentukan berdasarkan banyaknya sisi yang terkait dengan titik* v_i *tersebut dan dapat dinotasikan dengan* $d(v_i)$. *Derajat minimum dari suatu graf* G *dinotasikan dengan* $\delta(G)$ *dan derajat maksimum dari suatu graf* G *dinotasikan dengan* $\Delta(G)$.

Definisi 2.2.4 *Lintasan yang panjangnya n dari titik awal* v_0 *ke titik tujuan* v_n *pada graf* G *merupakan barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk* $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ *sedemikian sehingga* $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ *adalah sisi-sisi dari graf* G[12].

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*).

Contoh 2.2.1:



Gambar 2.2.1 Graf H

Pada gambar 2.2.1 graf G menunjukkan bahwa:

i. Titik v_2 bertetangga dengan titik v_1 karena terkait oleh sisi e_1. Begitu pula titik v_2 bertetangga dengan titik v_3 karena terkait oleh sisi e_3. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_3 karena terkait oleh sisi e_2. Dan titik v_3 bertetangga dengan titik v_4 karena terkait oleh sisi e_4. Sedangkan titik v_2 dan v_4 tidak bertetangga karena tidak terdapat sisi yang mengaitkan kedua titik tersebut.

ii. Sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2 sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3 dan v_4.

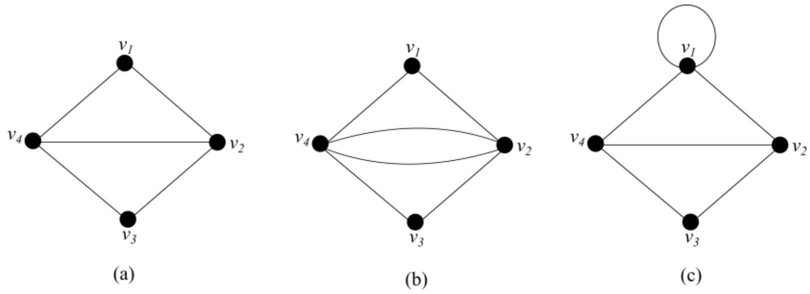
iii. Derajat setiap titiknya adalah $d(v_2) = d(v_1) = 2$, $d(v_3) = 3$ dan $d(v_4) = 1$. Sehingga diperoleh derajat minimumnya adalah $\delta(G) = 1$ dan derajat maksimumnya adalah $\Delta(G) = 3$.

Secara umum pengelompokkan graf terbagi dua berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada graf yaitu graf sederhana dan graf tak sederhana. Adapun definisi graf sederhana sebagai berikut:

Definisi 2.2.5 *Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ merupakan himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ merupakan himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge)* [11].

Graf sederhana juga memiliki ciri khusus yaitu graf yang tidak memiliki sisi ganda dan gelang *(loop)*. Sedangkan graf tak sederhana terbagi dua macam yaitu graf ganda *(multigraph)* dan graf semu *(pseudograph)*. Graf ganda merupakan graf yang memiliki sisi ganda sedangkan graf semu *(pseudograph)* merupakan graf yang mengandung gelang *(loop)*, yang dimaksud gelang disini yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Contoh 2.2.2:

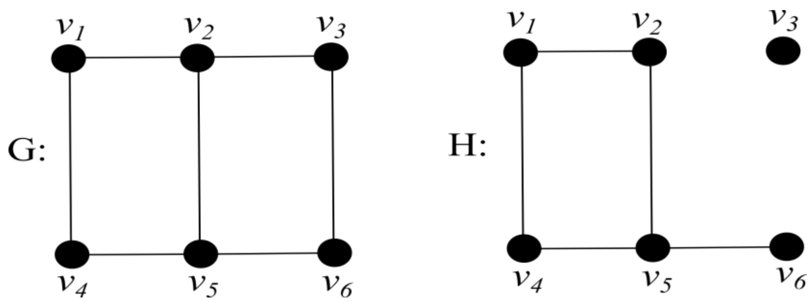


Gambar 2.2.2 (a) graf sederhana, (b) graf ganda, (c) graf semu

Berdasarkan Gambar 2.2.2 terdapat 3 graf yaitu pada bagian (a) menunjukkan graf sederhana sedangkan bagian (b) dan (c) menunjukkan graf tak sederhana.

Definisi 2.2.6 *Misalkan G merupakan graf sederhana. Graf G dikatakan terhubung apabila setiap dua titik pada graf tersebut termuat pada suatu lintasan. Sebaliknya, dikatakan graf tak terhubung apabila dua titik yang tidak termuat dalam lintasan manapun.* [11].

Contoh 2.2.3:



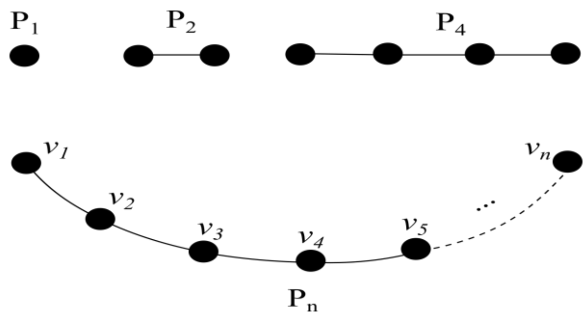
Gambar 2.2.3 Graf terhubung G dan graf tak terhubung H

Pada gambar 2.2.3 menunjukkan bahwa pada graf G merupakan graf terhubung karena setiap dua titiknya termuat lintasan, sedangkan pada graf H merupakan graf tak terhubung karena terdapat dua titik yang tidak termuat lintasan yaitu pada titik v_2 dengan v_3 dan v_3 dengan v_6.

2.3 Jenis-jenis Graf

Definisi 2.3.1 *Misalkan G merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua kecuali titik $v_1$dan v_n. Jika titik-titik pada graf G berorde n dapat dilabeli dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi-sisinya dilabeli dengan $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, maka G disebut graf lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dinotasikan dengan P_n* [13].

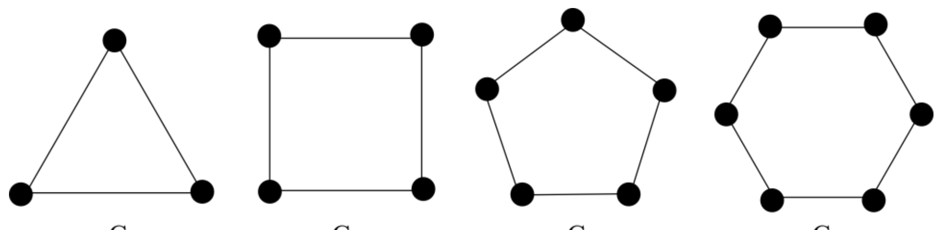
Contoh 2.3.1:



Gambar 2.3.1 Graf Lintasan

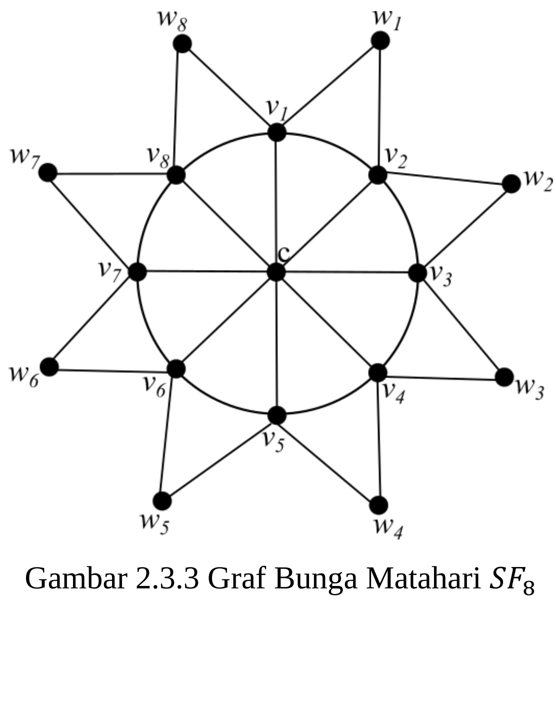
Definisi 2.3.2 *Graf siklus (cycle) adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n buah titik dilambangkan dengan* C_n, *dimana* $n \geq 3$. *Jika titik-titik pada* C_n *adalah* $v_1, v_2, \dots, v_n$, *maka sisi-sisinya adalah* $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1,} v_n), (v_n, v_1)$ *.Dengan kata lain terdapat sisi yang menghubungkan titik terakhir* v_n *dan titik pertama* v_1 [14].

Contoh 2.3.2:



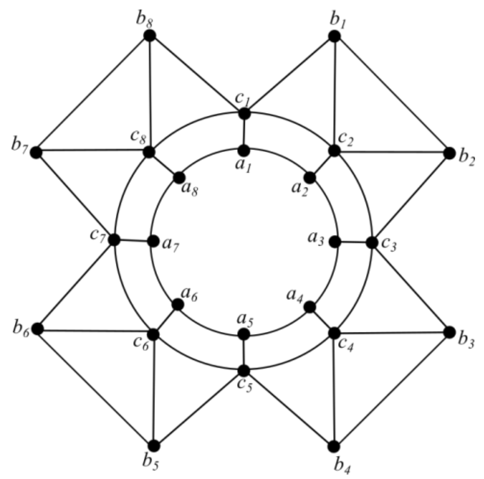
Gambar 2.3.2 Graf Siklus

Definisi 2.3.3 *Misalkan* W_n *adalah graf roda dengan titik pusat* c. *Siklus pada* W_n *berorde* n *dengan label:* $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Graf bunga matahari dapat diperoleh dengan menambahkan* n *titik sebut:* $w_1, w_2, \dots, w_n$ *kemudian* w_i *dikaitkan dengan sisi ke* v_i *dan* v_{i+1} *untuk* $i = 0,1,2, \dots, n$. *Graf bunga matahari dinotasikan dengan* SF_n *dan berorde 2n+1* [11].



Gambar 2.3.3 Graf Bunga Matahari SF_8

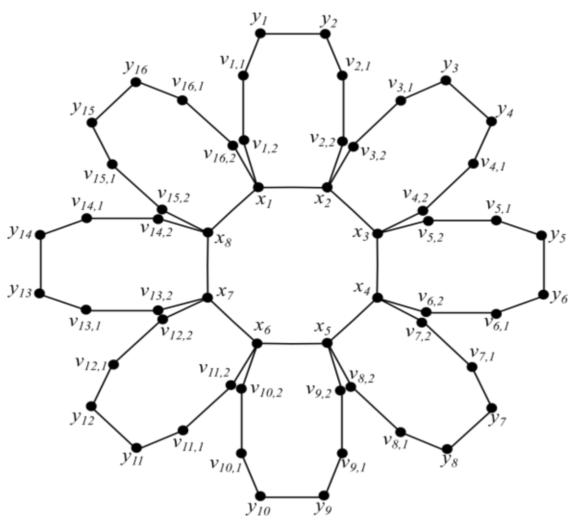
Definisi 2.3.4 *Graf bunga matahari yang dimodifikasi dengan notasi* MSF_n *untuk* $n \geq 4$, n *bilangan bulat genap merupakan graf yang diperoleh dari graf bunga matahari* SF_n *dengan menghilangkan titik pusat* c, *menambahkan graf siklus* C_n: $\{a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1\}$ *sedemikian sehingga* a_ic_i *suatu sisi untuk setiap* $i = 1,2,3,\dots,n$ *dan menambahkan sisi* b_ib_{i+1} *untuk setiap* i *ganjil* [8].



Gambar 2.3.4 Graf Bunga Matahari yang Dimodifikasi MSF_8

Definisi 2.3.5 *Graf kelopak bunga* FP_n *dengan* $n \geq 4$ *adalah suatu graf yang dibentuk dari beberapa graf siklus* C_n *yang sama dan memiliki satu graf siklus pusat, dimana pada setiap sisinya melekat satu siklus* C_n.

Contoh 2.3.5:



Gambar 2.3.5 Graf Kelopak Bunga FP_8

Graf kelopak bunga dinotasikan dengan FP_n yang merupakan singkatan dari Flower Petals graph. Adapun graf yang dinotasikan dengan F_n adalah graf kipas. Graf kelopak bunga berorde $n(n-1)$, pada setiap titiknya ada yang berderajat dua dan berderajat empat. Banyaknya titik yang berderajat dua sebanyak $n(n-2)$ atau $n_2 = n(n-2)$ dan banyaknya titik yang berderajat empat sebanyak n atau $n_4 = n$. Graf kelopak bunga ini dapat berlaku untuk semua jenis graf bunga apabila memiliki ciri dan karakteristik yang sama.

2.4 Pelabelan Graf

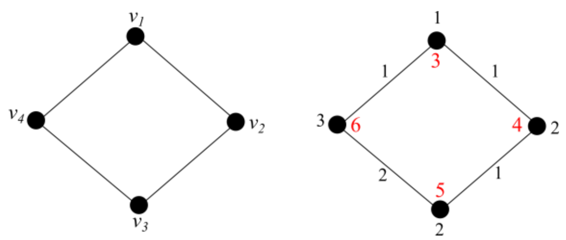
Menurut Wallis (2001) yang dikutip dari [15] yang mendefinisikan pelabelan graf dan bobot pada graf sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 *Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen graf (himpunan titik dan sisi) ke suatu himpunan bilangan positif.*

Adapun pelabelan graf berdasarkan domainnya terbagi menjadi tiga kategori, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Dikatakan pelabelan titik (*vertex labelling*) jika domainnya himpunan titik, pelabelan sisi (*edge labelling*) jika domainnya himpunan sisi dan pelabelan total (*total labelling*) jika domainnya himpunan titik dan sisi.

Definisi 2.4.2 *Bobot (weight) titik v pada pelabelan total adalah label titik v ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v, yaitu* $wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$

Contoh 2.4.1:



Gambar 2.4.1 Pelabelan Total pada Graf C_4

Pada gambar 2.4.1 menunjukkan graf C_4 yang diberikan label pada titik dan sisinya sehingga dikategorikan dengan pelabelan total, dimana $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$. Misal f adalah pelabelan total pada C_4 maka pelabelan titiknya adalah

$f(v_1) = 1$ $\quad\quad$ $f(v_3) = 2$

$f(v_2) = 2$ $\quad\quad$ $f(v_4) = 3$

Adapun pelabelan sisinya adalah

$f(v_1v_2) = 1$ $\quad\quad$ $f(v_3v_4) = 2$

$f(v_2v_3) = 1$ $\quad\quad$ $f(v_1v_4) = 1$

Sehingga diperoleh bobot titiknya sebagai berikut :

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_4) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 2 + 1 + 2 = 5$$

$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_3v_4) + f(v_1v_4) = 3 + 2 + 1 = 6$$

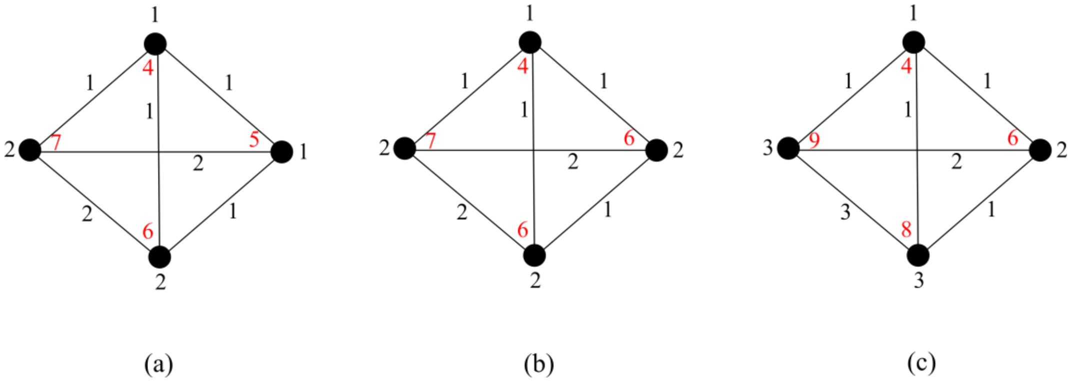
2.5 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Menurut Bača dkk. (2007) yang dikutip dari [16] yang mendefinisikan pelabelan total tidak teratur titik dan nilai total ketidakteraturan titik sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 *Misalkan $G(V, E)$ adalah graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \to \{1,2,3,\dots,k\}$ disebut suatu pelabelan-k total tidak teratur titik (total vertex irregular k-labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V berlaku $wt(u) \neq wt(v)$, dimana*

$$wt(u) = f(u) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \ \ dan \ \ wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$$

Contoh 2.5.1:

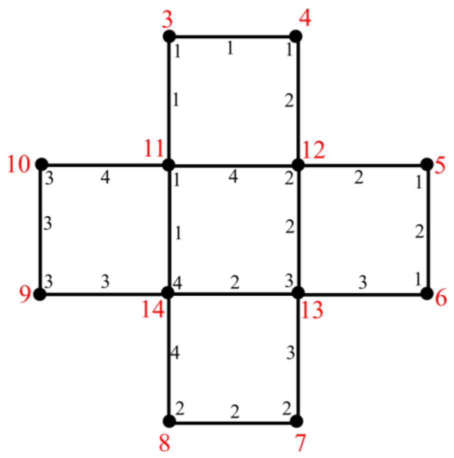


Gambar 2.5.1 Beberapa Pelabelan Total Ketidakteraturan Titik pada Graf K_4

Berdasarkan Gambar 2.5.1 terdapat beberapa pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf K_4. Bagian (a) merupakan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik pada graf K_4 karena setiap titiknya memiliki bobot yang berbeda. Bagian (b) bukan merupakan pelabelan total ketidakteraturan titik karena terdapat dua titik yang memiliki bobot yang sama yaitu 6. Sedangkan pada bagian (c) merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik pada graf K_4 karena setiap titiknya memiliki bobot yang berbeda. Diantara ketiga graf tersebut yang memenuhi definisi 2.5.2 yaitu pelabelan-k terkecil yang diperoleh adalah 2, sehingga dapat dituliskan $tvs(K_4) = 2$.

Definisi 2.5.2 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari G,dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik.*

Contoh 2.5.2:



Gambar 2.5.2 Pelabelan-4 Total Ketidakteraturan Titik pada Graf FP_4

Pada gambar 2.5.2 merupakan pelabelan-4 total ketidakteraturan titik pada graf FP_4 karena setiap titiknya memiliki bobot yang berbeda. Sehingga nilai total ketidakteraturan titik pada graf FP_4 adalah 4 atau dapat ditulis $tvs(FP_4) = 4$.

Batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada suatu graf ditemukan oleh (Nurdin dkk., 2010) sebagai berikut :

Teorema 2.5.1 *Misalkan* G *merupakan graf terhubung yang memiliki* n_i *titik berderajat* $i(i = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, \Delta)$, *dimana* δ *merupakan derajat minimum dan* Δ *merupakan derajat maksimum dari* G, *maka*

$$tvs(G) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1}\right\rceil\right\}.$$

Pada Teorema 2.5.1 menunjukkan bahwa n_i adalah banyaknya titik berderajat i dimana $i = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, \Delta$ dan $\delta = 1,2,3, \dots \Delta - 1$ dengan δ adalah derajat minimum titik.

Misalkan $i = 1,2,3, \dots \Delta$ dengan Δ adalah derajat maksimum titik, maka untuk menentukan nilai $tvs(G)$ yaitu maks $\left\{\left\lceil\frac{1+n_1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{1+n_1+n_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{1+n_1+n_2+n_3}{4}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{1+n_1+n_2+n_3+\cdots+n_\Delta}{\Delta+1}\right\rceil\right\}$. Sehingga untuk menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan titik suatu graf yang diambil adalah nilai batas bawah terbesar yang diperoleh berdasarkan konstruksi dari graf tersebut.