PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELLING)* PADA GRAF I-BINTANG $(I(S_n))$

SYAHRUL FADLUN AL-FITRI

H011171315

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2024

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELLING)* PADA GRAF I-BINTANG $(I(S_n))$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Oleh:

SYAHRUL FADLUN AL-FITRI

H011171315

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MARET 2024

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini menyatakan dengan sunguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELLING)* PADA GRAF I-BINTANG $(I(S_n))$

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 7 Maret 2024

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 229B7ALX069346925

Syahrul Fadlun Al-Fitri

NIM:H011171315

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELLING)* PADA GRAF I-BINTANG $(I(S_n))$

Pada tanggal : 7 Maret 2024

Disetujui oleh :

Pembimbing	Ketua Program Studi
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Firman, S.Si., M.Si.**
NIP. 19700807 200003 1002	**NIP. 19680429 200212 1 001**

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Syahrul Fadlun Al-Fitri

NIM : H011171315

PELABELAN GRACEFUL *(GRACEFUL LABELLING)* PADA GRAF I-BINTANG $(I(S_n))$

Telah berhasil dipertahankan didepan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmi Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

PANITIA UJIAN SKRIPSI

1. **Ketua : Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** (……………………)
2. **Sekretaris : Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** (……………………)
3. **Anggota : Naimah Aris, S.Si., M.Math.** (……………………)

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN FAKULTAS MIPA

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 7 Maret 2024

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, Puji syukur kami senantiasa panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"Pelabelan Graceful *(Graceful Labelling)* Pada Graf I-Bintang $\left(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{S_n})\right)$"**. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin. Shalawat dan salam semoga senantiasa terlimpahkan kepada Rasulullah SAW. Yang telah menuntun umat Islam dari zaman jahiliyah ke zaman Islamiyah.

Penulisan skripsi ini merupakan hasil perjalanan panjang dan perjuangan yang tidak terhitung, yang tak lepas dari bimbingan, doa dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. **Ayahanda Abdullah Basri** dan **Ibunda Putri Sani** atas setiap doa yang tidak pernah putus serta dukungan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Kepada kakak **Syahratul Ramadhani** dan adik **Syakir Fadlun Al-Fitri** yang memberi semangat selama penyusunan skripsi ini.
2. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.,** yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan masukan yang berharga. Keberhasilan ini tidak terlepas dari bimbingan yang mendalam dan pemahaman yang diberikan.
3. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** dan **Naimah Aris, S.Si., M.Math.,** selaku tim penguji yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
4. **Dr. Firman, S.Si., M.Si.,** selaku ketua Departemen Matematika.
5. Bapak/Ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen

Matematika. Serta seluruh staf departemen atas bantuannya dalam pengurusan akademik selama ini.

6. Teman-teman seperjuangan **Program Studi Matematika 2017** yang telah mendukung dan berjuang bersama selama ini.
7. Serta semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu.

Dengan segala hormat, Penulis sadar bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, namun dengan kerendahan hati, penulis berharap penelitian ini dapat memberikan manfaat dan menjadi inspirasi untuk penelitian lebih lanjut. Semoga Allah SWT senantiasa membeikan rahmat dan petunjuk-Nya dalam setiap langkah perjalanan hidup kita. *Amin Ya Rabbal 'Alamin.*

Wassamu'alaikum wr.wb.

Makassar, 7 Maret 2024

Syahrul Fadlun Al-Fitri

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V = V(G)$ dan himpunan sisi $E = E(G)$. Suatu graf dikatakan graceful jika adalah pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,\dots,|E|\}$ dengan $|E|$ banyak sisi, sedemikian hingga jika setiap sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan yang terhubung langsung maka label setiap sisi akan berbeda.

Skripsi ini membahas mengenai pelabelan graceful pada graf I-Bintang $\left(I(S_n)\right)$. Penelitian ini menggunakan pendekatan analisis komprehensif untuk mengevaluasi pelabelan graceful pada graf. Kami menyelidiki kondisi yang harus dipenuhi untuk sebuah graf agar dapat diberi label graceful dan merinci metode penomoran yang dapat menciptakan pelabelan tersebut.

Kata kunci: Pelabelan graceful, graf I-Bintang, fungsi injektif.

ABSTRACT

Let G be a graph with the set of vertices $V = V(G)$ and the set of edges $E = E(G)$. A graph is said to be graceful if there is a labeling of the vertices of the graph G that satisfies an injective function from the set of vertices to the set of non-negative integers $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$ where $|E|$ is the number of edges, such that for every edge the absolute difference of the labels of the vertices it connects results in distinct labels for each edge.

This thesis discusses graceful labeling on the I-Star graph $\left(I(S_n)\right)$. The research employs a comprehensive analytical approach to evaluate graceful labeling on the graph. We investigate the conditions that must be satisfied for a graph to be given a graceful label and detail the numbering methods that can create such labeling.

Keywords: Graceful labeling, I-Star graph, injective function.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan salah satu cabang matematika yang digunakan untuk mempermudah menyelesaikan suatu masalah dan turut andil dalam kemajuan diberbagai bidang. Graf digunakan untuk merepresentasikan suatu objek dan hubungan dari objek tersebut. Representasinya bisa dengan titik, bulatan, atau dengan noktah untuk menyatakan objek, sedangkan hubungan antara objek-objeknya dinyatakan dengan garis. Dengan merepresentasikan permasalahan ke dalam bentuk graf, maka suatu permasalahan dapat dijelaskan secara lebih sederhana. Misalnya peta jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Sulawesi Selatan, peta tersebut merupakan sebuah graf, yang dalam hal ini suatu kota dinyatakan dengan titik, sedangkan jalannya adalah sebuah garis. Dengan diberikannya peta tersebut, kita dapat mengetahui apakah ada lintasan jalan antara dua buah kota dan rute perjalanan tersingkat dari kota A ke kota B.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang mendapat perhatian khusus, karena model-model yang ada dalam teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, misalnya, pada jaringan transportasi, komunikasi dan riset operasi. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàck (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan dari graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan himpunan sisi (sehingga pelabelan ini disebut Pelabelan total) [1].

Ada banyak pelabelan yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful. Gallian (2007: 4) mengatakan bahwa Pelabelan graceful didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,\dots,|E|\}$ dengan $|E| =$ banyak sisi, sedemikian hingga jika setiap sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan yang terhubung langsung maka label setiap sisi akan berbeda. Dengan demikian, pelabelan graceful merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titiknya saja sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik [1].

Penelitian sebelumnya telah mengulas berbagai aspek pelabelan graceful pada berbagai jenis graf tertentu, seperti graf lintasan (path graph), graf siklus (cycle graph), dan graf bintang (star graph), telah ditemukan memiliki pelabelan graceful. Tulisan oleh Huda dan Amri [2], membahas mengenai pelabelan graceful pada Graf H-Bintang dan A-Bintang, sementara Kaloko dan Ahvaningsih [3] mengeksplorasi pelabelan graceful pada graf superstar. Pemahaman lebih mendalam tentang konsep ini diperluas oleh Ilyas, dkk.[4] menuliskan pelabelan graceful pada graf U-Bintang dan Graf $S_n, 3$. Melihat keragaman penelitian tersebut, terbukti bahwa pelabelan graceful menjadi topik yang menarik untuk diteliti dalam konteks graf. Dengan merujuk pada penelitian-penelitian terdahulu, penulis bertujuan untuk menyelidiki pelabelan graceful pada graf I-Bintang $\left(I(S_n)\right)$ yang selanjutnya dituangkan dalam bentuk tulisan skripsi ini.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah apakah dapat dikonstrusksi pelabelan graceful pada graf I-Bintang $\left(I(S_n)\right)$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menemukan pola pelabelan graceful pada graf I-Bintang $\left(I(S_n)\right)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

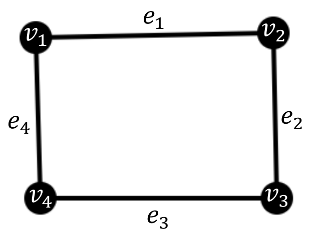
1. Menambah wawasan mengenai teori graf, khususnya pelabelan graceful.
2. Sebagai media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.
3. Menjadi pustaka bagi matematikawan yang ingin membahas mengenai pelabelan graceful.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi, dengan himpunan sisi diperoleh dari himpunan titiknya. Pengaitan titik–titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan menjadi sebuah gambar sehingga membentuk suatu graf. Secara formal definisi graf dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E) *dengan* V *himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan* E *himpunan dari pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi. Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut:* $Graf\ G = (V(G), E(G))$ *dengan* $V(G) = \{u: u\ disebut\ titik\}$ *dan* $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ [5].



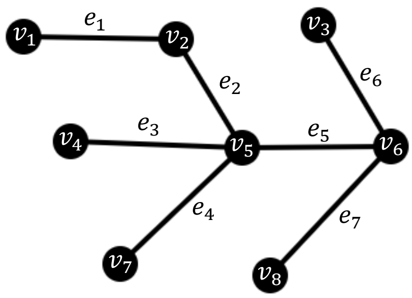
Gambar 2.1.1 Graf G

Pada Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa graf G memiliki himpunan titik, yaitu $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi, yaitu $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4$, dan $e_4 = v_1v_4$.

Definisi 2.1.2 *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah graf dengan himpunan titik* $V(G)$ *dan himpunan sisi* $E(G)$*. Jika* $u, v \in V(G)$ *dan* $e = uv \in E(G)$*, maka e disebut terkait (incident) dengan u dan v; u dikatakan bertetangga (adjacent) dengan v. Lebih jauh, jika* e_1 *dan* e_2 *adalah sisi yang berbeda pada G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka* e_1 *dan* e_2 *disebut sisi bertetangga* [6].

Pada Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_4 yang terhubung langsung dengan sisi e_1 dan e_4 namun tidak bertetangga dengan titik v_3 karena tidak ada sisi yang menghubungkan kedua titik secara langsung. Sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2, tetapi tidak terkait dengan titik v_3 dan v_4. Demikian pula dengan sisi e_1 bertetangga dengan sisi e_2 dan e_4, namun tidak bertetangga dengan sisi e_3.

Definisi 2.1.3 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan $v \in V(G)$. Derajat titik v adalah banyaknya sisi-sisi dari graf G yang terkait dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $deg(v)$* [6].



Gambar 2.1.2 Graf G

Pada Gambar 2.1.2 dapat dilihat bahwa v_5 pada graf G memiliki derajat empat atau $deg(v_5) = 4$ karena sisi yang terhubung dengan v_5 adalah $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

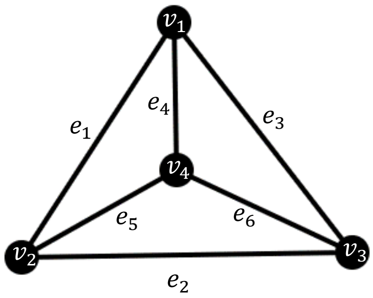
Graf dibagi menjadi beberapa jenis atau kategori sesuai dengan jenis pengelompokannya. Pengelompokan graf terbagi berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang atau berdasarkan orientasi arah sisi.

2.2.1 Jenis Graf Berdasarkan Sisi Ganda

Berdasarkan pengelompokan ada tidaknya sisi ganda atau gelang maka dibagi menjadi dua jenis, yaitu graf sederhana *(simple graph)* dan graf tak sederhana *(unsimple graph).*

1. Graf Sederhana *(Simple Graph)*

Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda *(multiple edges)* dan gelang *(loop).* Pada graf sederhana sisi merupakan pasangan tak terurut *(unordered pairs).* Sehingga, dapat dituliskan bahwa sisi (u, v) sama dengan sisi (v, u) [7].



Gambar 2.2.1 Graf Sederhana

2. Graf Tak Sederhana *(Unsimple Graph)*

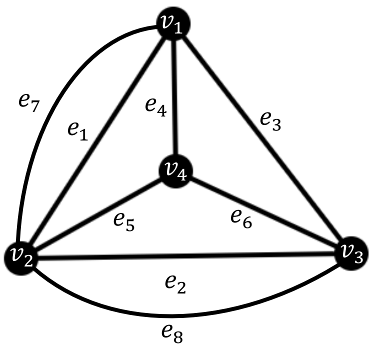
Graf tak sederhana merupakan graf yang memiliki sisi ganda *(multiple edges)* dan/ atau gelang *(loop)*. Graf tak sederhana dibedakan menjadi dua, yaitu graf ganda *(multigraph)* dan graf semu *(pseudograph)*.

a. Graf Ganda *(Multigraph)*

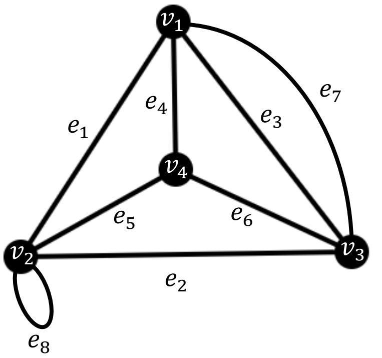
Graf ganda yaitu graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda menghubungkan dua titik dengan dua atau lebih sisi, serta tidak mengandung gelang *(loop)*. Selain itu, graf ganda juga dapat didefinisikan sebagai $G = (V, E)$ yang terdiri dari himpunan tak kosong titik dengan E adalah himpunan ganda *(multiset)* yang memuat sisi ganda [7].

b. Graf Semu *(Pseudograph)*

Graf semu yaitu graf yang mengandung gelang *(loop)*. Berbeda dengan graf ganda yang tidak boleh memiliki gelang *(loop)*, graf semu dapat memiliki sisi ganda. Graf ini lebih umum dibandingkan dengan graf ganda karena dapat terhubung ke dirinya [7].



Gambar 2.2.2 Graf Ganda



Gambar 2.2.3 Graf Semu

2.2.2 Jenis Graf Berdasarkan Orientasi Arah

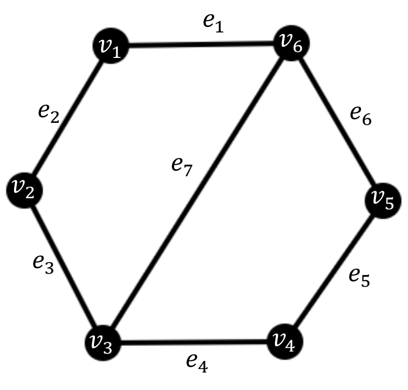
Sisi pada graf memiliki orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi tersebut, maka jenis graf dibagi menjadi dua, yaitu graf tak berarah *(undirected graph)* dan graf berarah *(directed graph atau digraph).*

1. Graf Tak Berarah *(Undirected Graph)*

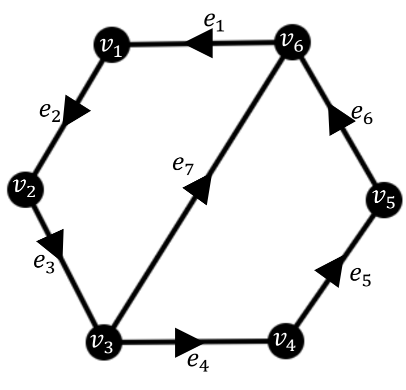
Graf yang setiap sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperlihatkan. Jadi, $(u,v) = (v,u)$ adalah sisi yang sama [7], seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.4.

2. Graf Berarah *(Directed Graph atau Digraph)*

Graf berarah, yaitu graf yang sisi-sisinya memiliki orientasi arah seperti pada Gambar 2.2.5. Sisi yang memiliki arah biasa disebut dengan busur *(arc)*. Pada graf berarah, (u,v) dan (v,u) menyatakan dua busur yang berbeda, sehingga dapat ditulis $(u,v) \neq (v,u)$. Pada busur (u,v) titik u dinamakan titik asal *(initialvertex)*, sedangkan titik v dinamakan titik terminal *(terminal vertex)*. Pada graf berarah diperbolehkan terdapat gelang *(loop)*, namun sisi ganda tidak [7].



Gambar 2.2.5 Graf Tak Berarah

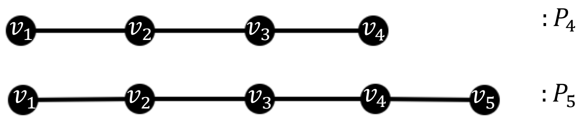


Gambar 2.2.4 Graf Berarah

2.3 Graf Sederhana Khusus

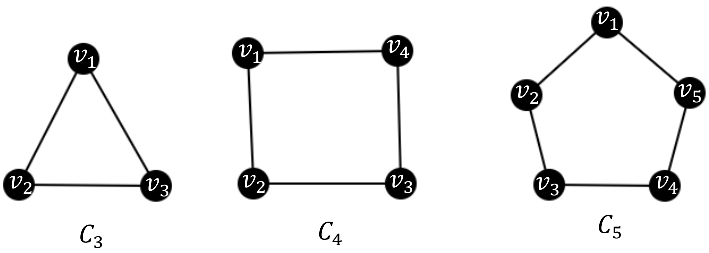
Selain pengelompokan graf diatas, terdapat juga graf khusus yang sering dijumpai seperti graf lintasan, graf siklik, graf komplit, graf roda, graf bipartit, graf bipartit komplit dan graf bintang.

Definisi 2.3.1 *Graf lintasan (path) dinotasikan* P_n *adalah graf terhubung yang terdiri dari tepat 2 titik berderajat 1 dan* $n-2$ *titik berderajat 2, dimana* $n \geq 2$ [8]. Suatu graf G dikatakan terhubung jika $\forall u, v \in G$ $\exists$ lintasan dari u ke v. Contoh graf lintasan ditunjukan pada gambar 2.3.1.



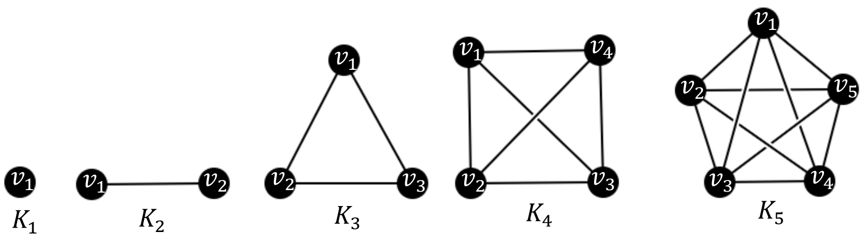
Gambar 2.3.1 Graf Lintasan

Definisi 2.3.2 *Graf siklik (cycle graph) merupakan graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan* n *buah titik dinotasikan dengan* C_n [8]. Contoh graf siklik ditunjukkan pada Gambar 2.3.2.



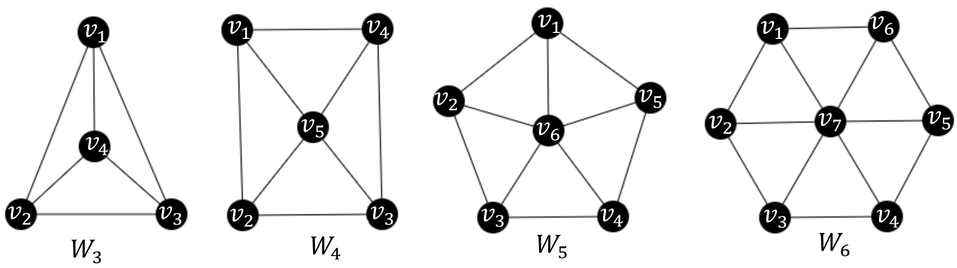
Gambar 2.3.2 Graf Siklik

Definisi 2.3.3 *Graf* G *dikatakan komplit atau lengkap jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (adjecent). Graf komplit dengan n buah titik dinotasikan dengan* K_n*. Dengan demikian, maka graf merupakan graf beraturan* $(n-1)$ *dengan banyak titik* $p = n$ *dan banyak sisi* $q = \frac{n(n-1)}{2}$ [9]. Berikut ini adalah gambar graf $K_1, K_2, \ldots,$ dan K_5.



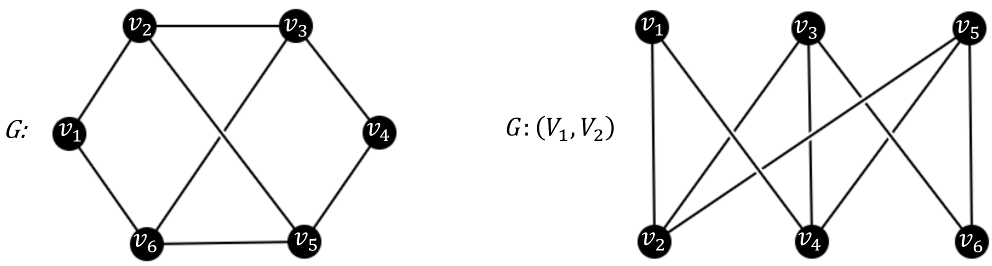
Gambar 2.3.3 Graf Komplit

Definisi 2.3.4 *Untuk* $n \geq 3$, *Graf Roda* W_n *(Wheels Graph) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik baru pada graf siklik* C_n *sedemikian hingga setiap titik pada graf siklik* C_n *berhubungan langsung dengan titik baru tersebut. Banyak titik graf roda adalah* $n + 1$, *sedangkan banyak sisinya adalah 2n* [10].



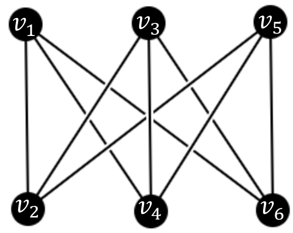
Gambar 2.3.4 Graf Roda

Definisi 2.3.5 *Graf Bipartit adalah suatu graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua bagian* $V_1 dan\, V_2$ *sedemikian sehingga setiap sisinya mempunyai titik ujung di* V_1*dan titik ujung di* V_2. *Kita sebut* (V_1, V_2) *bipartit* G [11]. Gambar 2.3.5 merupakan contoh graf bipartit. Graf G dipartisi menjadi graf $G(V_1, V_2)$ dengan $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$.



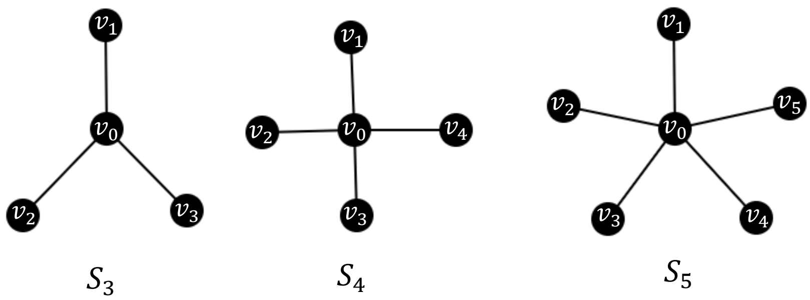
Gambar 2.3.5 Graf Bipartit

Definisi 2.3.6 *Graf Bipartit Komplit adalah graf bipartisi yang tiap sisinya menghubungkan masing-masing titik di* V_1*dan* V_2 *oleh tepat satu titik. Jika* V_1*dan* V_2 *memiliki titik* m *dan* n, *maka dinyatakan dengan* $K_{m,n}$ [12]. Gambar 2.3.6 merupakan contoh graf bipartit komplit dengan $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, diperoleh $m = 3$ dan $n = 3$.



Gambar 2.3.6 Graf $K_{3,3}$

Definisi 2.3.7 *Graf Bintang adalah graf bipartit komplit yang berbentuk* $K_{1,n}$. *Graf bintang dinotasikan dengan* S_n. *Graf bintang memiliki* $n + 1$ *titik dan n sisi.* Pada Gambar 2.3.7 merupakan contoh graf bintang.

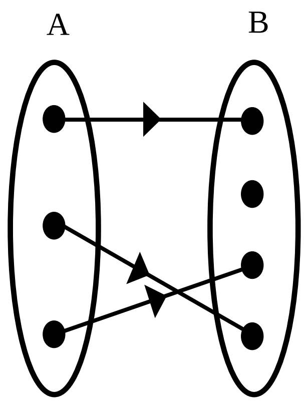


Gambar 2.3.7 Graf Bintang

2.4 Pemetaan

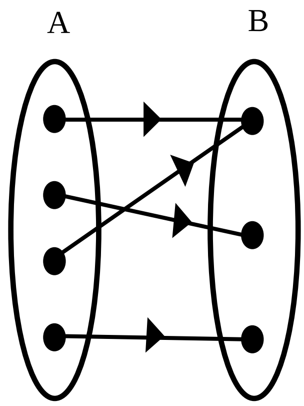
Misalkan diberikan dua himpunan yang tidak kosong yaitu A dan B. Suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A ke tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan $f : A \to B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain), himpunan B disebut sebagai daerah kawan (kodomain) dan daerah hasil R_f (Range). Secara umum pemetaan dibagi menjadi 3 macam sebagai berikut:

Definisi 2.4.1 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah sebuah pemetaan dari* A *ke* B. *Pemetan* f *disebut injektif jika* $\forall\, x_1 \neq x_2$ *maka* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *atau jika* $f(x_1) = f(x_2)$ *maka* $x_1 = x_2$[13].



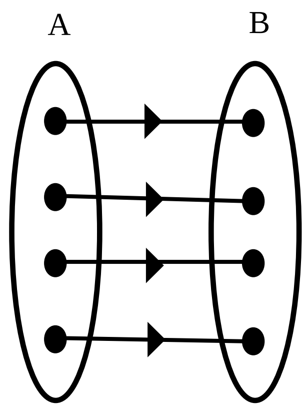
Gambar 2.4.1 Fungsi Injektif

Definisi 2.4.2 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah sebuah pemetaan dari* A *ke* B. *Pemetaan* f *disebut surjektif jika* $\forall\, y \in B$ *maka* $\exists\, x \in A$ *sedemikian hingga* $f(x) = y$ *atau jika range* $R_f = B$ [13].



Gambar 2.4.2 Fungsi Surjektif

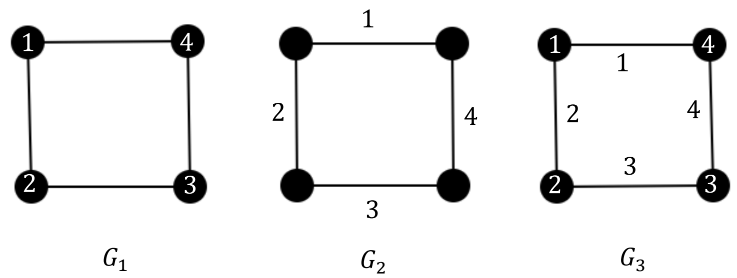
Definisi 2.4.3 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah sebuah pemetaan dari* A *ke* B. *Pemetaan* f *disebut bijektif jika pemetaan* f *merupakan pemetaan injektif dan surjektif* [13].



Gambar 2.4.3 Fungsi Bijektif

2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan dari graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan himpunan sisi (Pelabelan total) [1]. Contoh dari pelabelan graf dapat dilihat dari gambar dibawah ini.



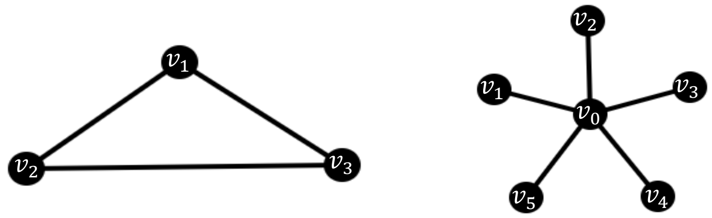
Gambar 2.5 1 Pelabelan Graf

Pada gambar 2.5 merupakan contoh pelabelan graf dimana pada graf G_1 adalah contoh pelabelan titik, graf G_2 adalah contoh pelabelan sisi sedangkan graf G_3 adalah contoh pelabelan total.

2.6 Pelabelan Graceful

Definisi 2.6 *Pelabelan graceful adalah pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif* $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$ *dengan* $|E|$ *banyak sisi, sedemikian hingga jika setiap sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan yang terhubung langsung maka label setiap sisi akan berbeda*[1]. Graf yang dapat dikenai pelabelan graceful disebut graf graceful.

Berikut adalah contoh yang membuat graf K_3 dan S_5 menjadi graf graceful.



Gambar 2.6.1 Graf K_3 dan S_5

a) Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf K_3 sebagai berikut:

$V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$.

Selanjutnya, misalkan f adalah fungsi pelabelan titik dan f^* adalah fungsi pelabelan sisi pada graf K_3 maka,

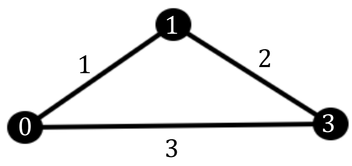
$$f(v_1) = 1, f(v_2) = 0 \; dan \; f(v_3) = 3$$

Sebagai akibat, diperoleh:

$$f^*(v_1v_2) = |f(v_1) - f(v_2)| = |1 - 0| = 1$$
$$f^*(v_2v_3) = |f(v_2) - f(v_3)| = |0 - 3| = 3$$
$$f^*(v_1v_3) = |f(v_1) - f(v_3)| = |1 - 3| = 2.$$

Karena $f: V(K_3) \to \{0,1,2,3\}$ merupakan fungsi injektif dan $f^*(uv)$ berbeda $\forall uv \in E(K_3)$ dengan demikian fungsi pelabelan pada graf K_3 merupakan suatu graf graceful.

Hasil dari pelabelan graceful pada graf K_3 dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.6.2 Pelabelan Graf K_3

b) Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf S_5 sebagai berikut:

$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_0v_5\}$.

Selanjutnya, misalkan f adalah fungsi pelabelan titik dan f^* adalah fungsi pelabelan sisi pada graf S_5 maka,

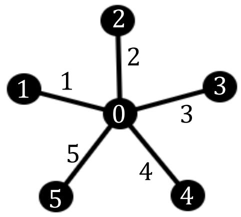
$$f(v_0) = 0, f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(v_4) = 4, dan \; f(v_5) = 5$$

Sebagai akibat, diperoleh:

$$f^*(v_0v_1) = |f(v_0) - f(v_1)| = |0 - 1| = 1$$
$$f^*(v_0v_2) = |f(v_0) - f(v_2)| = |0 - 2| = 2$$
$$f^*(v_0v_3) = |f(v_0) - f(v_3)| = |0 - 3| = 3$$
$$f^*(v_0v_4) = |f(v_0) - f(v_4)| = |0 - 4| = 4$$
$$f^*(v_0v_5) = |f(v_0) - f(v_5)| = |0 - 5| = 5.$$

Karena $f: V(S_5) \rightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$ merupakan fungsi injektif dan $f^*(uv)$ berbeda $\forall uv \in E(S_5)$ dengan demikian fungsi pelabelan pada graf S_5 merupakan suatu graf graceful.

Hasil dari pelabelan graceful pada graf S_5 dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.6.3 Pelabelan Graf S_5