Skripsi

STUDI METRIK SCHWARZSCHILD TERMODIFIKASI DALAM TEORI GRAVITASI $\boldsymbol{f(R)}$

L.M. ALDIN HASWARI

H211 16 002

DEPARTEMEN FISIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

STUDI METRIK SCHWARZSCHILD TERMODIFIKASI DALAM

TEORI GRAVITASI $f(R)$

SKRIPSI

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Sains

pada Program Studi Fisika Departemen Fisika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

L.M. ALDIN HASWARI
H211 16 002

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI METRIK SCHWARZSCHILD TERMODIFIKASI DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

Disusun dan diajukan oleh:

L.M. ALDIN HASWARI

H211 16 002

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada 11 Agustus 2023

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Eko Juarlin, S.Si, M.Si.	Azwar Sutiono, S.Si, M.Si.
NIP. 19811106 200812 1 002	NIP. 19911203 201903 1 007

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Arifin, M.T

NIP. 19670520 199403 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : L.M. Aldin Haswari

NIM : H21116002

Program Studi : Fisika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Studi Metrik Schwarzschild Termodifikasi dalam

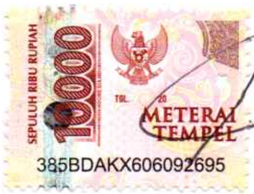
Teori Gravitasi $f(R)$

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilalihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar – benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau seluruh skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 11 Agustus 2023

Yang Menyatakan,



L.M. Aldin Haswari

ABSTRAK

Telah dilakukan penurunan solusi modifikasi persamaan medan gravitasi Einstein dengan pendekatan teori gravitasi $f(R)$. Teori gravitasi $f(R)$ adalah perluasan dari teori gravitasi Einstein. Modifikasi diperoleh dengan menambah suku invarian dengan orde lebih tinggi pada skalar Ricci pada teori gravitasi Einstein dalam bentuk fungsi $f(R)$. Dengan mengambil kasus khusus $R = R_0$, diperoleh solusi vakum simetri bola untuk lubang hitam bermassa m dan tidak berotasi, disebut lubang hitam Schwarzschild termodifikasi. Solusi tersebut menunjukkan adanya suku tambahan yaitu konstanta kurvatur R_0 pada metrik Schwarzschild termodifikasi dalam teori gravitasi $f(R)$.

Kata Kunci: Persamaan Medan Gravitasi Einstein, Teori Gravitasi $f(R)$, Metrik Schwazschild Termodifikasi

ABSTRACT

We have investigated the solution to the modification of Einstein's gravitational field equations has been carried out through the $f(R)$ *theory of gravity approach. The* $f(R)$ *theory of gravity is a generalization of Einstein's theory of gravity. The modification was obtained by adding a higher-order invariant term into the Ricci scalar within Einstein's theory of gravity in the form of a function* $f(R)$*. By considering a special case* $R = R_0$*, we found that the solution of spherically symmetric vacuum for a non-rotating black hole with mass m, that was known as the modified Schwarzschild black hole. This solution shows that there is an additional term, the constant curvature* $f(R)$ *in the modified Schwarzschild metric in the* $f(R)$ *theory of gravity.*

Keywords*: Einstein's gravitational field equations,* $f(R)$ *theory of gravity, modified Schwarzschild metric.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat **Allah Subhana Wata'ala** yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan pertolongan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Studi Metrik Schwarzschild Termodifikasi dalam Teori Gravitasi $\boldsymbol{f(R)}$"**. Shalawat serta salam senantiasa penulis kirim kepada baginda **Rasulullah**, **Muhammad Shalallahu Alaihi Wasallam**, keluarga, para sahabat dan para pengikutnya.

Dalam penulisan skripsi ini penulis tidak terlepas dari berbagai hambatan dan kesulitan, namun berkat dukungan, bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak, akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Dalam tulisan ini, penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kesalahan dan jauh dari kata sempurna sehingga dibutuhkan kritik dan saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak guna memperbaiki skripsi ini agar lebih baik kedepannya. Selanjutnya penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Orang tua tercinta Ayahanda **(La Ode Hanan)** dan Ibunda **(Waode Salma)** yang senantiasa mendoakan dan memberi dukungan penuh baik secara moral maupun materil, serta kepada saudara-saudariku yang tercinta dan terbaik sepanjang masa **Wa Ode Lisnawati** dan **Purniamala Jonas Ode.**
2. Kepada Keluarga Besar dari Ibu: Odhe **(Laode Ghule)** dan Tua **(Wa Fiima)** yang saya cintai. Paman-Paman dan Bibi-bibi yang telah memberi dukungan moral maupun materil. Untuk Sepupu-Sepupuku (**Yasril, Aslan, Yus, Pito, Mondo, Sahlan, Yusni, Alni, Salim, Muti, Alfan, Yahril, Kiki, Tiwi, Elsa, Yasdan, Salwa, Kevrin, Asila**).
3. Kepada Keluarga Besar dari Bapak: Kakek **(Laode Raba)** dan Ina Bungka **(Wa Herii)** yang saya cintai. Paman-Paman dan Bibi-bibi yang telah memberi dukungan moral maupun materil. Untuk Sepupu-Sepupuku (**Kak Hendrik, Aswan, Adin, Desi, Darman, Fina, Lutfi, Sultan, Hikmah, Ainul, Yusti, Aidil, Salsa, Taufik, Hafis**).

4. Bapak **Prof. Dr. Arifin, M.T,** selaku ketua Departemen Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin, yang telah memberi motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi.
5. Bapak **Eko Juarlin, S.Si, M.Si**, selaku Dosen Pembimbing Utama sekaligus Penasehat Akademik (PA) dan Bapak **Azwar Sutiono, S.Si, M.Si**, selaku Dosen Pembimbing Pertama yang telah membimbing dan meluangkan waktu, tenaga, serta pemikirannya kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
6. Bapak **Prof. Dr. Arifin, M.T dan Drs. Bansawang BJ, M.Si** selaku Dosen Penguji yang telah meluangkan waktu dan memberi kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak **Prof. Dr. Dahlang Tahir, M.Si** dan **Drs. Bansawang BJ, M.Si** yang telah membimbing dan mendampingi penulis ketika mengikuti kegiatan kemahasiswaan seperti PKM dan ON MIPA**.**
8. Seluruh **Dosen Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin** terutama **Dosen Laboratorium Fisika Teoritik dan Komputasi**: **Prof. Dr. Tasrief Surungan M.Sc** dan **Drs. Bansawang BJ, M.Si** yang telah memperkenalkan Fisika Teori secara matematis dan filosofis serta terkhusus alm. **Ibu Nurhasanah, S.Si, M.Si** yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk mengenal tentang Astronomi atau Astrofisika.
9. Seluruh **Staf Pegawai Departemen Fisika** dan **Staf Akademik Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin** terutama: (**Pak Ali, Pak Syukur, Kak Rana, Ibu Evi, Pak Suardi, Ibu Fatma)** yang telah membantu penulis selama proses pengurusan administrasi.
10. Kepada **Penghuni Laboratorium Fisika Teoritik dan Komputasi**. Kakak-kakak (**Kak Ghazali, Kak Fauzi, Kak Futra, Kak Uwais, Kak Syahrul, Kak Fachrul**), Teman Angkatan **(Ilham, ACT, Farras, Indri, Arya)** yang telah "terjerumus" ke dalam ruang-waktu Lab Teori karena efek dari gravitasi Fisika Teori dan Adik-adik **(Safrullah, Agung, Aaron, Hilal,**

Israil, Iffa, Umni, Bayu, Faqihah, Fitri, dkk) serta teman-teman yang tidak sempat penulis cantumkan namanya satu persatu disini.

11. **HMKA Men (Ilham, ACT, Muzul, Farras, Patrick)** komunitas yang terbentuk karena sama-sama “kabur” dari suatu hal dan **HMKA Girl (Evi, Novi, Hilda, Afni, Riri, Fira)** yang menjadi teman *touring* penulis selama dibangku perkuliahan.
12. Teman-teman Fisika 2016 **(Ilham, ACT, Muzul, Farras, Patrick**, **Wandi, Muchlis, Afni, Hilda, Riri, Evi, Novi, Winda**, **Widy, Mute, Ekki, Angra, Indri, Arif, Arya, Ida, Lina, Fina, Firda, Rara, Ido, Lili, Mawar, Dayah, Cahya, Arsita, Dedi, Kevin, Fandi, Aii, Nidya, Fajri, Nunu, Fira, Lana, Rizman, Tio, Laupe, Athiyah, Dayat, Ita, Jusrah, Nanda, Windy).**
13. Teman-teman Geofisika 2016 **(Alam, Sabran, Mufly, Rexy, Ayyub, Ulla, Fazrul, Abdi, Hasrina, Hira, Uni, Fara, Sinar, Wiwi, Hamdah, Riana, Athaya, Kasma, Devi, Oland, Adit, Agung, Aso, Aus, Leo, Iksan).**
14. Kakak-kakak **Senior di Himafi 2015 keatas** terkhusus: **(Kak Boy, Kak Suhana, Kak Bahrul, Kak Dedy, Kak Tamlica, Kak Takdir, Kak Jayadi, Kak Azizul, Kak Ilham, Kak Armin, Kak Aswan, Kak Ariyadi, Kak Izwar, Kak Ainul, Kak Anna**, **Kak Hafis, Kak Jr, Kak Ashadi, Kak Rian, Kak Amming, Kak Fadil, Kak Yadin, Kak Aqsa, Kak Edi, Kak Al, Kak Fitra, Kak Diky, Kak Nasri),** adik-adik **2017** hingga sekarang, serta teman-teman **Angkatan Himafi 2016 dan Warga Selingkup KM FMIPA Unhas** yang tidak sempat penulis cantumkan namanya satu persatu.
15. Kepada teman-teman **KKN Desa Pakatto Gel. 102** (**Indra, David, Sukma, Riska, Kak Nissa).** Terima kasih untuk semua dukungan dan cerita yang telah diberikan kepada penulis.
16. Kepada **Keluarga Besar Pondok Ratu**. Legend Generation (**Kak Chay, Kak Uki, Kak Wiwin, Kak Wawan, Kak Ari, Kak Idam, Kak Jun, Kak Ali, Intan, Ihsan, Aas, Isnan, Agus, Ibnu).** Khususnya **Kak Chay, Kak Uki, Ihsan dan Kak Wiwin** yang menjadi teman penulis ketika *lockdown* akibat wabah *corona* dibulan ramadhan tahun 2020, sahur dan buka puasa

bersama bahkan shalat idul fitri dikostan. Terima kasih atas ceritanya. New Generation: (**Kak Rian, Arsyan**, **Yadi, Sabran, Padil, Asrul, Naufal, Ikka, Hendra, Rubi, Adam)** serta Terima kasih kepada **Om Parman dan Ibu, Om Juhurdin**.

17. Kepada **Teman-Teman Main Basket** Sabtu dan Minggu Pagi: **(Kak Aga, Kak Jack, Kak Alif Poltek, Kak Alif Kehutanan, Adam, Fadil, Hary, Reza, Saber, Adil, Felix, Zaif, Khaerul)** dan teman **Joging Kak Imran.**
18. Teman-teman **Grup Sciendrome, MCM,** dan **BauBau UH** terkhusus: (**Kak Middin, Ahsan, Aco, Reza, Chairil, Rahmi, Devy, Inayah, Haris, Ibnu, Yayat, dkk).**
19. Terima kasih khusus kepada teman seperjuangan (**Winda, Awal, Takim, Alex, Wisnu, Ida, Samsir, ACT, Ilham, Padil)** yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
20. Terima kasih **Warung Pagar Biru, Tia Jie** dan **Mas Briyan** yang telah memberi asupan kalori kepada penulis agar bisa menjalani hari.
21. Terakhir Terima Kasih Kepada **Diri Saya Sendiri** yang telah berjuang walaupun harus butuh bantuan dari teman untuk bergerak agar dapat menyelesaikan skripsi ini dan juga Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan semangat, dukungan serta doa sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Penulis sadar bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna karena keterbatasan pengalaman dan pengetahuan dari penulis sendiri, maka dari itu penulis berharap segala bentuk saran dan kritik yang bersifat membangun dari berbagai pihak. Penulis berharap semoga tujuan dari skripsi ini dapat tercapai sesuai harapan dan bermanfaat khususnya dibidang kajian yang sama.

Makassar, 11 Agustus 2023

L.M. Aldin Haswari

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Teori relativitas umum adalah teori fisika yang dikembangkan oleh Albert Einstein pada tahun 1915. Teori ini merupakan pengembangan dari teori relativitas khusus, yang dikemukakan oleh Einstein pada tahun 1905. Sedangkan teori relativitas khusus adalah pengembangan teori gravitasi Newton. Teori gravitasi Newton sangat berhasil di dalam menerangkan sifat gerak benda berkelajuan rendah. Namun, gagal untuk benda yang kelajuannya mendekati laju cahaya [11].

Teori relativitas umum menyatakan bahwa gravitasi adalah efek dari kelengkungan ruang-waktu yang disebabkan oleh distribusi massa-energi. Dalam teori relativitas umum, massa-energi dapat mempengaruhi geometri ruang-waktu yang dinyatakan dalam bentuk persamaan matematis yakni persamaan medan gravitasi Einstein. Persamaan medan gravitasi Einstein di ruas kirinya adalah suku gravitasi dan diruas kanannya adalah suku kontribusi materi-energi [11].

Mencari solusi dari persamaan medan gravitasi Einstein pada dasarnya sangatlah sulit karena persamaannya dalam bentuk persamaan diferensial parsial non linier. Einstein sendiri tidak yakin dapat diperoleh solusi eksak terhadap persamaan medan gravitasinya. Akan tetapi, cukup mengejutkan solusi eksak pertama berhasil ditemukan oleh Karl Schwarzschild pada tahun 1916, kurang dari setahun setelah publikasi teori relativitas umum. Solusi Schwarzschild atau biasa disebut metrik Schwarzschild merupakan solusi vakum untuk lubang hitam statik atau tidak berotasi dan diitinjau menggunakan elemen garis simetri bola. Statik artinya dalam sistem koordinat yang digunakan, turunan tensor metrik terhadap waktu sama dengan nol atau dengan kata lain tensor metriknya tidak bergantung waktu [1,2].

Selain solusi persamaan medan Einstein yang diaplikasikan pada lubang hitam, persamaan medan Einstein juga dapat diaplikasikan dalam ranah kosmologi dan astrofisika. terdapat solusi lain yakni dengan memodifikasi persamaan medan Einstein. Dalam penelitian beberapa dekade terakhir, untuk menjelaskan pengamatan galaksi spiral memunculkan konsep *dark matter* atau materi gelap dan pengamatan pergeseran merah dari supernova memunculkan konsep *dark energy* atau energi gelap. Energi gelap diperkenalkan untuk menjelaskan percepatan dari pengembangan alam semesta. Menurut hasil pengamatan, komposisi alam semesta diisi oleh materi tampak (*ordinary matter*) sekitar 4%, sekitar 23% materi gelap (*dark matter*) dan 73% energi gelap (*dark energy*) [3]. Akan tetapi, teori dan pengamatan haruslah saling berkaitan satu sama lain. Salah satu model teoretis yang berkembang untuk menjelaskan hasil pengamatan tersebut adalah modifikasi gravitasi. Seiring berjalannya waktu, modifikasi gravitasi dilakukan dengan mengesampingkan kehadiran materi gelap dan energi gelap [4].

Salah satu modifikasi paling sederhana pada teori gravitasi Einstein adalah dengan menambah suku invarian dengan orde yang lebih tinggi dari kurvatur dalam aksi Einstein-Hilbert standar yang disebut teori gravitasi $f(R)$. Modifikasi dilakukan pada ruas kiri persamaan medan gravitasi Einstein ditinjau melalui teori gravitasi $f(R)$ yang diperkenalkan oleh Hans Adolph Buchdahl pada tahun 1970 [5]. Dalam teori gravitasi $f(R)$, skalar kelengkungan Ricci berubah bentuk dimana rapat Lagrangian f adalah fungsi arbitrer dari skalar Ricci. Sehingga dengan menggunakan prinsip aksi, ketika $f(R) = R$ maka persamaan gravitasi $f(R)$ kembali menjadi persamaan medan gravitasi Einstein standar [14-18].

Motivasi mempelajari teori gravitasi $f(R)$ adalah teori ini dapat diperoleh penyelesaian dari masalah evolusi alam semesta tanpa memunculkan konsep *dark matter* dan *dark energy*. Sehingga, akan menarik jika teori gravitasi $f(R)$ digunakan untuk mempelajari lubang hitam. Penelitian sebelumnya telah ditemukan solusi lubang hitam Schwarzschild dalam teori gravitasi $f(R)$ [5]. Berdasarkan uraian diatas, maka penelitian ini akan dilakukan penelusuran kembali untuk mencari solusi persamaan medan gravitasi Einstein dalam modifikasi teori gravitasi yakni teori gravitasi $f(R)$ dengan menggunakan formalisme metrik. Adapun Formalisme metrik hanya bergantung terhadap tensor metrik $g_{\mu\nu}$. Pencarian solusi tersebut ditinjau tanpa adanya kehadiran massa dan energi atau biasa disebut sebagai solusi vakum dengan menggunakan elemen garis simetri bola dan tidak berotasi.

I.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana solusi persamaan medan Einstein pada modifikasi teori relativitas umum menurut teori gravitasi $f(R)$. Sehingga, akan diperoleh solusi Schwarzschild termodifikasi dalam teori gravitasi $f(R)$.

I.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian dalam penelitian ini yaitu memperoleh solusi dari modifikasi persamaan medan Einstein dalam teori relativita umum yang direpresentasikan oleh metrik Schwarzschild termodifikasi dalam teori gravitasi $f(R)$.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Persamaan Medan Einstein Standar

Sebelum perumusan teori relativitas umum mengenai gravitasi oleh Albert Einstein, orang mengenal sedikitnya tiga hukum gerak yaitu mekanika Newton, relativitas khusus dan gravitasi Newton. Teori Newton tentang gravitasi menerangkan fenomena gerak benda-benda langit yang dipengaruhi oleh interaksi gravitasi antarbenda tersebut dengan ketelitian tinggi. Namun, sayangnya teori gravitasi Newton tidak konsisten dengan teori relativitas khusus. Teori gravitasi Newton memenuhi persamaan Poisson dengan distribusi materi ρ, yang menjadi sumber gravitasi [7, 9].

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \ , \tag{2.1}$$

dengan ϕ, G, dan ρ masing-masing adalah potensial skalar, konstanta gravitasi Newton dan rapat massa sumber medan gravitasi.

Berdasarkan asas kesetaraan, pada tahun 1915 Einstein berhasil merumuskan kembali teori gravitasi Newton dalam teori relativitas umumnya dengan berasumsi bahwa gravitasi tidak seperti gaya-gaya lainnya, melainkan gravitasi merupakan efek dari kelengkungan ruang-waktu yang diakibatkan oleh distribusi materi dan energi [8]. Objek dengan massa yang besar melengkungkan ruang-waktu lebih besar dibanding objek yang massanya lebih kecil, akibatnya objek dengan massa yang lebih kecil akan bergerak relatif terhadap objek yang massanya lebih besar.

Selain asas kesetaraan, teori relativitas umum juga dibangun dari asas kovariansi umum yang menyatakan bahwa semua sistem koordinat yang digunakan dalam mengungkapkan hukum-hukum fisika sama baiknya dan berlaku sama, serta harus memiliki bentuk yang kovarian [8]. Atas dasar itu, Einstein kemudian merumuskan persamaan medan gravitasi menggunakan ruang-waktu 4 dimensi yang melengkung (ruang Riemann) untuk mendeskripsikan kontribusi materi-energi dalam ruang, yang umumnya dikenal sebagai persamaan medan Einstein.

Dengan menggunakan analisis tensor, diperoleh bentuk umum persamaan medan Einstein sebagai berikut [7,8,10,11]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \ , \tag{2.2}$$

dimana $G_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$, dan κ^2 masing-masing adalah tensor Einstein, tensor energi-momentum yang mendeskripsikan distribusi dalam ruang-waktu 4 dimensi, dan tetapan medan gravitasi Einstein. $R_{\mu\nu}$ merupakan tensor kelengkungan dari geometri ruang yang dikenal sebagai tensor Ricci, yakni:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} \ . \tag{2.3}$$

Adapun R dalam persamaan (2.2) adalah skalar Ricci, dengan $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, dan $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ dalam persamaan (2.3) merupakan simbol Christoffel jenis kedua yang diberikan oleh

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu} \right) , \tag{2.4}$$

dengan $g_{\mu\nu}$ dan $g^{\mu\nu}$ masing-masing adalah tensor metrik dalam bentuk kovarian dan kontravarian. Indeks μ dan ν berjalan dari 1 sampai 3.

Selanjutnya, untuk menentukan nilai dari κ^2, maka persamaan medan Einstein dapat direduksi menjadi hukum gravitasi Newton. Reduksi persamaan medan Einstein dalam limit nonrelativistik dan medan gravitasi lemah serta dalam medan statik akan diperoleh nilai $\kappa^2 = 8\pi G / c^4$ [9], sehingga persamaan medan Einstein secara lengkap dapat dituliskan sebagai

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \ , \tag{2.5}$$

dengan c adalah kecepatan cahaya yang nilainya dalam konsep relativistik dapat dipilih sama dengan 1 ($\hbar = c = 1$).

II.2 Prinsip Aksi Einstein-Hilbert

Selain melalui analisa tensor, persamaan medan Einstein dapat diturunkan kembali dari prinsip aksi yang digagas oleh David Hilbert pada tahun 1915 berdasarkan pekerjaan Einstein sebelumnya, yang kemudian dikenal sebagai aksi Einstein-Hilbert. Perumusan medan Einstein dengan aksi Einstein-Hilbert akan dapat diperoleh hubungan sistematis antara tensor energi-momentum dengan Lagrangian materi [8]. Dimana Lagrangian materi ini sangat ampuh dalam menjabarkan dinamika dan energi sistem serta dapat dipahami dengan baik.

Dalam mekanika klasik benda titik, besaran aksi merupakan integral dari Lagrangian sistem terhadap waktu, yang dinyatakan sebagai

$$S = \int \mathrm{L}\, dt \ . \tag{2.6}$$

Sedangkan dalam teori medan klasik yang merupakan generalisasi dari mekanika benda titik, yaitu dengan mengambil banyaknya titik-titik menjadi tak berhingga sehingga variabel-variabel yang digunakan adalah variabel kontinu dalam ruang-waktu, yang kemudian dinyatakan sebagai rapat Lagrangian $\mathcal{L}$, dimana $\mathcal{L} = d\mathrm{L}/dV$, maka besaran aksi dapat dituliskan menjadi [9]

$$S = \int \mathcal{L}\ dVdt = \int \sqrt{-g}\,\mathcal{L}\, d^4x \ \ , \tag{2.7}$$

dengan $\sqrt{-g}\, d^4x$ adalah integral ruang-waktu 4D, dimana $\sqrt{-g}$ merupakan Jacobian ruang-waktu yang diperoleh dari penggabungan komponen ruang $dV = J(x^i)d^3x$ dengan komponen waktu dt atau dx^0 ($x^0 \equiv ct$, dengan $c = 1$). Sedangkan tanda negatif disisipkan untuk menjamin agar nilainya selalu positif karena dalam limit medan lemah, tensor metrik menuju metrik Minkowski yang mempunyai determinan -1 [8].

Lagrangian dan rapat Lagrangian adalah skalar, dimana rapat Lagrangian dalam aksi Einstein-Hilbert merupakan rapat Lagrangian gravitasi ditambahkan dengan rapat Lagrangian materi sebagai sumber dari gravitasi. Rapat Lagrangian dalam aksi Einstein-Hilbert dapat dituliskan sebagai [8]

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa^2} - \mathcal{L}_M \quad , \tag{2.8}$$

dengan $\mathcal{L}_G \equiv R/2\kappa^2$ adalah rapat Lagrangian gravitasi dan $\mathcal{L}_M$ adalah rapat Lagrangian materi sebagai sumber gravitasi. Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.7) maka aksi Einstein-Hilbert dapat dituliskan menjadi

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \mathcal{L}_M \right) d^4x \quad . \tag{2.9}$$

Berdasarkan prinsip aksi Hamilton, variasi dari suatu aksi haruslah sama dengan nol [7]. Jadi variasi dari aksi Einstein-Hilbert dapat dituliskan sebagai.

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= 0 = \delta \int \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \mathcal{L}_M \right) d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\, R\right) - \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_M\right) \; . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Selanjutnya, dengan meninjau terlebih dahulu integrasi pada suku pertama dari variasi aksi Einstein-Hilbert pada persamaan (2.10) yang memberikan persamaan

$$\begin{aligned} \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\, R\right) &= \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\left(\delta R_{\mu\nu}\right) + \int d^4x\, R_{\mu\nu}\, \delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) \; . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jika menggunakan teorema Gauss, maka integral dari $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ pada suku pertama persamaan (2.11) akan lenyap karena berubah menjadi integral permukaan yang variasinya adalah nol [8]. Sehingga yang tersisa adalah integral suku kedua pada persamaan (2.11) yang jika diuraikan akan diperoleh

$$\int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g} R\right) = \int d^4x \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\left(\delta g^{\mu\nu}\right) + \int d^4x\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\left(\delta\sqrt{-g}\right) \; . \tag{2.12}$$

Relasi dari variasi daterminan metrik $\delta\sqrt{-g}$ pada suku kedua persamaan (2.12) adalah [8, 9]

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad . \tag{2.13}$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.19) ke dalam persamaan (2.12), maka integrasi suku pertama dari variasi aksi Einstein-Hilbert (2.11) diperoleh

$$\begin{aligned} \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= \int d^4x\sqrt{-g}\, \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \tag{2.14}$$

dimana $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R$ adalah tensor Einstein dalam bentuk kovarian.

Selanjutnya ditinjau rapat Lagrangian materi pada integrasi suku kedua persamaan (2.10), dan mengingat bahwa Lagrangian merupakan fungsi dari posisi dan turunan pertamanya, $\mathcal{L}_M \equiv \mathcal{L}_M\left(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{,\alpha}\right)$, [8,12,13] maka integrasi suku kedua pada persamaan (2.10) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \delta\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M\right) &= \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\,\delta g^{\mu\nu}_{,\alpha} \\ &= \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\,\partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu}) \quad . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Jika ditinjau kembali aturan diferensial parsial pada suku kedua persamaan (2.15), maka persamaan (2.15) dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} \delta\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M\right) = &\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right]\right\}\delta g^{\mu\nu} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\,(\delta g^{\mu\nu})\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Mengacu pada persamaan Hamilton untuk variasi dari suatu aksi stasioner, maka suku kedua dari persamaan (2.16) menjadi lenyap atau sama dengan nol, sehingga persamaan (2.16) dapat dituliskan menjadi

$$\delta\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M\right) = \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}\,. \qquad (2.17)$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (2.17) dan (2.14) ke dalam persamaan (2.10), dan mengambil variasi total dari aksi Einstein-Hilbert, $\delta S_{EH} = 0$, maka variasinya dapat dituliskan menjadi

$$\int\left\{G_{\mu\nu} - \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right)\right]\right\}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x = 0\,. \qquad (2.18)$$

Dari persamaan (2.18) dan relasinya pada persamaan (2.14), dapat diperoleh persamaan medan gravitasi Einstein (Lampiran B)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}\quad, \qquad (2.19)$$

dengan $T_{\mu\nu}$ tidak lain adalah tensor energi-momentum yang dapat dituliskan sebagai

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right)\right]\,. \qquad (2.20)$$

Tensor energi-momentum pada persamaan (2.20) di atas merupakan sajian eksplisit untuk setiap medan materi selain gravitasi [10,11,13]. Dari persamaan (2.20) juga dapat diperoleh,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \qquad (2.21)$$

Dimana sajian tersebut merupakan bentuk yang lebih sederhana untuk tensor energi-momentum dalam bentuk kovarian, dimana $T_{\mu\nu}$ memuat dinamika suatu materi, mulai dari persamaan gerak, energi momentum dan posisi [10,11,13].

II.3 Teori Gravitasi $f(R)$

Teori gravitasi $f(R)$ adalah perluasan dari teori relativitas umum Einstein yang diturunkan dari variasi aksi Einstein-Hilbert untuk medan gravitasi linear dalam skalar kurvatur Ricci R. Teori gravitasi $f(R)$ diperkenalkan pada tahun 1970-an sebagai teori alternatif untuk menjelaskan pengamatan materi gelap dan energi gelap. Dalam merumuskan teori gravitasi $f(R)$, ada beberapa formalisme yang dapat digunakan. Namun, dalam penelitian ini formalisme yang akan digunakan adalah formalisme metrik yang hanya bergantung terhadapat tensor metrik $g_{\mu\nu}$. Untuk keperluan kajian dalam teori gravitasi $f(R)$, dapat dimulai dari aksi [19-22]

$$S = S_g(g_{\mu\nu}) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi) \tag{2.22}$$

Apabila suku aksi gravitasi ditulis dalam bentuk gravitasi $f(R)$. Maka persamaan (2.22) menjadi

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{f(R)}{2\kappa^2}\right) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi) \tag{2.23}$$

dimana S_g adalalah aksi gravitasi dan S_m sebagai aksi materi. Variasi aksi dalam formalisme ini hanya bergantung terhadap tensor metrik $g_{\mu\nu}$.