PRINSIP KETIDAKPASTIAN PADA FUNGSI AMBIGUITI KANONIK LINEAR

Tesis

Disusun oleh:

St. Nurhilmah Busrah
H022221006

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

PRINSIP KETIDAKPASTIAN PADA FUNGSI AMBIGUITI KANONIK LINEAR

UNCERTAINTY PRINCIPLES FOR LINEAR CANONICAL AMBIGUITY FUNCTION

ST. NURHILMAH BUSRAH

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PRINSIP KETIDAKPASTIAN PADA FUNGSI AMBIGUITI KANONIK LINEAR

UNCERTAINTY PRINCIPLES FOR LINEAR CANONICAL AMBIGUITY FUNCTION

ST. NURHILMAH BUSRAH

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TESIS

PRINSIP KETIDAKPASTIAN PADA FUNGSI AMBIGUITI KANONIK LINEAR

ST. NURHILMAH BUSRAH

NIM: H022221006

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 29 September 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19701231 199802 1 001	NIP. 19680803 199202 1 001
Ketua Program Studi Matematika S2	Dekan Fakulras MIPA Universitas Hasanuddin
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**
NIP. 19640207 199103 1013	NIP. 19720515 1997 02 1002

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan dibawa ini

Nama	: St. Nurhilmah Busrah
Nomor Mahasiswa	: H022221006
Program Studi	: Magister Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atau perbuatan tersebut.

Makassar, 2 Oktober 2023

Yang menyatakan

St. Nurhilmah Busrah

UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillahirrahmanirrahim. Sungguh luar biasa nikmat yang telah diberikan Allah *Subhanahu wa Ta'ala* sehingga sudah sepatutnya untuk berucap puji dan syukur kepada-Nya. Berkat rahmat dan karunia-Nya pula sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wasallam* beserta keluarga, dan para sahabat.

Tesis dalam judul "**Prinsip Ketidakpastian pada Fungsi Ambiguiti Kanonik Linear**" ini disusun sebagai persyaratan dalam memperoleh gelar Magister pada Program Pascasarjana Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Hasanuddin. Selama proses penyusunan tesis ini, penulis menemukan banyak hambatan dan tantangan, tetapi penulis menyadari bahwa dengan keikhlasan, kesungguhan, usaha, dan doa maka akan membawa penulis menuju kemudahan dalam penyelesaian tesis ini.

Dengan selesainya tesis ini, penulis mengucapkan banyak terima kasih yang tak terhingga serta rasa hormat yang luar biasa kepada kedua orangtua penulis tercinta Ayahanda Alm. **Bahar Usman** dan Ibunda **Kulau Kuba** untuk setiap doa, bimbingan, motivasi, dan pembelajaran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini dengan baik. Pula, untuk adik tercinta **Ahmad Nur Hilman Busrah**, yang selalu memberikan semangat, dukungan, serta doa. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang mendalam dengan segala kerendahan dan ketulusan hati kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si.M. Si.** dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing atas kesediaaan waktu dan kesabaran serta dengan penuh keikhlasan memberikan dukungan, arahan, motivasi, dan membimbing penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si.**, Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku dosen penguji atas segala bentuk bimbingan, saran, dan arahan, yang diberikan kepada penulis dalam penyelesaian tesis ini.
3. **Seluruh dosen** dan **staff** Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah banyak memberikan bekal ilmu, bantuan, dan arahan dalam pengurusan administrasi.
4. Teman-teman **Lab. Analisis**, kak **Nas**, kak **Afdal**, kak **Topan**, Bu **Sri**, Bu **Uni**, **Imanuel**, **Ifa**, **Ajeng**, kak **Ulil**, dan terkhusus **Fitri** yang telah banyak memberikan motivasi, dukungan, dan bantuan kepada penulis selama penyelesaian tesis.
5. Teman-teman **Pascasarjana Matematika 2022-1** atas segala bentuk dukungan, bantuan, dan kebersamaan.

6. Seluruh pihak yang terlibat, membantu, dan mendukung penulis yang tidak sempat disebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu semua jenis saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat dan memberikan wawasan tambahan bagi para pembaca dan khususnya bagi penulis sendiri.

Makassar, 20 September 2023

St. Nurhilmah Busrah

ABSTRAK

Prinsip ketidakpastian merupakan salah satu kajian dari transformasi Fourier yang berkembang pesat karena penerapannya dalam berbagai transformasi. Penelitian ini membahas tentang fungsi ambiguiti kanonik liniar. Transformasi ini diperoleh dengan menggabungkan fungsi ambiguiti klasik dan transformasi kanonik liniar. Selanjutnya akan ditunjukkan relasi antara transformasi Fourier dengan fugsi ambiguiti kanonik linear. Kemudian akan dibuktikan secara rinci prinsip ketidakpastian Nazarov dan Pitt untuk transformasi yang diusulkan dengan dengan menggunakan relasi yang diperoleh.

Kata Kunci: fungsi ambiguiti kanonik linear, prinsip ketidakpastian, ketaksamaan Nazarov, ketaksamaan Pitt.

ABSTRACT

The uncertainty principle is a fundamental result of the Fourier transform and is currently one of the most rapidly developing areas of mathematics due to its application in various transformations. This paper deals with the linear canonical ambiguity function. It combines the classical ambiguity function and the linear canonical transform. We derive in detail various uncertainty principles related to the proposed transformation.

Keywords: linear canonical ambiguity function, uncertainty principle, Nazarov inequality, Pitt's inequality.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan adalah aspek penting dalam perkembangan kehidupan dan peradaban, tak terkecuali untuk ilmu matematika. Menurut asal katanya matematika berarti ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan berpikir/bernalar Matematika menekankan kegiatan dalam dunia rasio karena terbentuk dari pikiran-pikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran. Dasar ilmu matematika bersumber dari pemikiran tokoh-tokoh terdahulu dan kemudian menjadi pondasi untuk setiap penemuan matematika. Karena dengan itu, para matematikawan dapat mencari berbagai pola, merumuskan konjektur baru, dan membangun kebenaran melalui metode deduksi yang kaku dari aksioma-aksioma dan definisi-definisi yang bersesuaian (Wiriani W.T., 2021). Maka tidak dapat dipungkiri bahwa ilmu matematika akan selalu mengalami banyak perkembangan, salah satunya di bidang transformasi.

Josep Fourier (1768-1830) adalah seorang matematikawan sekaligus fisikawan asal Perancis yang pertama kali memperkenalkan transformasi Fourier. Fourier mendefinisikan transformasi Fourier dari deret Fourier yang berbentuk kompleks (eksponensial Fourier), yaitu fungsi periodik dengan periode mendekati tak hingga. Transformasi Fourier (TF) merupakan sebuah metode atau kakas (tool) untuk mengubah suatu sinyal dalam kawasan waktu menjadi kawasan frekuensi. Setelah sinyal berada dalam kawasan frekuensi dan diolah, sinyal dapat dikembalikan menjadi kawasan waktu kembali. Transformasi Fourier mengalami perkembangan yang sangat pesat dan banyak diaplikasikan di berbagai bidang, diantaranya bidang elektronika, zat mampat, mekanika struktur, mekanika gelombang, dan mekanika kuantum (Rahmah S., 2022).

Transformasi kanonik liniar (TKL) adalah transformasi integral liniar dengan tiga parameter bebas yang memiliki banyak aplikasi di beberapa bidang, termasuk pemrosesan sinyal dan optik. Hal ini dapat dilihat sebagai perluasan dari banyak transformasi seperti transformasi Fourier, transformasi Laplace, transformasi Fourier fraksional, transformasi Fresnel, dan transformasi lainnya. Banyak sifat dari transformasi ini yang telah diteliti, termasuk pergeseran, modulasi, dan prinsip ketidakpastian (Bahri M. et al., 2017).

Beberapa tahun terakhir ini telah banyak penelitian yang diusulkan tentang generalisasi dari berbagai macam transformasi dengan menggunakan transformasi kanonik linear. Ini menunjukkan bahwa transformasi kanonik linear ini mengalami perkembangan yang sangat pesat. Zhao J. et al. (2009) dalam penelitiannya telah membangun prinsip ketidakpastian pada transformasi kanonik linear. Bai R. et al. (2012) dan Song Y. et al. (2014) dalam penelitiannya menyajikan distribusi Wigner-Ville yang terkait dengan transformasi kanonik linier. Kemudian Li Y. et al. (2014) mengkaji lebih lanjut secara rinci beberapa ketaksamaan yang terkait dengan transformasi tersebut.

Di sisi lain, citet5 dan Bahri M. (2022) dalam penelitiannya menyajikan perluasan dari transformasi Fourier windowed ke transformasi kanonik linear yang kemudian disebut sebagai transformasi kanonik liniar windowed. Sifat-sifat dan prinsip ketidakpastian dari transformasi tersebut juga diselidiki.

Beberapa penelitian memperkenalkan suatu transformasi yaitu fungsi ambiguiti kanonik linear (FAKL). Penelitian oleh Tian-Wen et al. (2012) mempelajari tentang transformasi ini, yang merupakan generalisasi dari fungsi ambiguiti dalam ruang transformasi kanonik linear. Transformasi tersebut diperoleh dengan mengganti kernel Fourier menjadi kernel transformasi kanonik linear di dalam definisi fungsi ambiguiti. Lebih lanjut, Bahri M. et al (Bahri M. et al., 2017) dalam penelitiannya membangun beberapa sifat dan penerapan dari transformasi ini. Namun dalam penelitian-penelitian tersebut belum ada yang mengkaji mengenai prinsip ketidakpastian terkait dengan transformasi umum ini.

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam penelitian ini akan dikaji lebih lanjut tentang fungsi ambiguiti kanonik linear (FAKL), dalam hal ini akan dibangun beberapa teorema prinsip ketidakpastian yang terkait dengan fungsi ambiguiti kanonik linear.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti kanonik linear?
2. Bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Nazarov pada fungsi ambiguiti kanonik linear dengan menggunakan relasi antara transformasi

Fourier dengan fungsi ambiguiti kanonik linear?

3. Bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Pitt pada fungsi ambiguiti kanonik linear dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti kanonik linear?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Menentukan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti kanonik linear.
2. Membuktikan ketaksamaan Nazarov pada fungsi ambiguiti kanonik linear dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti kanonik linear.
3. Membuktikan ketaksamaan Pitt pada fungsi ambiguiti kanonik linear dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti kanonik linear.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus literatur tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Fourier, khususnya pada prinsip-prinsip ketidakpastian fungsi ambiguiti kanonik linear.

1.5 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini definisi transformsi kanonik linear yang digunakan untuk memperoleh fungsi ambiguiti kanonik linear yaitu definisi untuk $b \neq 0$. Adapun prinsip ketidakpastian yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah ketaksamaan Nazarov dan ketaksamaan Pitt pada fungsi ambiguiti kanonik linear.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah yang digunakan sebagai teori pendukung dalam penyelesaian penelitian ini diantaranya, bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, ruang lebesgue, transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, fungsi ambiguiti, transformasi kanonik linear, dan fungsi ambiguiti kanonik linear.

2.1 Ruang Lebesgue

Pendefinisan $L^p(\mathbb{R})$ dibagi menjadi dua bagian, yaitu untuk $1 \leq p < \infty$ dan $p = \infty$. Namun, pada subbab ini, akan didefinisikan ruang $L^p(\mathbb{R})$ hanya untuk $1 \leq p < \infty$.

2.1.1 Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan nilai mutlaknya dapat diintegralkan.

Definisi 2.1.1 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$)**.** *Ruang $L^1(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f dengan mutlak dari fungsinya terintegralkan pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty \right\} \tag{2.1}$$

(Rusdin et al., 2013).

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt. \tag{2.2}$$

Contoh 1. *Misalkan $f(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan apakah fungsi f tersebut termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.*

Solusi 1. *Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan* (2.1)*, diperoleh*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-|t|} \right| dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} e^{t} dt + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-t} dt \\
&= \lim_{a\to\infty} e^{t}\Big|_{-a}^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-t}\Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to\infty} (1 - e^{-a}) - \lim_{a\to\infty} (e^{-b} - 1) \\
&= 1 - 0 - 0 + 1 \\
&= 2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2. *Misalkan* $f(t) = \begin{cases} 1, & -2 < t < 2 \\ 0, & t\, selainnya. \end{cases}$

Akan ditunjukkan apakah fungsi f tersebut termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$.

Solusi 2. *Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan* (2.1)*, diperoleh*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt &= \int_{-\infty}^{-2} 0\, dt + \int_{-2}^{2} |1|\, dt + \int_{2}^{-\infty} 0\, dt \\
&= 0 + t\Big|_{-2}^{2} + 0 \\
&= 4 < \infty.
\end{aligned}
$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2.1.2 Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$

Definisi 2.1.2 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$)**.** *Ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f dengan mutlak berpangkat dua dari fungsinya terintegralkan pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$
L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \tag{2.3}
$$

(Rusdin et al., 2013).

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$
\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}
$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product $\langle .,. \rangle$ dengan aturan jika $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt, \tag{2.5}$$

dengan normanya ditulis sebagai

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \tag{2.6}$$

Contoh 3. *Misalkan* $f(t) = e^{-|t|}$,$t \in \mathbb{R}(-\infty < t < \infty)$.
Akan ditunjukkan apakah fungsi f *tersebut termasuk dalam ruang fungsi* $L^2(\mathbb{R})$.

Solusi 3. *Berdasarkan definisi ruang* $L^2(\mathbb{R})$ *pada persamaan* (2.3)*, diperoleh*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-|t|}\right)^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(e^{t}\right)^2 dt + \int_{0}^{\infty} \left(e^{-t}\right)^2 dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} \left(e^{t}\right)^2 dt + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \left(e^{-t}\right)^2 dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} e^{2t} dt + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-2t} dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_{-a}^{0} + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2a}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - 0 - 0 + \frac{1}{2} \\
&= 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

2.1.3 Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan pangkat p dari nilai mutlaknya dapat diintegralkan.

Definisi 2.1.3 (Ruang $L^p(\mathbb{R})$)**.** *Misalkan* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *adalah fungsi terukur bernilai real. Ruang* $L^p(\mathbb{R})$ *didefinisikan sebagai koleksi kelas fungsi dari fungsi-fungsi terukur dengan mutlak berpangkat* p *untuk* $1 \leq p < \infty$ *dari fungsinya* *terintegralkan pada $\mathbb{R}$, yaitu*

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt < \infty \right\} \tag{2.7}$$

(Peetre J., 1969).

Adapun norma dari f dalam $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty. \tag{2.8}$$

2.2 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan bentuk kontinu dari deret Fourier. Transformasi Fourier adalah transformasi integral linier yang mengubah suatu sinyal dari domain waktu (space domain) menjadi domain frekuensi (frequency domain). Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal.

Dalam membahas transformasi Fourier digunakan notasi $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\})(\omega)$. Operasi Fourier $\mathcal{F}$ dianggap sebagai domain dan rangenya merupakan ruang fungsi bernilai kompleks yang terdefinisi pada bilangan real. Input dari $\mathcal{F}$ adalah sebuah fungsi $f(t)$ dan menghasilkan output berupa fungsi lain $\hat{f}(\omega)$.

Definisi 2.2.1 (Transformasi Fourier)**.** *Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ terdefinisi pada $\mathbb{R}$, transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\hat{f}(\omega)$ dan didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.9}$$

Dalam hal ini, $i^2 = -1$ merupakan satuan imajiner dan faktor perkalian dari fungsi eksponensial $e^{-i\omega t}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \tag{2.10}$$

maka persamaan (2.9) diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos \omega t - i \sin \omega t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos \omega t dt - i \int_{\mathbb{R}} f(t)\sin \omega t dt \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ berada di $L^2(\mathbb{R})$ sehingga transformasi Fourier dapat diperluas ke $L^2(\mathbb{R})$.

Contoh 4. *Diketahui fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ sebagai berikut.*

$$f(t) = \begin{cases} 3, & untuk -1 < t < 1 \\ 0, & untuk\ t\ selainnya \end{cases},$$

akan dicari transformasi Fourier dari fungsi f di atas.

Solusi 4.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{-1} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{1}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= 0 + \int_{-1}^{1} 3e^{-i\omega t}dt + 0 \\
&= 3\int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt \\
&= -\frac{3}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{3}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) \\
&= \frac{6}{\omega}\sin\omega.
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{6}{\omega}\sin\omega$.

Contoh 5. *Diketahui fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ sebagai berikut.*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & untuk\, t \geq 0 \\ 0, & untuk\, t < 0 \end{cases},$$

akan dicari transformasi Fourier dari fungsi f di atas.

Solusi 5.

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \int_0^\infty e^{-t} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(1+i\omega)t} dt \\
&= -\frac{1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)t} \Big|_0^\infty \\
&= 0 + \frac{1}{1+i\omega} \\
&= \frac{1}{1+i\omega}.
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$.

Definisi 2.2.2 (Invers Transformasi Fourier)**.** *Misalkan fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\mathcal{F}\{f\}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$*, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai*

$$
f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.12}
$$

2.3 Sifat-sifat Transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier diantaranya sebagai berikut (Rusdin et al., 2013):

Teorema 2.3.1 (Sifat penjumlahan)**.** *Jika* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $\omega \in \mathbb{R}$*, maka berlaku*

$$
\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.13}
$$

Teorema 2.3.2 (Sifat linear)**.** *Jika* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $\omega \in \mathbb{R}$*, maka berlaku*

$$
\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega), \tag{2.14}
$$

dengan α, β *merupakan dua konstanta kompleks.*

Teorema 2.3.3 (Sifat translasi)**.** *Misalkan* $f(t)$ *adalah fungsi yang digeser oleh* $t_0 \in \mathbb{R}$ *yaitu* $f_0(t) = f(t - t_0)$*, maka*

$$
\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.15}
$$

Teorema 2.3.4 (Sifat modulasi)**.** *Misalkan* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\omega_0 \in \mathbb{R}$*. Jika* $h(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$*, maka*

$$
\mathcal{F}\{h\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{2.16}
$$

Teorema 2.3.5 (Sifat skalar)**.** *Misalkan diberikan fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ *dan misal* $f_\alpha(t) = f(\alpha t)$ *maka*

$$\mathcal{F}\{f_\alpha\}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \tag{2.17}$$

Akibatnya, misal diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ *dengan* $f_\alpha(t) = f(-t)$ *maka transformasi Fourier dari* f_α *yaitu*

$$\mathcal{F}\{f_\alpha\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(-\omega). \tag{2.18}$$

Teorema 2.3.6 (Sifat konjugasi)**.** *Misalkan* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $\omega \in \mathbb{R}$, *maka*

$$\mathcal{F}\{\overline{f}\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{f\}}(-\omega). \tag{2.19}$$

2.4 Transformasi Kanonik Linear

Definisi 2.4.1 (TKL)**.** *Misal diberikan matriks* $A = (a, b, c, d) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *dengan* $\det(A) = ad - bc = 1$. *Transformasi kanonik linear dari* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *didefinisikan sebagai*

$$F_A = L_A\{f\}(\omega) \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x)K_A(x,\omega)dx, & b \neq 0 \\ \sqrt{d}e^{i\left(\frac{cd}{2}\omega^2\right)} f(d\omega), & b = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

dengan $K_A(x, \omega)$ *disebut sebagai fungsi kernel dari transformasi kanonik linear, ditulis*

$$K_A(x,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}x\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{2.21}$$

(Bahri M. et al., 2017).

Selanjutnya invers dari transformasi kanonik linear diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} L_A\{f\}(\omega)K_{A^{-1}}(x,\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{\mathbb{R}} L_A\{f\}(\omega)e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}x\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)}d\omega, \end{aligned} \tag{2.22}$$

dengan invers matriks A dinotasikan sebagai A^{-1} dan $A^{-1} = (d, -b, -c, a)$. Adapun rumus Parseval dari transformasi kanonik linear ditulis sebagai

$$\langle f, g\rangle = \langle L_A(f), L_A(g)\rangle, \tag{2.23}$$

untuk setiap $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Khusus untuk $f = g$ diperoleh rumus Plancherel untuk transformasi kanonik linear yaitu

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(L_A(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.24}$$

2.5 Fungsi Ambiguiti

Definisi 2.5.1 (FA)**.** *Misal diberikan dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Fungsi ambiguiti dari f dan g didefinisikan sebagai*

$$A_{f,g}(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-i\omega x} dx \tag{2.25}$$

(Bahri M. et al., 2017).

Beberapa sifat dasar dari fungsi ambiguiti dirangkum sebagai berikut. Misalkan lambang τ_a adalah operator translasi yang didefinisikan sebagai $\tau_k f(x) = f(x - k)$, dan $\mathbb{M}_{\omega_0}$ adalah operator modulasi yang didefinisikan sebagai $\mathbb{M}_{\omega_0} f(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$. Maka sifat-sifat berikut berlaku (Bahri M. et al., 2017):

1. Konjugasi kompleks

$$\overline{A_{f,g}(t, \omega)} = A_{g,f}(-t, -\omega). \tag{2.26}$$

2. Sifat translasi

$$A_{\tau_k f, \tau_k g}(t, \omega) = e^{-i\omega_0 k} A_{f,g}(t, \omega). \tag{2.27}$$

3. Sifat modulasi

$$A_{\mathbb{M}_{\omega_0} f, \mathbb{M}_{\omega_0} g}(t, \omega) = e^{-i\omega_0 x} f(x) A_{f,g}(t, \omega - \omega_0). \tag{2.28}$$

4. Formula Moyal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A_{f_1,g_1}(t, \omega) \overline{A_{f_2,g_2}(t, \omega)} dt d\omega = (f_1, f_2) \overline{(g_1, g_2)}. \tag{2.29}$$

5. Sifat invers

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \overline{g(0)}} \int_{\mathbb{R}} A_{f,g}\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.30}$$

dengan $\overline{g(0 \neq 0)}$.

2.6 Fungsi Ambiguiti Kanonik Linear

Berdasarkan definisi transformasi kanonik linear (TKL) dan definisi fungsi ambiguiti (FA) yang terkait dengan transformasi Fourier (TF) seperti yang diuraikan pada subbab sebelumnya, maka diperoleh definisi fungsi ambiguiti kanonik linier (FAKL) dengan mengganti kernel transformasi Fourier dengan kernel transformasi kanonik linear dalam definisi fungsi ambiguiti.

Definisi 2.6.1 (FAKL). *Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Fungsi ambiguiti kanonik linier didefinisikan sebagai*

$$\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}x\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dx \tag{2.31}$$

(Bahri M. et al., 2017).

Perhatikan kembali kernel dari TKL dengan parameter A yaitu $K_A(\omega, x)$ yang didefenisikan pada persamaan (2.21). Maka persamaan (2.31) dapat ditulis kembali

$$\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{f,g}(x,t) K_A(\omega, x) dx, \tag{2.32}$$

dengan

$$h_{f,g}(x,t) = f\left(x+\frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)}. \tag{2.33}$$

Jika $f = g$, maka $A^A_{f,f}(t,\omega) = A^A_f(t,\omega)$, persamaan ini disebut fungsi ambiguiti kanonik linear auto.

Teorema 2.6.1. *Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka berlaku*

$$|\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega)|^2 \leq \frac{1}{2\pi|b|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\overline{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.34}$$

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega)|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}x\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi|b|} \left| \int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}x\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi|b|} \left| \int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)} dx \right|^2
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi|b|}\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x+\frac{t}{2}\right)\overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)}\right|^2 dx. \tag{2.35}$$

Berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Scwarzs, maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega)|^2 \leq& \frac{1}{2\pi|b|}\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x+\frac{t}{2}\right)\right|^2 dx\int_{\mathbb{R}}\left|\overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)}\right|^2 dx\\ =&\frac{1}{2\pi|b|}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^2dy\int_{\mathbb{R}}|\overline{g(y)}|^2dy. \end{aligned}\tag{2.36}$$

Berdasarkan rumus norma dari f dalam $L^p(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.8), didapatkan

$$|\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega)| \leq \frac{1}{2\pi|b|}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\overline{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.37}$$

Dengan demikian Teorema (2.6.1) terbukti. □

Contoh 6. *Diketahui fungsi f sebagai berikut.*

$$f(t) = e^{-t^2}$$

akan dicari fungsi ambiguiti kanonik linear dari fungsi f di atas.

Solusi 6. *Berdasarkan persamaan* (2.31)*, maka dapat diperoleh sebagai berikut.*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{t}{2}\right)\overline{g\left(x-\frac{t}{2}\right)}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2-\frac{2}{b}x\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x+\frac{t}{2}\right)^2}\overline{e^{-\left(x-\frac{t}{2}\right)^2}}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2-\frac{2}{b}x\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x+\frac{t}{2}\right)^2}e^{-\left(x-\frac{t}{2}\right)^2}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2-\frac{2}{b}x\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(2x^2+\frac{1}{2}t^2\right)}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2-\frac{2}{b}x\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2-\frac{2}{b}x\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2b}(4b+ia)x^2}e^{-i\frac{\omega}{b}x}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{1}{2}t^2}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2b}(4b+ia)x^2}e^{-i\frac{\omega}{b}x}dx\end{aligned}$$

Dengan mengaplikasikan transformasi Fourier dari fungsi Gaussian (Bahri M. &

Zulfajar R. A., 2014), yaitu

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-kx^2} e^{-i\omega x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}, \quad k > 0, \tag{2.38}$$

maka dari persamaan (2.38)*, dapat diperoleh*

$$\mathcal{A}^A_{f,g}(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2b}(4b+ia)}} e^{-\frac{\left(\frac{\omega}{b}\right)^2}{\frac{2}{b}(4b+ia)}}. \tag{2.39}$$

2.7 Prinsip Ketidakpastian pada Transformasi Fourier

Dalam kehidupan sehari-hari, menghitung kecepatan dan posisi benda bergerak relatif mudah. Akan tetapi dalam dunia partikel kuantum, membuat perhitungan ini tidak mungkin disebabkan suatu hubungan matematis yang disebut prinsip ketidakpastian. Prinsip ketidakpastian adalah hasil matematis yang memberikan batasan pada lokalisasi simultan dari suatu fungsi dan transformasi Fouriernya. Berikut beberapa teorema Prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier.

2.7.1 Ketaksamaan Nazarov

Teorema 2.7.1. *Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan P, Q adalah dua himpunan bagian terukur dari $\mathbb{R}$, maka terdapat bilangan konstan $C > 0$ sedemikian sehingga*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq Ce^{|P||Q|} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus P} |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}\setminus Q} |\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)|^2 d\omega \right), \tag{2.40}$$

dimana $|P|$ dan $|Q|$ Lebesgue measure P dan Q (Jaming P., 2007).

2.7.2 Ketaksamaan Pitt

Ruang Schwartz adalah ruang fungsi dari semua fungsi yang turunannya menurun dengan cepat. Dalam hal ini, ruang Schwartz merupakan ruang untuk fungsi-fungsi f dengan f kontinu dan setiap turunan $f^{(q)}$ (q adalah orde turunan) untuk setiap $q \in \mathbb{N}$ ada dan berkelanjutan. Ruang ini mempunyai sifat penting bahwa transformasi Fourier merupakan automorfisme pada ruang ini. Suatu fungsi dalam ruang Schwartz terkadang disebut fungsi Schwartz. Salah satu Schwartz adalah fungsi Gaussian $f(x) = e^{-ax^2}$.

Teorema 2.7.2. *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dan $0 \leq \alpha < n$, berlaku*

$$\int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|^2 d\omega \leq c_\alpha \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |f(x)|^2 dx, \tag{2.41}$$

dimana

$$c_\alpha = \pi^\alpha \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{4}\right)} \right]^2, \tag{2.42}$$

dengan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ adalah ruang Schwartz pada $\mathbb{R}$ (Beckner W., 1995).