PENENTUAN DIMENSI METRIK SISI TERHADAP GRAF RODA BERKEPALA DUA

SKRIPSI

VIRA ANGGRAENI

H011201070

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2024

PENENTUAN DIMENSI METRIK SISI TERHADAP GRAF RODA BERKEPALA DUA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

VIRA ANGGRAENI
H011201070

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MARET 2024

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

Penentuan Dimensi Metrik Sisi Terhadap Graf Roda Berkepala Dua

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 5 Maret 2024

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 7679ZAKX815316077

Vira Anggraeni
H011201070

PENENTUAN DIMENSI METRIK SISI TERHADAP GRAF RODA BERKEPALA DUA

disetujui oleh:

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.
NIP. 196412311990032007

Pembimbing Pertama

Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.
NIP. 199210062020016001

Pada 5 Maret 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: Vira Anggraeni
NIM	: H011201070
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Penentuan Dimensi Metrik Sisi Terhadap Graf Roda Berkepala Dua

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	( )
Sekretaris	: Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.	( )
Anggota	: Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	( )
Anggota	: Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 5 Maret 2024

HALAMAN PENGESAHAN

DIMENSI METRIK SISI TERHADAP GRAF RODA BERKEPALA DUA

Disusun dan diajukan oleh

VIRA ANGGRAENI
H011201070

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
Pada tanggal, 5 Maret 2024
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.**
NIP. 196412311990032007	**NIP. 199210062020016001**

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP.196804292002121001

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Ucapan puji dan syukur kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala atas segala hidayah, karunia, serta nikmat-Nya lah sehingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Shallallahu 'Alaihi wa Sallam dan para sahabat yang menjadi suri tauladan kita.

Alhamdulillah, skripsi dengan judul "Penentuan Dimensi Metrik Sisi Terhadap Graf Roda Berkepala Dua" ini yang disusun untuk memenuhi syarat dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin dapat dirampungkan.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Maka dari itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan kepada orang tua saya, Ayahanda **Haeruddin** dan Ibunda **Rostina Rahim**, yang dengan penuh kesabaran memberikan banyak kasih sayang, motivasi yang selalu membuat penulis percaya bahwa mampu menyelesaikan skripsi ini dan dukungan serta selalu mendoakan kebaikan kepada penulis. Tak lupa juga kepada saudara/i penulis, **Muh. Fajar Islamy, Dewi Zalsa Fitriani,** dan **Muh. Fadil Akhzani** yang banyak membantu penulis selama proses perkuliahan dan menemani selama ini.

Ucapan Terima Kasih dan Penghargaan juga diberikan kepada:

1. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** Selaku Ketua Departemen Matematika.
2. **Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** dan **Ibu Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si.** selaku pembimbing utama dan pertama, yang dengan sabar dan telah banyak memberikan waktunya dalam membimbing dan membantu penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
3. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** dan **Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.** selaku dosen tim penguji, yang banyak memberikan masukan dalam penyusunan skripsi ini.
4. **Ibu Dra. Nur Erawati, M.Si.** selaku Penasehat Akademik yang selalu memberikan nasehat serta membantu penulis dalam proses perkuliahan.

5. **Seluruh Dosen** dan **Staf Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Unhas** yang telah membantu banyak dan memberikan ilmunya selama masa perkuliahan.
6. **Sayid Agil Husain** yang selalu mendukung, membantu, menasehati, menemani serta selalu siap dan meluangkan waktunya untuk mendengarkan keluhan penulis selama proses penulisan skripsi ini.
7. **Nurfitra Aulia** selaku sahabat penulis yang telah banyak membantu, menghibur, memotivasi, memberi dukungan dan nasihat kepada penulis serta menjadi tempat berkeluh-kesah selama ini.
8. **Wardah Hidayah H, Febi Lestari, Nurhalima, Muhammad Ahnaf Yusuf, Muh Fauzan Hamdani, dan Ahmadi Al Azhar** yang telah banyak membantu dan mendukung penulis selama perkuliahan hingga penyelesaian skripsi ini dan juga memberikan warna selama masa perkuliahan.
9. **Teman Seperjuangan Matematika 2020** khususnya **Ariqah, Adeline, dan Alifia** terima kasih atas kebersamaan dalam suka dan duka selama menjalani masa perkuliahan.
10. **Seluruh teman Hori20ntal dan teman Pengurus Himatika** yang selalu membantu serta memberikan banyak ilmu dan pengalaman selama proses perkuliahan.
11. **Teman-teman KKN Unhas Gel.109** khususnya Posko Desa Ussu Kabupaten Luwu Timur Khususnya **kak veni, ka ifa, kak yayat, kak agil** yang menemani, membantu, dan memberi warna hari-hari selama KKN.
12. **Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu**, terima kasih atas segala dukungan dan partisipasi dalam penyelesaian skripsi ini.
13. **Untuk Vira Anggraeni,** Terima kasih sudah mampu bertahan hingga detik ini dan mampu melewati berbagai macam badai namun tetap memilih tegak dan kuat. Libatkanlah Allah setiap langkahmu agar semua yang kamu pilih di ridhai oleh-Nya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga segala saran dan kritik yang membangun akan diterima dengan baik. Akhir kata, penulis berharap agar tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca. Aamiin.

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMISI

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Vira Anggraeni
Nim	: H011201070
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty-Free Right***) atas karya saya yang berjudul:

Penentuan Dimensi Metrik Sisi Terhadap Graf Roda Berkepala Dua

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada, 5 Maret 2024

Yang menyatakan,

Vira Anggraeni

ABSTRAK

Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik titik. Dimensi Metrik sisi berfokus pada pembahasan konsep jarak antara suatu sisi dengan titik pada graf. Jarak yang dimaksud adalah banyaknya sisi pada lintasan terpendek yang memuat titik yang dimaksud dengan salah satu titik ujung sisi. Dalam penelitian skripsi ini, ditunjukkan bahwa dimensi metrik sisi pada graf roda berkepala dua $dim_E(W_{2,n}) = n + 1$, untuk $n = 3,4$ dan $dim_E(W_{2,n}) = n - 1$, untuk $n \geq 5$.

Kata kunci: *Dimensi metrik sisi, Lintasan, Jarak, Graf roda berkepala dua.*

Judul	:	Penentuan Dimensi Metrik Sisi Terhadap Graf Roda Berkepala Dua
Nama	:	Vira Anggraeni
NIM	:	H011201070
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACT

Edge metric dimension is a development of point metric dimensions. Edge metric dimensions discuss the distance between an edge and a point on a graph. The distance is the number of edges on the shortest path that contains the point in question with one of the edge's endpoints. In this research, it is shown that the edge metric dimension of a two-center wheel graph is $dim_E(W_{2,n}) = n + 1$, for $n = 3,4$ dan $dim_E(W_{2,n}) = n - 1$, for $n \geq 5$.

Keywords: *Edge metric dimension, Path, Distance, Two-center wheel graph.*

Title	:	*Determination of Edge Metric Dimension on A Two-Center Wheel Graphs*
Name	:	*Vira Anggraeni*
Student ID	:	*H011201070*
Study Program	:	*Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika merupakan salah satu alat bantu yang digunakan untuk mencari dan menemukan solusi serta menyederhanakan penyajian dan pemahaman dari suatu masalah. Salah satu konsep dalam ilmu matematika yaitu teori graf. Teori graf digunakan untuk mempresentasikan masalah yang kompleks dengan cara yang lebih sederhana, sehingga mudah untuk dipahami, dianalisis, serta dicari solusinya.

Graf sering digunakan untuk menjelaskan objek diskrit serta hubungan antar objeknya. Objek direpresentasikan sebagai titik dan hubungan antar objek dinyatakan sebagai sebuah garis atau sisi. Hal ini berkaitan erat dengan konsep jarak (metrik). Konsep metrik atau yang lebih dikenal dengan dimensi metrik merupakan topik menarik yang telah banyak diteliti.

Dimensi metrik graf pertama kali di perkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, dan selanjutnya dikaji oleh F. Harary dan R. A. Melter pada tahun 1976. Setelah itu, seiring dengan perkembangannya yang cukup pesat, banyak penelitian yang mengkaji tentang dimensi metrik (Singh dkk., 2021). Terdapat beberapa istilah dalam dimensi metrik, salah satunya adalah himpunan penentu. himpunan penentu *(resolving set)* merupakan himpunan titik pada graf jika setiap titik pada graf tersebut mempunyai representasi jarak yang berbeda dengan himpunan penentu tersebut.

Saat ini, banyak peneliti yang mengkaji tentang dimensi metrik, seperti dimensi metrik lokal (Okamoto dkk., 2010), dimensi metrik kuat (Rahmadi dkk., 2017), dimensi metrik fraksional (Benish dkk., 2018), dan lain sebagainya. Salah satu yang sering dibahas beberapa tahun belakangan ini ialah dimensi metrik sisi *(edge metric dimension)* pada graf. Jika dimensi metrik titik menggunakan konsep jarak antar titik, maka dimensi metrik sisi menggunakan konsep jarak antara sisi dengan titik pada suatu graf. Sama halnya dengan dimensi metrik titik, dimensi metrik sisi juga memiliki himpunan penentu sisi (*edge resolving set*) yang disebut generator metrik sisi *(edge metric generator).* Himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum disebut dimensi metrik sisi yang dilambangkan dengan $dim_E(G)$. (Adawiyah dkk, 2021).

Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 dan pada tahun 1976 oleh Harary dan Melter. Dimensi metrik sisi menjadi salah satu topik pembahasan mengenai jarak dalam graf (Adawiyah & Rafiantika, 2021). Jarak yang dimaksud adalah banyaknya sisi pada lintasan terpendek yang memuat titik yang dimaksud dengan salah satu titik ujung sisi. Konsep awal pada dimensi metrik sisi adalah memilih himpunan penentu sisi seminimum mungkin pada graf G, sedemikian sehingga terdapat representasi jarak yang berbeda dari setiap sisi pada graf G. Dimensi Metrik sisi berfokus pada pembahasan konsep jarak antara suatu sisi dengan titik pada graf. Dimensi metrik sisi pertama kali diperkenalkan oleh Kelenc dkk. (2017) Oleh sebab itu, kajian tentang dimensi metrik sisi terbilang baru di teori graf.

Kelenc dkk. (2018) menemukan dimensi metrik sisi pada graf lintasan adalah 1. Adawiyah dkk. (2020) menemukan dimensi metrik sisi pada graf tangga dan siklus untuk $n \geq 2$ adalah 2. Singh dkk. (2021) menemukan dimensi metrik sisi pada graf *French cycle windmill* adalah $m(n-2)$. Adawiyah dkk. (2020) menemukan dimensi metrik sisi pada graf roda W_n dengan $n \geq 4$ adalah $n-1$. Hal ini menjadi landasan utama dalam pengembangan yang akan dilakukan dalam penelitian ini. Karena, belum adanya penelitian tentang graf roda berkepala dua, maka peneliti tertarik untuk menentukan dimensi metrik sisi pada graf roda berkepala dua $W_{2,n}$ dengan $n \geq 3$.

Dengan demikian, penelitian ini berjudul “Dimensi metrik sisi terhadap graf roda berkepala dua”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana cara menentukan karakteristik sisi-sisi setara pada graf roda berkepala dua.
2. Bagaimana cara menentukan himpunan penentu sisi pada graf roda berkepala dua.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi untuk meneliti dimensi metrik sisi pada graf $W_{2,n}$ untuk $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang di atas, Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk menentukan karakteristik sisi-sisi setara pada graf roda berkepala dua.
2. Untuk menentukan himpunan penentu sisi pada graf roda berkepala dua.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan pada penelitian ini adalah.

1. Berkontribusi dalam mengembangkan ilmu teori graf khususnya dimensi metrik sehingga pada penelitian ini dapat digunakan sebagai referensi oleh peneliti selanjutnya dalam menentukan dimensi metrik sisi pada graf, khususnya pada graf sederhana.
2. Menambah pengetahuan penulis dan pembaca dalam menentukan dimensi metrik sisi pada graf roda berkepala dua.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan membahas tentang konsep dasar graf, graf-graf khusus, serta definisi dimensi metrik sisi. Adapun definisi, notasi dan istilah yang digunakan merujuk pada sumber berupa buku tentang graf oleh Hasmawati (2023) dan Chartrand dan Zhang (2020).

Penelitian ini merupakan karya tulis tentang dimensi metrik sisi pada graf. Oleh karena itu, subbab pertama membahas tentang konsep dasar graf. Subbab ini bertujuan untuk menjelaskan istilah-istilah pada sebuah graf.

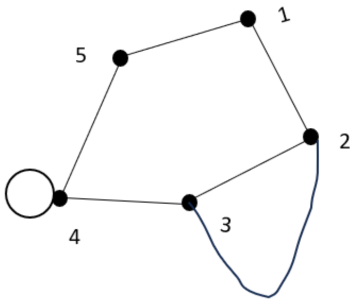
2.1 Konsep Dasar Graf

Definisi 2.1. Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ disebut sisi (*edge*). Definisi ini menegaskan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Graf yang hanya terdiri dari titik tanpa sisi di sebut graf trivial. (Hasmawati,2020)

Titik pada graf dapat diberi label berupa huruf atau angka, seperti a,b,c,…, atau dengan bilangan asli 1,2,3,…, atau gabungan huruf dan bilangan asli. Sedangkan untuk sisi pada graf dapat dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dituliskan dalam notasi uv yaitu sisi yang menghubungkan titik u dan v. Sisi uv dinotasikan dengan e atau e_i. Jadi sisi $e_i = uv$ menyatakan sisi yang menghubungkan titik u dan titik v.

Contoh 2.1. Misalkan graf G memiliki himpunan titik $V(G)$ = {1,2,3,4,5} dan himpunan sisi $E(G)$ = (12,15,23,23,34,44,45}, Maka pasangan himpunan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf karena $V(G)$ adalah himpunan himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah pasangan dari elemen-elemen $V(G)$ yang juga berhingga.

Bentuk graf G dapat di lihat pada gambar di bawah.

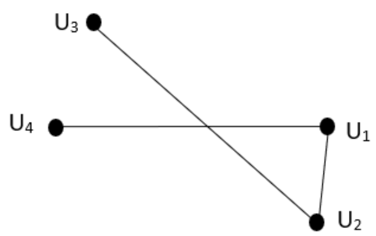


Gambar 2.1 Graf G

Pada Contoh 2.1. dapat disimpulkan bahwa suatu titik dapat bertetangga dengan dirinya sendiri melalui suatu sisi dan sisi tersebut disebut gelang *(loop)* atau sisi dengan satu titik ujung. Selain itu, dua titik berbeda dapat terhubung oleh beberapa sisi, sisi-sisi itu disebut sisi rangkap atau berganda karena sisi-sisinya memiliki dua titik ujung yang sama. Apabila suatu graf tidak memiliki gelang dan sisi rangkap, maka graf tersebut disebut graf sederhana.

Definisi 2.2 Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge)*. (Hasmawati,2020)

Contoh 2.2. Diberikan graf sederhana G dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_2u_3\}$.



Gambar 2.2 Graf G

Definisi 2.3. Derajat dari suatu titik v pada graf G (disimbolkan dengan $deg(v)$) menyatakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik v.

Jika graf G sederhana dan $v \in V(G)$ maka $\deg(v)$ menyatakan kardinalitas $N(v)$. Titik v disebut titik terisolasi jika $deg(v) = 0$ dan titik v disebut titik ujung jika $\deg(v) = 1$. Adapun sisi yang terkait dengan titik ujung disebut sisi pendan. Selain itu, derajat maksimum dari graf G (disimbolkan $\Delta(G)$) merupakan derajat tertinggi dan derajat minimumnya (disimbolkan $\delta(G)$) merupakan derajat terendah dari anggota-anggota $V(G)$. Jika $\Delta(G) = \delta(G)$, maka graf G reguler.

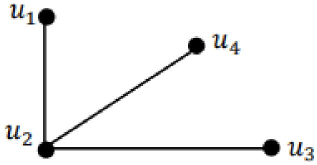
Contoh 2.3. Dari Gambar 2.2. diperoleh $deg\ (u_1)$ = 2, $deg\ (u_2)$ = 2, $deg\ (u_3)$ = 1, $deg\ (u_4)$ = 1. Jadi, $\Delta(G)$= 2 dan $\delta(G)$ = 1 sehingga $\Delta(G) \neq \delta(G)$. Akibatnya, graf tersebut tidak reguler.

Definisi 2.4. Misalkan graf G dengan $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_i : e_i = v_i v_j \text{ } untuk\ suatu\ i, j\}$. Jalan W pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi: $v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$ dengan $e_i = v_i v_j$; $i \in \{0,1,2, \dots, k-1\}$. Jalan W disebut lintasan jika $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \dots, k-1\}$.

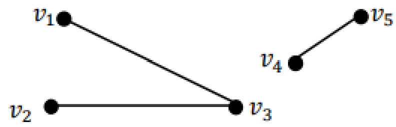
Contoh 2.4. Perhatikan Contoh 2.2. Berdasarkan Definisi 2.4., salah satu lintasan yang terdapat pada graf tersebut adalah $P : u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3$, sedangkan salah satu jalan adalah W: $u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3, u_3u_2, u_2$.

Definisi 2.5. Graf G disebut graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan titik u dan v, $\forall u, v \in V(G)$ Sebaliknya, graf itu tak terhubung.

Contoh 2.5. Diberikan graf G dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G)= \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4\}$ serta graf H dengan $E(H)= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(H)= \{v_1v_3, v_3v_2, v_4v_5\}$. Kedua graf ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.3 Graf G



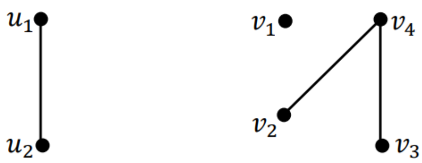
Gambar 2.4 Graf H

Berdasarkan Definisi 2.5. graf G merupakan graf terhubung sebab selalu ada lintasan yang menghubungkan setiap dua titik. Akan tetapi, graf H tak terhubung sebab titik v_1 dan v_4 tidak dihubungkan oleh lintasan manapun.

2.2 Operasi dalam Graf

Definisi 2.6. Graf hasil operasi jumlah (+) antar dua buah graf, sebut graf G dan graf H (dinotasikan $G + H$) memiliki $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}$.

Contoh 2.6. Diberikan graf G dan H dengan $V(G) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2\}$ serta $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{v_2v_4, v_3v_4\}$. Berikut gambarnya.



Gambar 2.5 (a) Graf G dan (b) Graf H

Graf $G + H$ memiliki,

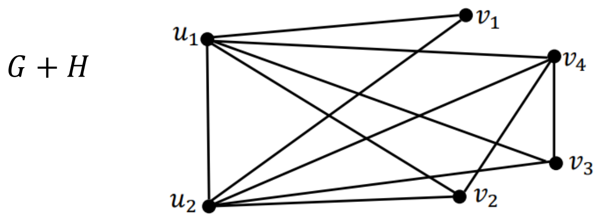
$V(G + H) = V(G) \cup V(H) = \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}$.

$= \{u_1u_2\} \cup \{v_2v_4, v_3v_4\} \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4\}$

$= \{u_1u_2, v_2v_4, v_3v_4, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4\}$

Graf $G + H$ tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.6 Hasil operasi penjumlahan graf G dan H

2.3 Graf-Graf Khusus

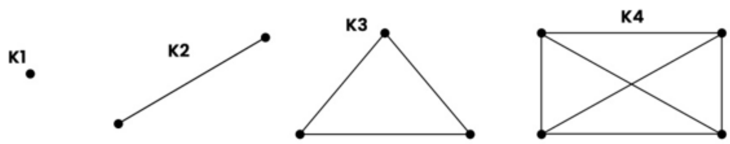
Beberapa graf khusus yang dibahas pada subbab ini antara lain graf trivial, graf kosong, graf lengkap, graf siklus, graf roda dan graf roda berkepala dua.

2.3.1. Graf Trivial dan Graf Kosong

Graf Trivial merupakan graf berorde 1 sedangkan graf kosong adalah graf yang berukuran 0 (Chartrand & Zhang, 2020).

2.3.2. Graf Lengkap

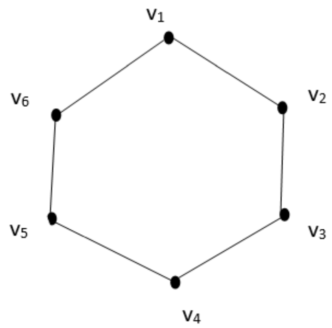
Graf lengkap adalah salah satu graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama. (Hasmawati, 2023). Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$.



Gambar 2.7 Graf K_n

2.3.3. Graf Siklus

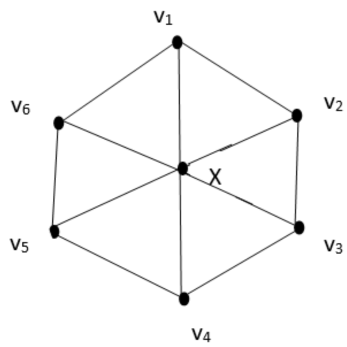
Misalkan $P_n : v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n - 1$. Siklus C_n dengan $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$. Graf yang hanya terdiri atas satu siklus dan setiap titiknya berderajat 2 disebut graf siklus. (Hasmawati,2023)



Gambar 2.8 Graf C_n

2.3.4. Graf Roda

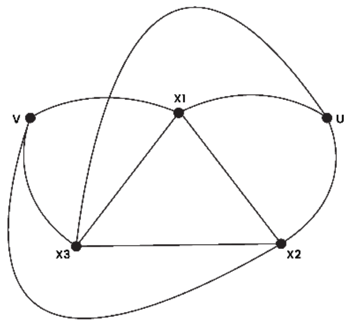
Graf roda adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan W_n. (Hasmawati,2023)



Gambar 2.9 Graf W_6

2.3.5. Graf Roda Berkepala Dua

Graf roda berkepala dua adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan dua titik pusat u,v dengan u,v bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 2$ dinotasikan dengan $W_{2,n}$ atau dalam operasi tambah dapat ditulis $2k_1 + C_n$.



Gambar 2.10 Graf $W_{2,3}$

2.4 Dimensi Metrik Sisi Graf

Dimensi metrik adalah kardinalitas basis dari G yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ (Harary dan Melter, 1976). Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik titik. Dimensi metrik sisi menjadi salah satu topik pembahasan mengenai jarak dalam graf (Adawiyah & Rafiantika, 2021). Jarak yang dimaksud adalah banyaknya sisi pada lintasan terpendek yang memuat titik yang dimaksud dengan salah satu titik ujung sisi. Konsep awal pada dimensi metrik sisi adalah memilih himpunan penentu sisi seminimum mungkin pada graf G, sedemikian sehingga himpunan penentu sisi membedakan representasi jarak setiap sisi pada graf G. Dimensi metrik sisi berfokus pada pembahasan konsep jarak antara suatu sisi dengan titik pada graf. Dimensi metrik sisi pertama kali diperkenalkan oleh Kelenc dkk. (2017) Oleh sebab itu, Kajian tentang dimensi metrik sisi terbilang baru di teori graf.

Definisi 2.7. Jarak dari titik u ke titik v dalam graf dinotasikan sebagai $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Jika graf G tidak memiliki lintasan dari titik u ke titik v, maka didefinisikan $d(u,v) = \infty$. (Diestel,2005)

Contoh 2.7. Diberikan graf $W_{2,3}$ dengan $V(G) = \{x_i \mid 1 \le i \le 3\} \cup \{u,v\}$ dan $E(G) = \{x_i\, x_{i+1\,(mod\ 3)} \mid 1 \le i \le 3\} \cup \{e_i = ux_i, vx_i \mid 1 \le i \le 3\}$. berikut jarak yang terdapat pada graf tersebut:

$d(x_1, x_2) = d(x_1, x_3) = d(x_2, x_3) = d(x_1, u) = d(x_2, u) = d(x_3, u) = d(x_1, v) = d(x_2, v) = d(x_3, u) = 1, dan\ d(u,v) = 2$

Definisi 2.8. Misalkan $u, v, w \in V(G)$ dengan sisi $e = uw$ pada graf $(W_{2,3})$. Jarak antar titik v dan sisi e adalah $s(v, e) = \min \{ d(u, v), d(w, v)\}$ (Kelenc dkk., 2018)

Contoh 2.8. Diberikan graf $W_{2,3}$ pada contoh 2.7., maka jarak antar sisi e_1 dan titik x_3 adalah $s(e_1 , x_3) = \min\{d(x_1, x_3), d(u, x_3)\} = \min\{1,1\} = 1$

Definisi 2.9. (Azisah.,2023). Misalkan G graf terhubung serta $e_1, e_2 \in E(G)$. Sisi e_1 dan e_2 disebut setara jika memenuhi:

1. $e_1 = va$ dan $e_2 = vb$ untuk suatu $a, b, v \in V(G)$.
2. $s(e_1, u) = s(e_2, u)$; $\forall u \in V(G)\backslash\{a, b\}$.

Dua sisi $e_i\ dan\ e_j$ yang merupakan dua sisi setara pada graf G, ditulis $e_i \cong e_j$.

Contoh 2.9. Misalkan suatu graf $W_{2,3}$ dengan $V(W_{2,3}) = \{x_i | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u, v\}\ dan\ E(W_{2,3}) = \{x_i x_{(i+1)(mod\ 3)} | 1 \leq i \leq 3\} \cup \{ux_i, vx_i | 1 \leq i \leq 3\}$.

Misalkan $e_1 = x_1x_2$ dan $e_2 = x_2x_3$. Syarat (1) terpenuhi karena eksistensi x_2 pada kedua sisi. Selanjutnya, akan dicek $\forall v \in V(W_{2,3})\backslash\{x_1, x_3\}$.

Untuk $s(e_1, v), \forall v \in V(W_{2,3})\backslash\{x_1, x_3\}$, maka

$$s(e_1, x_2) = \min\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_2)\} = \min\{1,0\} = 0 \tag{2.1}$$

$$s(e_1, u) = \min\{d(x_1, u), d(x_2, u)\} = \min\{1,1\} = 1 \tag{2.2}$$

$$s(e_1, v) = \min\{d(x_1, v), d(x_2, v)\} = \min\{1,1\} = 1 \tag{2.3}$$

Untuk $s(e_2, v), \forall v \in V(W_{2,3})\backslash\{x_1, x_3\}$, maka

$$s(e_2, x_2) = \min\{d(x_2, x_2), d(x_3, x_2)\} = \min\{0,1\} = 0 \tag{2.4}$$

$$s(e_2, u) = \min\{d(x_2, u), d(x_3, u)\} = \min\{1,1\} = 1 \tag{2.5}$$

$$s(e_2, v) = \min\{d(x_2, v), d(x_3, v)\} = \min\{1,1\} = 1 \tag{2.6}$$

Berdasarkan (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), dan (2.6), dapat disimpulkan bahwa $s(e_1, v) = s(e_2, v) \forall v \in V(W_{2,3})\backslash\{x_1, x_3\}$. Dengan demikian, syarat (2) terpenuhi pada Definisi 2.9. Oleh sebab itu, terdapat sisi-sisi setara yakni e_1 dan e_2 pada graf $W_{2,3}$.

Definisi 2.10. Diberikan suatu $p-tuple$ titik $R=(r_1,r_2,\dots,r_p)$, $r_i\in V(G)$. Representasi sisi e terhadap R dinotasikan $r(e|R)$ dengan $r(e|R)=\left(s(e,r_1),s(e,r_2),\dots,s\left(e,r_p\right)\right)$. Jika $\forall e_i,e_j\in E(G), r(e_i|R)\neq r\left(e_j\middle|R\right)$. Maka himpunan titik yang anggota-anggotanya $r_1,r_2,\dots,r_p$, yaitu $R'=\{r_i|1\le i\le p\}$ disebut himpunan penentu sisi.

Contoh 2.10. Diberikan graf $W_{2,3}$ pada Contoh 2.7.

Pilih $W=\{x_i|\ 1\le i\ \le 3\}\cup\{u\}, x_i\ \in V(G)$, Maka

$r(x_1x_2|W)=\{0,0,1,1\}$ $r(x_2x_3|W)=\{1,0,0,1\}$ $r(x_3x_1|W)=\{0,1,0,1\}$

$r(x_1u|W)=\{0,1,1,0\}$ $r(x_2u|W)=\{1,0,1,0\}$ $r(x_3u|W)=\{1,1,0,0\}$

$r(x_1v|W)=\{0,1,1,1\}$ $r(x_2v|W)=\{1,0,1,1\}$ $r(x_3v|W)=\{1,1,0,1\}$

Diperoleh $r(x_1x_2|W)\neq r(x_2x_3|W)\neq r(x_3x_1|W)\neq r(x_1u|W)\neq\cdots\neq r(x_3v|W)$. maka $W=\{x_i|\ 1\le i\ \le 3\}\cup\{u\}$ adalah himpunan penentu sisi.

Definisi 2.11. Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas minimum dari semua himpunan penentu sisi pada G yang dilambangkan dengan $dim_E\,(G)$ (Adawiyah dkk, 2021).

Contoh 2.11. Diberikan graf $W_{2,3}$ pada Contoh 2.7. Himpunan titik graf $W_{2,3}$ adalah $V\left(W_{2,3}\right)=\{x_i|\ 1\le i\ \le 3\}\cup\ \{u,v\}$ dan himpunan sisi $E\left(W_{2,3}\right)=\left\{x_i\ x_{i+1\ (mod\ 3)}\middle|\ 1\le i\le 3\right\}\cup\{e_i=ux_i,vx_i|1\le i\le 3\ \}$.

Misal $W=\{x_i|\ 1\le i\ \le 3\}\cup\{u\}$. Jika diambil $W'=W\backslash\{x_i\}, i\ \in\{1,2,3\}$, maka

a. $W'=W\backslash\{x_1\}=\{x_2,x_3,u\}$

$r(x_3x_1|W')=r(x_3v|W')=\{1,0,1\}$dan $r(x_2x_1|W')=r(x_2v|W')=\{0,1,1\}$

b. $W'=W\backslash\{x_2\}=\{x_1,x_3,u\}$

$r(x_1x_2|W')=r(x_1v|W')=\{0,1,1\}$ dan $r(x_3x_2|W')=r(x_3v|W')=\{1,0,1\}$

c. $W'=W\backslash\{x_3\}=\{x_1,x_2,u\}$

$r(x_2x_3|W')=r(x_2v|W')=\{1,0,1\}$dan $r(x_1x_3|W')=r(x_1v|W')=\{0,1,1\}$

d. $W' = W \backslash \{u\} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$r(x_1x_2|W) = \{0,0,1\}$, $r(x_2x_3|W) = \{1,0,0\}$, $r(x_3x_1|W) = \{0,1,0\}$, dan

$r(x_1u|W) = \{0,1,1\}$, $r(x_2u|W) = \{1,0,1\}$, $r(x_3u|W) = \{1,1,0\}$, serta

$r(x_1v|W) = \{0,1,1\}$, $r(x_2v|W) = \{1,0,1\}$, $r(x_3v|W) = \{1,1,0\}$,

jadi $r(x_1v|W') = r(x_1u|W')$, $r(x_2v|W') = r(x_2u|W')$, dan $r(x_3v|W') = r(x_3u|W')$. Hal ini terjadi karena sisi x_iv setara dengan sisi x_iu untuk setiap i.

Jadi, $W' = W \backslash \{y\}\ dengan\ y = u, v, atau\ x_i\ untuk\ suatu\ \ i \in \{1,2,3\}$, bukan himpunan penentu sisi graf $W_{2,3}$ yang dalam hal ini $|W'| = 3$. Hal ini mengatakan bahwa setiap himpunan $W \subseteq V(W_{2,3})$ dengan kardinalitas 3 bukan merupakan himpunan penentu sisi graf roda berkepala dua $W_{2,3}$. Karenanya, diperoleh $dim_E\{W_{2,3}\} \geq 4$. (A)

Jika dipilih $W = \{x_i |\ 1 \leq i\ \leq 3\} \cup \{u\}$ atau $W = \{x_i |\ 1 \leq i\ \leq 3\} \cup \{v\}$, maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,0,1,1\}$ $r(x_2x_3|W) = \{1,0,0,1\}$ $r(x_3x_1|W) = \{0,1,0,1\}$

$r(x_1u|W) = \{0,1,1,0\}$ $r(x_2u|W) = \{1,0,1,0\}$ $r(x_3u|W) = \{1,1,0,0\}$

$r(x_1v|W) = \{0,1,1,1\}$ $r(x_2v|W) = \{1,0,1,1\}$ $r(x_3v|W) = \{1,1,0,1\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_2x_3|W) \neq r(x_3x_1|W) \neq r(x_1u|W) \neq \cdots \neq r(x_3v|W)$. maka, $W = \{x_1, x_2, x_3, u\}$ adalah himpunan penentu sisi graf $W_{2,3}$. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $W = \{x_i |\ 1 \leq i\ \leq 3\} \cup \{v\}$, juga merupakan himpunan penentu sisi graf $W_{2,3}$. Dalam hal ini kardinalitas dari himpunan W adalah 4. Dengan demikian, diperoleh $dim_E\{W_{2,3}\} \leq 4$ (B)

Dari (A) dan (B) diperoleh $dim_E\{W_{2,3}\} = 4$. ■

Dalam Contoh 2.11, pemilihan himpunan $W = \{x_i |\ 1 \leq i\ \leq 3\} \cup \{y\}$ dengan $y = u\ atau\ v$ disebut himpunan penentu sisi minimum graf $W_{2,3}$.

2.5 Hasil Penelitian Terdahulu

Subbab ini akan menyajikan beberapa hasil penelitian sebelumnya tentang dimensi metrik sisi. Hasil-hasilnya disajikan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 2.1. untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 2,\ dim_E\,(P_n) = 1$. (Kelenc dkk., 2018)

Contoh 2.12. Diberikan graf P_4 dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$.

Pilih $W = \{x_1\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0\}$ $\quad r(x_2x_3|W) = \{1\}$ $\quad r(x_3x_4|W) = \{2\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_2x_3|W) \neq r(x_3x_4|W)$. Maka, $W = \{x_1\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 1 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(P_4) = 1$.

Teorema 2.2. untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 2, dim_E\,(C_n) = 2$. (Kelenc dkk., 2018)

Contoh 2.13. Diberikan graf C_4 dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\}$.

Pilih $W = \{x_1, x_2\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,0\}$ $\quad r(x_2x_3|W) = \{1,0\}$

$r(x_3x_4|W) = \{1,1\}$ $\quad r(x_4x_1|W) = \{0,1\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_2x_3|W) \neq r(x_3x_4|W) \neq r(x_4x_1|W)$. Maka, $W = \{x_1, x_2\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 2 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(C_4) = 2$.

Teorema 2.3. untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 2,\ dim_E\,(K_n) = n - 1$. (Kelenc dkk., 2018)

Contoh 2.14. Diberikan graf K_4 dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\}$.

Pilih $W = \{x_1, x_2, x_3\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,0,1\}$ $r(x_2x_3|W) = \{1,0,0\}$

$r(x_3x_4|W) = \{1,1,0\}$ $r(x_4x_1|W) = \{0,1,1\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_2x_3|W) \neq r(x_3x_4|W) \neq r(x_4x_1|W)$. Maka, $W = \{x_1, x_2, x_3\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 3 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(K_4) = 3$.

Teorema 2.4. Misalkan L_n adalah graf tangga dengan $n \geq 2$. Maka, $dim_E\,(L_n) = 2$. (Adawiyah dkk., 2020)

Contoh 2.15. Diberikan graf L_5 dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, y_1y_2, y_2y_3, y_3y_4, y_4y_5, x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5\}$.

Pilih $W = \{x_1, y_1\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,1\}$ $r(x_2x_3|W) = \{1,2\}$ $r(x_3x_4|W) = \{2,3\}$

$r(x_4x_5|W) = \{3,4\}$ $r(y_1y_2|W) = \{1,0\}$ $r(y_2y_3|W) = \{2,1\}$

$r(y_3y_4|W) = \{3,2\}$ $r(y_4y_5|W) = \{4,3\}$ $r(x_1y_1|W) = \{0,0\}$

$r(x_2y_2|W) = \{1,1\}$ $r(x_3y_3|W) = \{2,2\}$ $r(x_4y_4|W) = \{3,3\}$

$r(x_5y_5|W) = \{4,4\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_2x_3|W) \neq \cdots \neq r(x_5y_5|W)$. Maka, $W = \{x_1, y_1\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 2 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(L_5) = 2$.

Teorema 2.5. Misalkan S_n adalah graf bintang dengan $n \geq 4$. $dim_E\,(S_n) = n - 1$. (Adawiyah dkk., 2020)

Contoh 2.16. Diberikan graf S_5 dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$.

Pilih $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,0,1,1\}$ $r(x_1x_3|W) = \{0,1,0,1\}$

$r(x_1x_4|W) = \{0,1,1,0\}$ $\quad$ $r(x_1x_5|W) = \{0,1,1,1\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_1x_3|W) \neq r(x_1x_4|W) \neq r(x_1x_5|W)$. Maka, $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 4 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(S_5) = 4$.

Teorema 2.6. Misalkan W_n adalah graf roda dengan $n \geq 4$. $dim_E\,(W_n) = n - 1$. (Adawiyah dkk., 2020)

Contoh 2.17. Diberikan graf W_6 dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1, vx_1, vx_2, vx_3, vx_4, vx_5, vx_6\}$.

Pilih $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,0,1,2,2\}$ $\quad$ $r(x_2x_3|W) = \{1,0,0,1,2\}$ $\quad$ $r(x_3x_4|W) = \{2,1,0,0,1\}$

$r(x_4x_5|W) = \{2,2,1,0,0\}$ $\quad$ $r(x_5x_6|W) = \{1,2,2,1,0\}$ $\quad$ $r(x_6x_1|W) = \{0,1,2,2,1\}$

$r(vx_1|W) = \{0,1,1,1,1\}$ $\quad$ $r(vx_2|W) = \{1,0,1,1,1\}$ $\quad$ $r(vx_3|W) = \{1,1,0,1,1\}$

$(vx_4|W) = \{1,1,1,0,1\}$ $\quad$ $r(vx_5|W) = \{1,1,1,1,0\}$ $\quad$ $r(vx_6|W) = \{1,1,1,1,1\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_1x_3|W) \neq \cdots \neq r(vx_6|W)$. Maka, $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 5 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(W_6) = 5$.

Teorema 2.7. Graf $F_{1,n}$ adalah graf kipas, maka

$$dim_E\left(F_{1,n}\right) = \begin{cases} n, untuk\ n = 2 \\ n-1, untuk\ n \geq 3 \end{cases}$$ (Kelenc dkk., 2018)

Contoh 2.18. Diberikan graf $F_{1,3}$ dengan $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, v\}$ dan $E\,(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, vx_1, vx_2, vx_3\}$.

Pilih $W = \{x_1, x_2, v\}$, Maka

$r(x_1x_2|W) = \{0,0,1\}$ $\quad$ $r(x_2x_3|W) = \{1,0,1\}$ $\quad$ $r(vx_1|W) = \{0,1,0\}$

$r(vx_2|W) = \{1,0,0\}$ $\quad$ $r(vx_3|W) = \{1,1,0\}$

Karena $r(x_1x_2|W) \neq r(x_2x_3|W) \neq \cdots \neq r(vx_3|W)$. Maka, $W = \{x_1, x_2, v\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 3 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(F_{1,3}) = 3$.

Teorema 2.8. Graf hasil operasi *comb* C_n terhadap graf $K_1 + G$ adalah $dim_E\,(\,C_n \rhd (\,K_1 + G)) = n|V(G)| - 1)$. (Azisah., 2023)

Contoh 2.18. Diberikan graf $C_3 \rhd S_{1,4}$ dengan $V(C_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan $E\,(C_3) = \{e_{13} = x_1x_2, e_{14} = x_2x_3, e_{15} = x_1x_3\}$ serta $V\big(\,S_{1,4}\big) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E\,\big(\,S_{1,4}\big) = \{e_1 = v_1v_5, e_2 = v_2v_5, e_3 = v_3v_5, e_4 = v_4v_5\}$

Pilih $W = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33}\}$, Maka

$r(e_1|W) = \{0,1,1,2,2,2,2,2,2\}$ $r(e_2|W) = \{1,0,1,2,2,2,2,2,2\}$

$r(e_3|W) = \{1,1,0,2,2,2,2,2,2\}$ $r(e_4|W) = \{1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$

$r(e_5|W) = \{2,2,2,0,1,1,2,2,2\}$ $r(e_6|W) = \{2,2,2,1,0,1,2,2,2\}$

$r(e_7|W) = \{2,2,2,1,1,0,2,2,2\}$ $r(e_8|W) = \{1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$

$r(e_9|W) = \{2,2,2,2,2,2,0,1,1\}$ $r(e_{10}|W) = \{2,2,2,2,2,2,1,0,1\}$

$r(e_{11}|W) = \{2,2,2,2,2,2,1,1,0\}$ $r(e_{12}|W) = \{2,2,2,2,2,2,1,1,1\}$

$r(e_{13}|W) = \{1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$ $r(e_{14}|W) = \{2,2,2,1,1,1,1,1,1\}$

$r(e_{15}|W) = \{1,1,1,2,2,2,1,1,1\}$

Karena $r(e_1|W) \neq r(e_2|W) \neq \cdots \neq r(e_{15}|W)$. Maka, $W = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33}\}$ adalah himpunan penentu sisi dengan kardinalitas minimum, yakni 9 sehingga himpunan W adalah dimensi metrik sisi. Jadi $dim_E(\,C_3 \rhd\, S_{1,4}) = 9$.

Diketahui bahwa diantara hasil-hasil yang disajikan belum ada pembahasan mengenai dimensi metrik sisi untuk graf roda berkepala dua. Pembahasan mengenai dimensi metrik sisi graf roda berkepala dua disajikan pada Bab IV, dan metode yang digunakan dalam pencarian dimensi metrik sisi tersebut di sajikan pada Bab III.