

**PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF PRISMA  $P_{m,n}$**

**SKRIPSI**



**MUH. RIFKI WAHYUDI BONDA**

**H011171507**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**JANUARI 2024**

**PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF PRISMA  $P_{m,n}$**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas  
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**MUH. RIFKI WAHYUDI BONDA**

**H011171507**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**JANUARI 2024**

## LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

### **Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma $P_{m,n}$**

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 26 Januari 2024



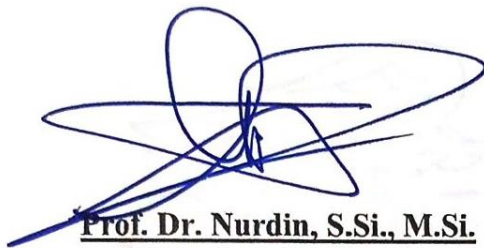
**Muh. Rifki Wahyudi Bonda**  
**NIM: H011171507**

**PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF PRISMA  $P_{m,n}$**

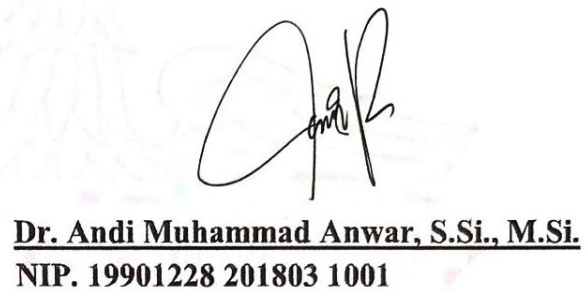
**Disetujui oleh:**

**Pembimbing Utama**

**Pembimbing Pertama**

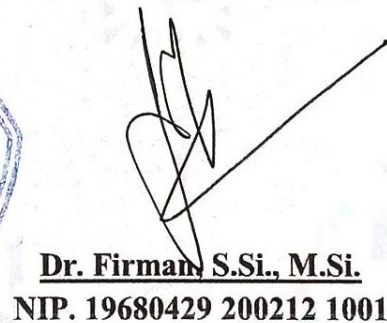


**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19700807 200003 1002**



**Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19901228 201803 1001**

**Ketua Program Studi**



**Dr. Firman S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19680429 200212 1001**

**Pada 26 Januari 2024**

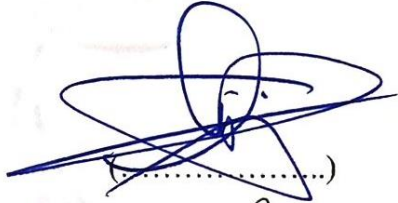



## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Muh. Rifki Wahyudi Bonda  
NIM : H01171507  
Program Studi : Matematika  
Judul Skripsi : Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma  $P_{m,n}$

**Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

### DEWAN PENGUJI

1. Ketua : Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. 
2. Sekretaris : Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. 
3. Anggota : Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. 
4. Anggota : Naimah Aris, S.Si., M.Math. 

Ditetapkan di : Makassar  
Tanggal : 26 Januari 2024

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahirobbil'alamin*, Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma  $P_{m,n}$** ” sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada program studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Salam dan shalawat penulis kirimkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW sebagai teladan terbaik dalam menjalani kehidupan.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa bantuan, bimbingan, dukungan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga dan istimewa kepada Ibunda **Hj. Muliati** dan Ayahanda **H. Syamsuddin Bonda** yang telah bekerja keras membesarkan dan mendidik penulis dengan kesabaran dan penuh kasih sayang serta senantiasa memberikan doa dan dukungan sehingga dapat menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula atas dukungan dan doa kepada adik-adik **Rifka Maudy Wahdania Syam** dan **Rizki Islahatul Fuadani Syam** serta seluruh keluarga. Pada kesempatan ini pula, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
4. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan banyak waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.

5. **Bapak Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah sabar dan tulus meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
6. **Ibu Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku dosen penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan saran serta kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
7. **Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku dosen penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat serta dukungan telah membimbing penulis menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
8. **Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika** yang telah membimbing, mendidik, dan memberikan ilmunya kepada penulis. Serta seluruh staf yang telah membantu dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
9. Kanda **Wisnu Wardana, S.Si.** dan adinda **Akidah Amaliah, S.Si.** yang telah memberi ide, saran, serta pelajaran selama pengerjaan skripsi ini.
10. Teman-teman **Matematika 2017** yang telah memberi kenangan terindah dalam masa perkuliahan hingga penyusunan tugas akhir serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Segenap keluarga **Himatika FMIPA Unhas**, terkhusus untuk **Diskrit 2017** dan **Cogan17iskrit** yang telah memberikan pelajaran hidup mengesankan penuh banyak suka dan sedikit duka dalam menjalankan roda organisasi pada masa perkuliahan. Salam **Satukan, Eratkan, Kuatkan.**
12. Saudara-saudari penulis **24/7 Lucknut++** diantaranya **Cahyu, Heru, Deniz, Lenny, Akin, Indi, Esty, Teka, Upi, Dilla, Faathir, Riswan, Enal, Syawal,** dan **Sela** serta anggota bayangan **Kade, Fika, Farah, Ita,** dan **Acca** yang senantiasa menemani, menghibur, membantu, memberi semangat, membagi ilmu, membagi cerita selama masa perkuliahan. Semoga kita semua senantiasa diberi kesehatan dan kesempatan untuk bersama-sama lagi kedepannya.

13. Teman-teman **KKN UNHAS Gelombang 105** terkhusus **Tamalanrea 03** yang telah mewarnai masa-masa KKN penulis ketika mengabdikan kepada masyarakat.
14. **Nabilah Sabella Aulia, S.Pd.** yang selalu memberikan semangat, doa, motivasi, dukungan, serta menemani penulis selama pengerjaan skripsi ini.
15. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya apabila terdapat banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, semoga tulisan dapat memberikan manfaat untuk pembaca.

Makassar, 26 Januari 2024



Muh. Rifki Wahyudi Bonda



**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR  
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muh. Rifki Wahyudi Bonda  
NIM : H011171507  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-exclusive Royalty- Free Right)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

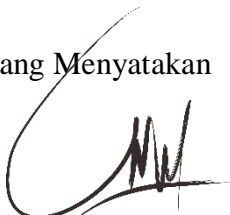
**Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma  $P_{m,n}$**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 26 Januari 2024

Yang Menyatakan



(Muh. Rifki Wahyudi Bonda)

**ABSTRAK**

Misalkan  $G$  adalah suatu graf sederhana. Suatu fungsi  $f$  dikatakan pelabelan rata-rata dari graf  $G$  jika  $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, q\}$  dimana  $q$  adalah banyaknya sisi sedemikian sehingga label sisi  $f^*(uv) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$  berbeda. Dalam skripsi ini akan ditentukan pola pelabelan sedemikian sehingga graf prisma  $P_{m,n}$  adalah graf rata-rata. Dalam menentukan pola pelabelan rata-rata pada graf prisma  $P_{m,n}$  dilakukan dengan menunjukkan pola pelabelan rata-rata pada graf prisma  $P_{3,n}, P_{4,n}$ , dan  $P_{5,n}$ . Hasil yang diperoleh yaitu graf prisma  $P_{m,n}$  adalah graf rata-rata untuk  $m \geq 3$  dan setiap  $n$  bilangan bulat positif.

**Kata Kunci:** Graf prisma  $P_{m,n}$ , Pelabelan rata-rata, Graf rata-rata

## ABSTRACT

Let  $G$  be a simple graph. A graph  $G$  is called mean graph if it admits a mean labeling. A function  $f$  is called a geometric mean labeling of a graph if  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$  where  $q$  is the number of edges such that the edges label  $f^*(uv) = \left\lfloor \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rfloor$  are distinct. This thesis demonstrates the labeling pattern such that a prism graph  $P_{m,n}$  is a mean graph. In determining the mean labeling pattern on a prism graph  $P_{m,n}$ , it is obtained by demonstrating the mean labeling pattern on a prism graph  $P_{3,n}, P_{4,n}$ , and  $P_{5,n}$ . The obtained result shows that the prism graph  $P_{m,n}$  is a mean graph for  $m \geq 3$  and each  $n$  positive integers.

**Keywords:** Prism Graph  $P_{m,n}$ , Mean labeling, Mean graph

**DAFTAR ISI**

HALAMAN JUDUL .....	i
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN .....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH.....	viii
ABSTRAK .....	ix
DAFTAR ISI .....	xi
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan Penelitian .....	2
1.5 Manfaat Penelitian .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>3</b>
2.1 Pengertian Graf.....	3
2.2 Terminologi Graf.....	3
2.3 Perkalian Kartesius .....	5
2.4 Jenis-Jenis Graf .....	6
2.5 Fungsi.....	8
2.6 Pelabelan Rata-Rata.....	9
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....</b>	<b>12</b>

3.1	Jenis Penelitian .....	12
3.2	Lokasi dan Waktu Penelitian.....	12
3.3	Tahapan Penelitian.....	12
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>		<b>14</b>
4.1	Graf Prisma <b><math>P_m, n</math></b> .....	14
4.2	Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma <b><math>P_3, n</math></b> .....	15
4.3	Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma <b><math>P_4, n</math></b> .....	31
4.4	Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma <b><math>P_5, n</math></b> .....	56
	Teorema.....	97
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>		<b>106</b>
5.1	Kesimpulan.....	106
5.2	Saran .....	106
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>		<b>107</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2. 1</b> Graf $G$ .....	3
<b>Gambar 2.2. 1</b> Graf $G$ .....	4
<b>Gambar 2.2. 2</b> (a) Titik bertetangga (b) Sisi bertetangga .....	5
<b>Gambar 2.3. 1</b> (a) Graf $C_4$ dan (b) Graf $P_2$ .....	6
<b>Gambar 2.3. 2</b> Graf $C_4 \times 2$ .....	6
<b>Gambar 2.4. 1</b> Graf Lintasan.....	7
<b>Gambar 2.4. 2</b> Graf Siklus .....	7
<b>Gambar 2.4. 3</b> (a) Graf Prisma $P_{4,2}$ (b) Graf Prisma $P_{5,2}$ .....	8
<b>Gambar 2.4. 1</b> Graf Lintasan.....	7
<b>Gambar 2.4. 2</b> Graf Siklus .....	7
<b>Gambar 2.4. 3</b> (a) Graf Prisma $P_{4,2}$ (b) Graf Prisma $P_{5,2}$ .....	8
<b>Gambar 2.5. 1</b> Fungsi Injektif.....	9
<b>Gambar 2.5. 2</b> Fungsi Surjektif.....	9
<b>Gambar 2.5. 3</b> Fungsi Bijektif.....	9
<b>Gambar 2.6. 1</b> Pelabelan rata-rata pada graf $C_5$ .....	10
<b>Gambar 4. 1</b> Graf Prisma $P_{m,n}$ .....	14
<b>Gambar 4.2. 1</b> Graf Prisma $P_{3,n}$ .....	15
<b>Gambar 4.2. 2</b> Penotasian graf prisma $P_{3,1}$ .....	16
<b>Gambar 4.2. 3</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{3,1}$ .....	16
<b>Gambar 4.2. 4</b> Penotasian graf prisma $P_{3,2}$ .....	17
<b>Gambar 4.2. 5</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{3,2}$ .....	18
<b>Gambar 4.2. 6</b> Penotasian graf prisma $P_{3,3}$ .....	19
<b>Gambar 4.2. 7</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{3,3}$ .....	21
<b>Gambar 4.2. 8</b> Penotasian graf prisma $P_{3,4}$ .....	22
<b>Gambar 4.2. 9</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{3,4}$ .....	24
<b>Gambar 4.2. 10</b> Penotasian graf prisma $P_{3,7}$ .....	25
<b>Gambar 4.2. 11</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{3,7}$ .....	29
<b>Gambar 4.3. 1</b> Graf Prisma $P_{4,n}$ .....	31
<b>Gambar 4.3. 2</b> Penotasian graf prisma $P_{4,1}$ .....	32

<b>Gambar 4.3. 3</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,1}$ .....	33
<b>Gambar 4.3. 4</b> Penotasian graf prisma $P_{4,2}$ .....	33
<b>Gambar 4.3. 5</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,2}$ .....	35
<b>Gambar 4.3. 6</b> Penotasian graf prisma $P_{4,3}$ .....	36
<b>Gambar 4.3. 7</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,3}$ .....	38
<b>Gambar 4.3. 8</b> Penotasian graf prisma $P_{4,4}$ .....	39
<b>Gambar 4.3. 9</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,4}$ .....	42
<b>Gambar 4.3. 10</b> Penotasian graf prisma $P_{4,5}$ .....	43
<b>Gambar 4.3. 11</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,5}$ .....	47
<b>Gambar 4.3. 12</b> Penotasian graf prisma $P_{4,9}$ .....	48
<b>Gambar 4.3. 13</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,9}$ .....	54
<b>Gambar 4.4. 1</b> Graf Prisma $P_{5,n}$ .....	57
<b>Gambar 4.4. 2</b> Penotasian graf prisma $P_{5,1}$ .....	58
<b>Gambar 4.4. 3</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,1}$ .....	59
<b>Gambar 4.4. 4</b> Penotasian graf prisma $P_{5,2}$ .....	59
<b>Gambar 4.4. 5</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,2}$ .....	61
<b>Gambar 4.4. 6</b> Penotasian graf prisma $P_{5,3}$ .....	62
<b>Gambar 4.4. 7</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,3}$ .....	64
<b>Gambar 4.4. 8</b> Penotasian graf prisma $P_{5,4}$ .....	66
<b>Gambar 4.4. 9</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,4}$ .....	69
<b>Gambar 4.4. 10</b> Penotasian graf prisma $P_{5,5}$ .....	71
<b>Gambar 4.4. 11</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,5}$ .....	75
<b>Gambar 4.4. 12</b> Penotasian graf prisma $P_{5,6}$ .....	78
<b>Gambar 4.4. 13</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,6}$ .....	83
<b>Gambar 4.4. 14</b> Penotasian graf prisma $P_{5,11}$ .....	84
<b>Gambar 4.4. 15</b> Pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{5,11}$ .....	93

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Matematika adalah suatu ilmu yang mendasari perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi modern. Seiring dengan perkembangan zaman, matematika menjadi salah satu ilmu dasar yang dapat dimanfaatkan dalam kehidupan untuk memecahkan masalah. Matematika dengan berbagai cabang ilmunya sering digunakan untuk menemukan jawaban terhadap masalah yang dihadapi oleh manusia. Salah satu cabang ilmu yang terdapat dalam matematika adalah teori graf.

Seorang ahli matematikawan terkenal dari Swiss bernama Leonhard Euler disebut sebagai bapak teori graf ketika pada tahun 1736 berhasil menyelesaikan masalah terkenal yang belum terpecahkan pada saat itu yang disebut Königsberg Bridge Problem melalui karyanya “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*”. Euler mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Königsberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah tersebut kemudian digambarkan dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan daerah satu dengan daerah lain. Hal inilah yang menjadi konsep awal lahirnya teori graf.

Salah satu topik yang terdapat dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan graf merupakan pemberian nilai dengan bilangan bulat positif pada titik, sisi atau keduanya dari suatu graf sehingga memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi [1]. Sejauh ini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, salah satunya adalah pelabelan rata-rata.

Somansundaram dan Ponraj pertama kali memperkenalkan konsep pelabelan rata-rata. Pelabelan rata-rata pada graf  $G$  ialah sebuah fungsi satu-satu  $f$  yang memetakan titik di graf dengan bilangan bulat  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$  dan  $q$  adalah banyaknya sisi sedemikian sehingga label sisi  $f^*(uv) = \left\lfloor \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rfloor$  berbeda.



Hingga saat ini manfaat pelabelan graf dirasakan peranannya, diantaranya sebagai teori pengkodean, *X-ray*, *crystalography*, radar, desain sirkuit, jaringan komunikasi, manajemen database, dan sebagainya.

Beberapa ahli telah membahas pelabelan rata-rata dalam beberapa jurnal diantaranya, Kaneria dan Meghpara [2], membahas tentang pelabelan rata-rata pada beberapa graf siklus. Lourdusamy dan Seenivasan [3], membahas tentang pelabelan rata-rata pada graf *cyclic snakes*. Gayathri dan Sulochana [4], membahas tentang pelabelan rata-rata pada graf tak terhubung. Sobha, dkk. [5] membahas tentang pelabelan rata-rata pada beberapa graf spesial.

Dilihat dari beberapa hasil penelitian diatas, masih kurang dikaji mengenai pelabelan rata-rata pada graf prisma. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji pelabelan rata-rata pada graf yang belum dikaji sebelumnya seperti pada graf prisma  $P_{m,n}$  yang dituangkan dalam judul skripsi ini.

## 1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pola pelabelan rata-rata pada graf prisma  $P_{m,n}$ .

## 1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya mengkaji pelabelan rata-rata pada graf prisma  $P_{m,n}$  dimana  $n$  adalah bilangan bulat positif dan  $m \geq 3$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pola pelabelan sedemikian sehingga graf prisma  $P_{m,n}$  adalah graf rata-rata.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan mengenai teori graf, khususnya pelabelan rata-rata.
2. Sebagai media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.
3. Menjadi pustaka bagi matematikawan yang ingin membahas mengenai pelabelan rata-rata.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Pengertian Graf

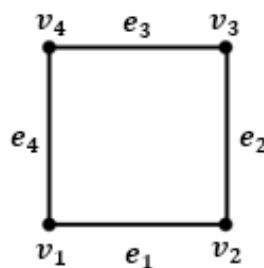
Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi, dengan himpunan sisi diperoleh dari himpunan titiknya. Pengaitan titik–titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan menjadi sebuah gambar sehingga membentuk suatu graf. Secara formal definisi graf dapat dituliskan sebagai berikut.

**Definisi 2.1.1** *Graf adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan  $E$  himpunan dari pasangan anggota-anggota  $V$  yang disebut sisi.*

Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut: *Graf  $G = (V(G), E(G))$  dengan  $V(G) = \{u: u \text{ disebut titik}\}$  dan  $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$  [6].*

**Definisi 2.1.2** *Graf sederhana  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$ , dimana  $V(G)$  adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, dengan anggotanya disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota  $V(G)$  yang disebut sisi [6].*

Misalkan diberikan himpunan titik pada graf  $G$  adalah  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan himpunan sisinya  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  dimana  $e_1 = v_1v_2$ ,  $e_2 = v_2v_3$ ,  $e_3 = v_3v_4$ ,  $e_4 = v_1v_4$ . Maka akan membentuk graf seperti pada **Gambar 2.1**.



**Gambar 2. 1** Graf  $G$

#### 2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf, terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada pembahasan tugas akhir ini.

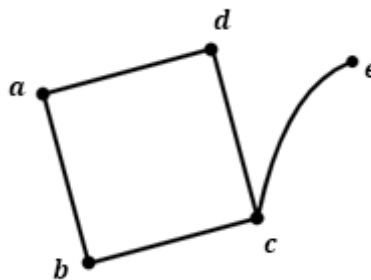
**Definisi 2.2.1** Orde adalah banyaknya anggota  $V(G)$  dari suatu graf, sedangkan ukuran (size) adalah banyaknya anggota  $E(G)$  dari suatu graf [6].

**Definisi 2.2.2** Derajat suatu titik  $v_i$  dalam graf  $G$ , dilambangkan “ $d(v_i)$ ” adalah banyaknya sisi  $x \in E(G)$  yang terkait dengan titik  $v$  dimana derajat minimum dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $\delta(G)$ , yaitu  $\delta(G) = \min\{d(v): v \in V(G)\}$  dan derajat maksimum dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $\Delta(G)$ , yaitu  $\Delta(G) = \max\{d(v): v \in V(G)\}$  [6].

**Definisi 2.2.3** Lintasan dari titik  $v_0$  ke titik  $v_n$  pada graf  $G$  dinotasikan dengan lintasan  $v_0 - v_n$ , adalah suatu barisan selang-seling antar titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  dengan  $e_i = v_{i-1}v_i$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  merupakan sisi dari graf [7].

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*).

Misalkan diberikan graf seperti pada Gambar 2.2.1 dengan himpunan titiknya  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  dan himpunan sisinya  $E(G) = \{ab, ad, bc, cd, ce\}$



**Gambar 2.2. 1** Graf  $G$

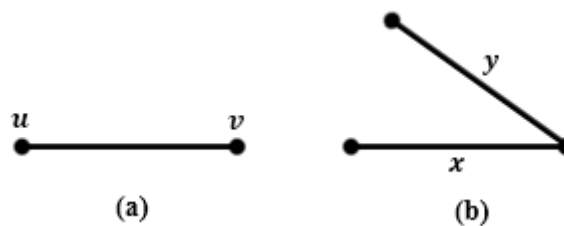
Pada Gambar 2.2.1 dapat dilihat graf  $G$  berorder 5 dan berukuran 5 dimana derajat titiknya adalah:

$$\begin{array}{lll} d(a) = 2 & d(b) = 2 & d(c) = 3 \\ d(d) = 2 & d(e) = 1 & \end{array}$$

Berdasarkan derajat titik tersebut dapat disimpulkan bahwa derajat titik minimumnya adalah  $\delta(G) = 1$  dan derajat titik maksimum adalah  $\Delta(G) = 3$ . Pada Gambar 2.2.1 yang merupakan lintasan terbuka adalah  $a - b - c - e$ , karena

berawal dan berakhir pada titik yang berbeda. Sedangkan yang merupakan lintasan tertutup adalah  $a - b - c - d - a$ , karena berawal dan berakhir pada titik yang sama.

**Definisi 2.2.4** Dua titik  $u$  dan  $v$  dari graf  $G$  bertetangga jika ada sisi  $uv$  yang menghubungkannya, kemudian titik  $u$  dan  $v$  dikatakan bersisian dengan sisi tersebut. Demikian pula dua sisi berlainan  $x$  dan  $y$  bertetangga jika mereka mempunyai titik yang sama [8].



**Gambar 2.2. 2** (a) Titik bertetangga (b) Sisi bertetangga

Pada Gambar 2.2.2 (a) titik  $u$  bertetangga dengan titik  $v$  karena terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut sedangkan pada gambar (b) sisi  $x$  bertetangga dengan sisi  $y$  karena kedua sisi tersebut mempunyai titik yang sama.

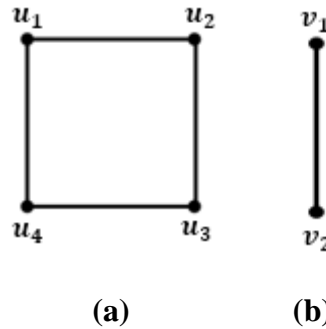
### 2.3 Perkalian Kartesius

Secara formal, definisi perkalian kartesius dari graf dapat dituliskan sebagai berikut.

**Definisi 2.3** Perkalian kartesius dari graf  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  adalah graf yang dinotasikan dengan  $G = G_1 \times G_2$  dan mempunyai titik  $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ , dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di graf  $G$  bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku:

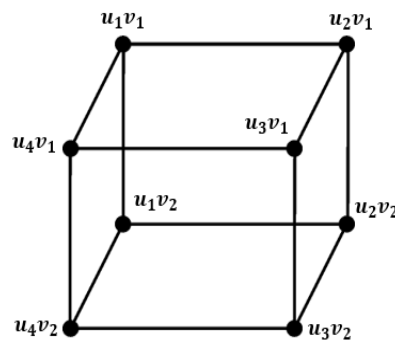
1.  $u_1 = v_1$  dan  $u_2, v_2 \in E(G_2)$
2.  $u_2 = v_2$  dan  $u_1, v_1 \in E(G_1)$  [7].

Adapun contoh misalkan diberikan graf  $C_4$  dan  $P_2$ . Perkalian kartesius dari graf  $C_4$  dan  $P_2$  akan menghasilkan suatu graf  $C_4 \times P_2$ . Himpunan titik  $V(C_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  dan himpunan sisi  $E(C_4) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_1u_4\}$ . Himpunan titik  $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$  dan himpunan sisi  $E(P_2) = \{v_1v_2\}$ . Dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.3. 1 (a) Graf  $G_1$  dan (b) Graf  $G_2$

Dengan menggunakan perkalian kartesius akan terbentuk graf  $G_1 \times G_2$  dengan himpunan titik  $V(G_1 \times G_2) = \{u_1v_1, u_2v_1, u_3v_1, u_4v_1, u_1v_2, u_2v_2, u_3v_2, u_4v_2\}$  dan himpunan sisinya  $E(G_1 \times G_2) = \{u_1v_1u_2v_1, u_2v_1u_3v_1, u_3v_1u_4v_1, u_1v_1u_4v_1, u_1v_1u_1v_2, u_2v_1u_2v_2, u_3v_1u_3v_2, u_4v_1u_4v_2, u_1v_2u_2v_2, u_2v_2u_3v_2, u_3v_2u_4v_2, u_1v_2u_4v_2\}$  Seperti dilihat pada Gambar 2.3.2.



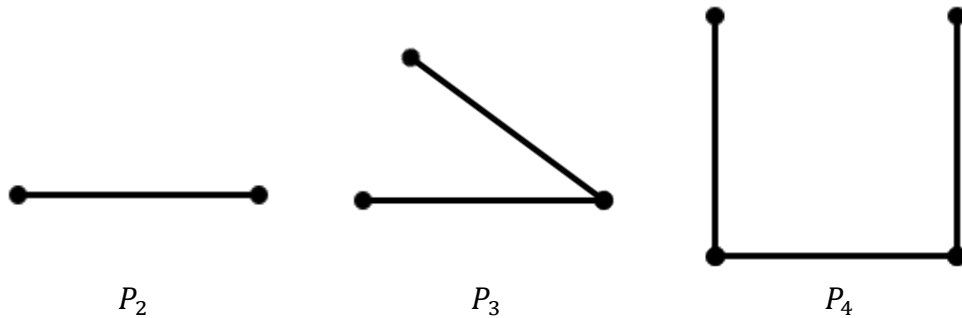
Gambar 2.3. 2 Graf  $G_1 \times G_2$

## 2.4 Jenis-Jenis Graf

Graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus pada setiap graf. Pada subbab ini akan dipaparkan jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini.

**Definisi 2.4.1** *Graf lintasan dengan panjang  $n$  adalah graf dengan  $n$  titik  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dan sisi  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ . Graf lintasan dengan  $n$  titik disimbolkan dengan  $P_n$  [9].*

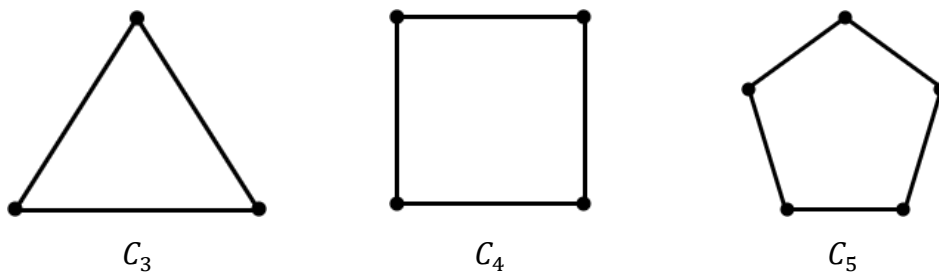
Adapun contoh graf lintasan dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.4. 1 Graf Lintasan

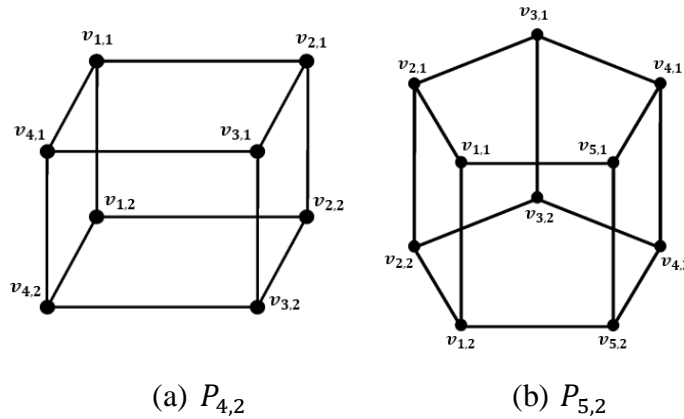
**Definisi 2.4.2** Graf siklus dinotasikan  $C_n$  dengan panjang  $n$ ,  $n \geq 3$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(C_n) = V(P_n)$  dan himpunan sisi  $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$  [6].

Dengan kata lain titik terakhir pada graf  $C_n$  bertetangga dengan titik pertama  $C_n$ .



Gambar 2.4. 2 Graf Siklus

**Definisi 2.4.3** Graf Prisma  $P_{m,n}$  adalah graf yang dibentuk dari hasil kali kartesian antara graf sikel  $C_m$  dengan  $m$  titik dan graf lintasan  $P_n$  dengan  $n$  titik. Himpunan  $V(P_{m,n}) = \{v_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan  $E(P_{m,n}) = \{v_{i,j} v_{i+1,j} : 1 \leq i \leq m - 1, 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{m,j} v_{1,j} : 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\}$  merupakan himpunan titik dan sisinya [10].



Gambar 2.4. 3 (a) Graf Prisma  $P_{4,2}$  (b) Graf Prisma  $P_{5,2}$

Pada Gambar 2.4.3 terdapat dua graf prisma yaitu graf prisma  $P_{4,2}$  dan graf prisma  $P_{5,2}$ . Himpunan titik dan himpunan sisi graf prisma  $P_{4,2}$  adalah:

$$V(P_{4,2}) = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}, v_{4,2}\}$$

$$E(P_{4,2}) = \{v_{1,1}v_{2,1}, v_{2,1}v_{3,1}, v_{3,1}v_{4,1}, v_{1,1}v_{4,1}, v_{1,1}v_{1,2}, v_{2,1}v_{2,2}, v_{3,1}v_{3,2}, v_{4,1}v_{4,2}, v_{1,2}v_{2,2}, v_{2,2}v_{3,2}, v_{3,2}v_{4,2}, v_{1,2}v_{4,2}\}$$

Himpunan titik dan himpunan sisi graf prisma  $P_{5,2}$  adalah:

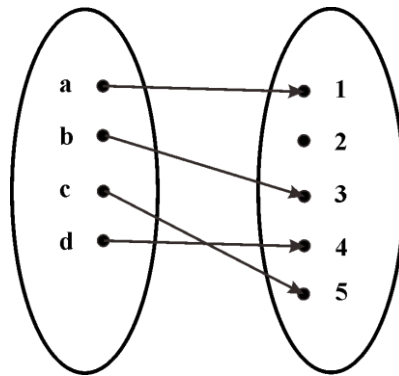
$$V(P_{5,2}) = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{5,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}, v_{4,2}, v_{5,2}\}$$

$$E(P_{5,2}) = \{v_{1,1}v_{2,1}, v_{2,1}v_{3,1}, v_{3,1}v_{4,1}, v_{4,1}v_{5,1}, v_{1,1}v_{5,1}, v_{1,1}v_{1,2}, v_{2,1}v_{2,2}, v_{3,1}v_{3,2}, v_{4,1}v_{4,2}, v_{5,1}v_{5,2}, v_{1,2}v_{2,2}, v_{2,2}v_{3,2}, v_{3,2}v_{4,2}, v_{4,2}v_{5,2}, v_{1,2}v_{5,2}\}$$

## 2.5 Fungsi

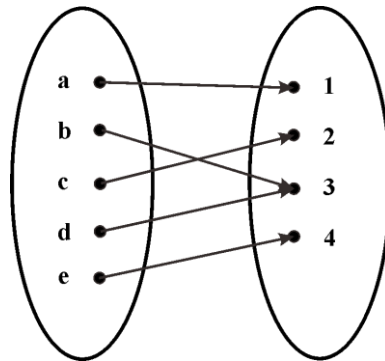
Misalkan diberikan dua himpunan yang tidak kosong yaitu A dan B. Suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A ke tepat satu elemen di himpunan B disebut fungsi dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan  $f: A \rightarrow B$ . Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan (kodomain). Secara umum fungsi dibagi menjadi 3 macam sebagai berikut:

**Definisi 2.5.1** Misalkan  $f: A \rightarrow B$  adalah sebuah pemetaan dari A ke B. Fungsi  $f$  disebut injektif jika untuk setiap  $x_1 \neq x_2$  maka  $f(x_1) \neq f(x_2)$  [11].



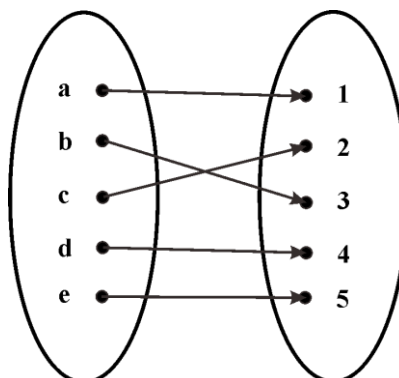
Gambar 2.5. 1 Fungsi Injektif

**Definisi 2.5.2** Misalkan  $f: A \rightarrow B$  adalah sebuah pemetaan dari  $A$  ke  $B$ . Fungsi  $f$  disebut surjektif jika  $f(A) = B$ ; yaitu jika  $\text{range } R(f) = B$  [11].



Gambar 2.5. 2 Fungsi Surjektif

**Definisi 2.5.3** Misalkan  $f: A \rightarrow B$  adalah sebuah pemetaan dari  $A$  ke  $B$ . Fungsi  $f$  disebut bijektif jika fungsi  $f$  merupakan fungsi injektif dan surjektif [11].



Gambar 2.5. 3 Fungsi Bijektif

## 2.6 Pelabelan Rata-Rata

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan rata-rata yang digunakan pada tugas akhir ini.

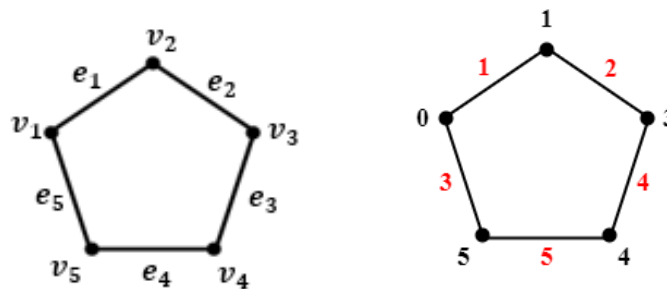


**Definisi 2.6.1** Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif [12].

Pelabelan disebut pelabelan titik jika domain fungsi adalah himpunan titik. Pelabelan disebut pelabelan sisi jika domain fungsi adalah himpunan sisi. Jika domain fungsi adalah himpunan sisi dan titik maka pelabelan disebut pelabelan total.

Sekarang ini sudah banyak jenis pelabelan graf yang dikembangkan. Salah satunya yaitu pelabelan rata-rata. Adapun definisi pelabelan rata-rata adalah sebagai berikut.

**Definisi 2.6.2** Misal  $G(V, E)$  suatu graf dan  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$  dimana  $q$  adalah banyaknya sisi pada  $G$ , fungsi  $f$  disebut pelabelan rata-rata pada  $G$  jika  $f$  injektif dan terdapat fungsi  $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  didefinisikan sebagai:  $f^*(e) = \left\lfloor \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rfloor$  berbeda untuk setiap sisi  $e = (u, v) \in E$ . Graf dikatakan graf rata-rata jika memiliki pelabelan rata-rata [2].



**Gambar 2.6. 1** Pelabelan rata-rata pada graf  $C_5$

Pada Gambar 2.6 terdapat graf  $C_5$  dengan himpunan titiknya adalah  $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisinya  $E(C_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$  dimana  $v_1v_2 = e_1, v_2v_3 = e_2, v_3v_4 = e_3, v_4v_5 = e_4$ , dan  $v_1v_5 = e_5$  diberikan label titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(v_1) &= 0 & f(v_2) &= 1 & f(v_3) &= 3 \\
 f(v_4) &= 4 & f(v_5) &= 5
 \end{aligned}$$

Berdasarkan label titik tersebut dapat dilihat bahwa  $f$  bersifat injektif karena setiap anggota domain memiliki pasangan yang berbeda di kodomain. Sebagai akibat maka diperoleh label sisi sebagai berikut:

$$f^*(v_1v_2) = \left\lfloor \frac{f(v_1) + f(v_2)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{0 + 1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$f^*(v_2v_3) = \left\lfloor \frac{f(v_2) + f(v_3)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1 + 3}{2} \right\rfloor = 2$$

$$f^*(v_3v_4) = \left\lfloor \frac{f(v_3) + f(v_4)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 + 4}{2} \right\rfloor = 4$$

$$f^*(v_4v_5) = \left\lfloor \frac{f(v_4) + f(v_5)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4 + 5}{2} \right\rfloor = 5$$

$$f^*(v_1v_5) = \left\lfloor \frac{f(v_1) + f(v_5)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{0 + 5}{2} \right\rfloor = 3.$$

Berdasarkan label sisi tersebut semua labelnya berbeda sehingga dapat disimpulkan bahwa graf  $C_5$  adalah graf rata-rata.