# MODEL HARGA OPSI EROPA MENGGUNAKAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES

## SKRIPSI



**Oleh :**

**ALYUSI AK YUSUF**

**H111 04 020**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**2007**

# MODEL HARGA OPSI EROPA MENGGUNAKAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES

## SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin, Makassar**

Oleh :


**ALYUSI AK YUSUF**

**H 111 04 020**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**



**2007**

# LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh–sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

**MODEL HARGA OPSI EROPA MENGGUNAKAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES**

adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

**Makassar, 22 Januari 2008**

ALYUSI AK YUSUF

**NIM. H 111 04 020**

# MODEL HARGA OPSI EROPA MENGGUNAKAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES

Disetujui Oleh :

**Pembimbing Utama**

**Drs. Khaeruddin, M.Sc**
NIP. 131 959 060

**Pembimbing Pertama**

**Jusmawati, S.Si, M.Si**
NIP. 132 133 694

Pada Tanggal: 22 Januari 2008

# JURUSAN MATEMATIKA
# FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
# UNIVERSITAS HASANUDDIN

Pada hari ini Selasa, tanggal 22 Januari 2008, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

**" Model Harga Opsi Eropa Menggunakan Persamaan Black-Scholes "**

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 22 Januari 2008

| Panitia Ujian Skripsi | | Tanda Tangan |
|---|---|---|
| 1. **Ketua** | **DR.Loeky Harianto, M.Sc,MS,MA** | ( ) |
| 2. **Sekretaris** | **DR. Syamsuddin. T, M.Sc** | ( ) |
| 3. **Anggota** | **Drs. Khaeruddin, M.Sc** | ( ) |
| 4. **Anggota** | **Jusmawati, S.Si, M.Si** | ( ) |
| 5. **Anggota** | **Raupong, S.Si, M.Si** | ( ) |

# KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Tiada kata yang patut penulis haturkan selain syukur alhamdulillah kepada **Allah SWT** yang Maha Pengasih, Maha penyayang, Maha Kuasa atas limpahan rahmat, nikmat, hidayah dan inayah_Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Strata Satu pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Salam dan salawat juga tak lupa saya panjatkan kepada **Nabiullah Muhammad S.A.W.** Nabi yang selama ini menjadi teladan bagi manusia dalam menjalani kehidupan menuju keselamatan dunia akhirat.

Skripsi ini penulis persembahkan buat **Ayahanda A.K.Yusuf** dan **Ibunda Hj. Sikati, adinda Alyuwardy.AK.Yusuf** dan **Alyusmin.AK.Yusuf** serta **seluruh keluargaku** dan special buat **tante Suri and him husband A.Muh.Iqbal, Om Saharuddin, Pa'ci Daddin, Bapak Said.R** dan **keluarga,** orang-orang yang paling berjasa dalam hidupku dan tak ternilai dengan apapun di dunia ini. Penulis takkan mampu menjadi seperti sekarang ini tanpa **kalian**. Terima kasih banyak atas motivasi, bantuan dan doanya setiap saat sehingga penulis bisa menjadi seperti sekarang dan insyaAllah menjadi orang yang bisa membahagiakan keluarga dan orang-orang di sekitarku, amin!

Pada kesempatan ini pula, penulis dengan tulus dan penuh kerendahan hati menghaturkan ucapan terima kasih kepada :

1. **Bapak Drs. Khaeruddin, M.Sc** dan **Ibu Jusmawati, S.Si, M.Si** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama yang telah membagi ilmunya, membimbing penulis dengan penuh kesabaran dan meluangkan waktunya hingga selesainya tugas akhir ini.
2. **Bapak Drs. Muh. Zakir, M.Si** dan **Bapak Drs. Budi Nurwahyu, MS** selaku ketua jurusan dan ketua program studi matematika FMIPA Unhas yang telah banyak membantu penulis baik dalam perkuliahan maupun dalam penyelesaian skripsi ini.
3. **Bapak Dr.Locky Haryanto,M.Sc,MS,MA, Bapak Dr.Syamsuddin T,M.Sc, dan Bapak Raupong, S.Si, M.Si** selaku penguji yang telah meluangkan waktunya.
4. **Para Dosen Jurusan Matematika FMIPA Unhas** khususnya **Bapak Amran S.Si, M.Si** dan **Bapak Andi Kresna Jaya, S.Si, M.Si** yang telah memberikan banyak ilmu kepada penulis selama proses perkuliahan maupun dalam penyelesaian skripsi ini.
5. **Para Pegawai FMIPA Unhas** yang telah banyak membantu dan mengurus segala keperluan yang mendukung studi penulis.
6. Teman-temanku **Suci, Henny, Nurmah, Nirwana, Fitriati, Munawarah, Ika,S.ked** dan **special my cousin A. Kharisma, my friend A.Nashrum** dan

**adekku manis Leny** yang selama ini banyak berbagi baik suka maupun duka, membantu, dan memberikan semangat buat saya, terima kasih!

7. All my friend **"2004" special buat Masna dan Vivi,S.Si, Q2** (terima kasih banyak atas bantuannya ya!) dan **Kartini,S.Si, Nur, Nensih, Ifa, Yuli, Uni, Cana, Elly, Endang, Bunda, Gemini, Rahma, Ramlah, Arsal, Sugi, Anto, Marwan, Wabah, Ajip, Chullank, Ety, Bhu2l, Heny, Narti, Nindy, Fate, Nuni, Nanna, Rini, Upri, Samba, Iin, Ana, Bita, Ices, Lina, Aryn, Lia, Jeny, Yusri, Rusdin, Bahrun, Harun, Ico, Abek, Ramli, Cha2, Ipo dll. Terima kasih ya!**

8. Kakak **Angkatan'03'(K'Ana** yang baik, terima kasih banyak atas bantuannya), **K'Nani,S.Si, K'Wagun, K'Hasbi, K'Moni,S.Si, K'Agus,S.Si, K'Lela,S.Si, K'Ani, K'Adel, K'Ruri, K'Dewi,S.Si, K'Lisna,S.Si, K'Yuli,S.Si, K'Anshar, K'Asrul, K'Sandi, K'Islah, K'Jumran, K'Nia, K'Niar, K'Ilodll),kanda-kanda angkatan'00','01','02'(K'Ao,K'alim,dan k'nasrum)**dan **adik-adikku Angkatan '05', '06', '07'** serta semua pihak yang tak dapat disebutkan satu persatu terima kasih atas bantuan dan pengertiannya.

Penulis berharap skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca terutama bagi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 22 Januari 2008

penulis

# ABSTRAK

Rumus opsi saham Black-Scholes merupakan terobosan dalam penentuan nilai suatu wahana keuangan derivatif opsi saham. Namun demikian, rumus ini didasari beberapa asumsi yang dalam praktiknya tidak realistis. Pengembangan asumsi tersebut diperlukan agar model penilaian harga opsi saham lebih realistis. Tulisan ini membahas penurunan persamaan differensial parsial Black-Scholes dan solusinya terhadap opsi Eropa pada saham yang berfokus pada solusi analitis. Relaksasi asumsi yang dibahas merupakan asumsi tanpa dividen, suku bunga konstan, volatilitas tetap, dan waktu yang kontinu.

**Kata Kunci : Opsi, *European call*, model harga saham, persamaan differensial parsial Black-Scholes.**

# ABSTRACT

The Black-Scholes options formula is the breakthrough in valuating options prices. However, the formula is heavily based on several assumptions that are not realistic in practice. The extensions of the assumptions are needed to make options pricing model more realistic. This paper has reviewed derivation of the partial differential equation Black-Scholes and solution to European options on shares with the focus on its analytical solutions. The assumptions that are relaxed are non-dividends assumption, constant interest rate, constant volatility, and continuous time.


**Keywords : Options, *European call*, Stock price model, Partial differensial equation Black-Scholes.**

## DAFTAR ISI

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 LATAR BELAKANG

Keuangan merupakan suatu bidang yang memiliki area perkembangan dan perubahan tercepat dalam dunia perusahaan. Karena perubahan cepat inilah, instrument-instrument keuangan modern menjadi sangat kompleks dan salah satunya adalah opsi. Opsi adalah instrument derivatif aset keuangan yang masih relatif baru meskipun aktivitas perdagangannya telah meluas secara cepat sejak adanya pengenalan kontrak tercatat di bursa seperti di *Chicago Board Options Exchange* (CBOE).[http://spicaalmilia.files.wordpress.com/2007/07/perjalanan-sejarah-option.pdf]

Pada tahun 1973, CBOE menjadi bursa terorganisasi pertama di dunia yang memperdagangkan Kontrak Opsi. Opsi yang diperdagangkan saat itu hanyalah opsi pada saham (*stock option*). Sejak itu, pasar opsi terus mengalami pertumbuhan pesat. Saat ini, opsi yang diperdagangkan tidak hanya terbatas pada opsi saham tetapi juga opsi indeks saham (*stock indeks option*), opsi komoditas (*commodity options*), dan lain-lain. Selain menambah volatilitas bursa saham, perdagangan opsi juga sangat berguna bagi perusahaan maupun individu untuk mengurangi resiko keuangan. Selanjutnya dengan adanya opsi, mereka juga bisa mengurangi volatilitas pasar sehingga banyak proyek yang tadinya tidak layak menjadi layak [Sinar Harapan, 2004]. Model-model matematika baru banyak dikembangkan dan digunakan di dalam masalah-masalah yang berhubungan dengan instrument keuangan ini dan dunia perusahaan dan keuangan yang dahulu dijalankan oleh kalangan bisnis, sekarang diawasi oleh orang-orang matematika dan ahli-ahli komputer [Coelen, 2002].

Karangan Black dan Scholes (1973) yang berjudul *The Pricing of Options and Corporate* dianggap sebagai terobosan dalam penaksiran opsi khususnya dan derivatif lain umumnya. Karangan itu bersama dengan karangan Merton (1973) difokuskan pada prinsip dasar model untuk menentukan harga opsi, yang menjadikan pengarang Myron S. Scholes dan Robert C. Merton menerima hadiah Nobel dalam ilmu Ekonomi tahun 1997 dan Fisher Black menerima penghargaan [Coelen, 2002]. Model opsi Eropa yang diusulkan dalam karangan itu dikenal sebagai formula Black-Scholes (BS) [Andriansyah, 2004]. Formula Black-Scholes menunjukkan pentingnya ilmu matematika dalam bidang keuangan. Selain itu, formula ini juga membantu perkembangan dan kesuksesan bidang baru dalam matematika keuangan dan ilmu teknik. [Coelen, 2002]

Formula BS merupakan solusi analitik dari Persamaan Differensial Parsial (PDP) BS :

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=rV$$

dimana $V$ adalah harga dari suatu derivatif pada aset dasar $S$. PDP ini dapat diselesaikan dengan banyak metode namun secara umum diselesaikan melalui 3 metode yaitu (1) Pendekatan analitik, (2) Prosedur numerik, dan (3) Solusi analitik.

Pendekatan analitik biasanya digunakan dalam menaksir opsi Amerika karena syarat-syarat batasnya lebih kompleks daripada opsi Eropa sehingga dengan opsi Amerika kita sulit untuk menemukan formula analitik secara eksak. Yang paling terkenal yaitu prosedur numerik dan contoh penting dari prosedur ini yaitu metode binomial [Cox dkk.,1979] yang memerlukan asumsi-asumsi yang tidak spesifik. Sementara solusi analitik akan menghasilkan formula eksak yang sesuai dengan formula BS [Andriansyah, 2004]

Perluasan model opsi Amerika juga mempunyai daya tarik kuat. Meskipun demikian, penaksiran tipe Amerika itu dianggap lebih sulit daripada tipe Eropa. Pemilik opsi gaya Eropa bisa menggunakan haknya satu kali hanya pada saat opsi jatuh tempo (*expiration date*). Sementara opsi gaya Amerika bisa menggunakan haknya kapan saja di dalam masa berlakunya kontrak opsi. Hal ini yang menyebabkan opsi Amerika sulit untuk menemukan syarat-syarat batas dan nilai optimal.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengangkat topik dalam bidang keuangan khususnya menyangkut persamaan Black-Scholes dalam bentuk tugas akhir dengan judul :

**" Model Harga Opsi Eropa Menggunakan Persamaan Black-Scholes "**

## 1.2 RUMUSAN MASALAH

Masalah yang akan dibahas dalam penulisan ini yaitu :

1. Bagaimana menurunkan persamaan differensial parsial Black-Scholes.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=rV$$

Keterangan: $V$ : Harga dari suatu derivatif

$S$ : Harga saham

$r$ : Suku bunga bebas resiko

$\sigma^2$ :Tingkat variansi imbal hasil (keuntungan maupun kerugian atas modal) pada saham

dengan asumsi :

1) Suku bunga bebas resiko yang besarnya tetap sepanjang waktu *option*.
2) *Return* (laba) harga saham terdistribusi secara lognormal.
3) Volatilitas tetap.
4) Tidak ada pembagian *dividend* (pembagian laba kepada pemegang saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki).
5) Option adalah model " *European Call* ", tidak dapat di-*exercise* sebelum jatuh tempo.
6) Tidak ada biaya transaksi atau pajak.
7) Tidak ada penalty untuk short sales, kapan saja bisa dilaksanakan.

2. Bagaimana menentukan syarat batas dari nilai *European call option* $C(S,T)$ jika $S=0$ dan $S \to \infty$.

3. Bagaimana menemukan solusi persamaan Black-Scholes untuk *European Call.*

## 1.3 BATASAN MASALAH

Tulisan ini dibatasi pada penyelesaian persamaan differensial parsial Black-Scholes untuk *European call option.*

## 1.4 TUJUAN PENULISAN

1. Menurunkan persamaan differensial parsial Black-Scholes.
2. Menentukan harga opsi melalui penyelesaian dari persamaan differensial parsial Black-Scholes untuk *European call option.*

# BAB II

# TEORI PENDUKUNG

## 2.1 PENDAHULUAN

Aset keuangan dapat berbentuk aset real seperti tanah dan gedung tetapi dalam tulisan ini, pembahasan akan lebih mengarah ke saham biasa *(commom stock)*. Saham biasa ini menggambarkan kepemilikan di suatu perusahaan [Coelen, 2002]. Namun sebelumnya dalam bab ini, akan dijelaskan beberapa istilah yang digunakan dalam tulisan ini yang perlu dipahami sebelum mengkaji penyelesaian dari persamaan Black-Scholes. Kemudian menunjukkan kerangka pikir tulisan ini dan beberapa materi yaitu model harga saham, gerakan Brownian, integral Ito, dan transformasi Fourier.

## 2.2 ISTILAH - ISTILAH

### 2.2.1 Derivatif

Dalam dunia keuangan (*finance*), derivatif adalah sebuah kontrak bilateral atau perjanjian penukaran pembayaran yang nilainya diturunkan atau berasal dari produk yang menjadi "acuan pokok" atau juga disebut "produk turunan" (*underlying product*). Pelaku pasar umumnya lebih memilih membuat suatu perjanjian untuk saling mempertukarkan uang atau aset pada masa yang akan datang dengan mengacu pada aset yang menjadi acuan pokok dibandingkan dengan memperdagangkan atau menukarkan secara fisik suatu aset. Selain derivatif, dalam dunia keuangan dikenal juga istilah **portofolio**. Portofolio digunakan untuk menyebutkan kumpulan investasi yang dimiliki oleh institusi ataupun perorangan. Dalam manajemen strategis dan pemasaran, istilah portofolio digunakan untuk menunjukkan sekumpulan produk, proyek, layanan jasa atau merk yang ditawarkan untuk dijual oleh suatu perusahaan.

Derivatif digunakan oleh manajemen investasi/ manajemen portofolio, perusahaan dan lembaga keuangan serta investor perorangan untuk mengelola posisi yang mereka miliki terhadap resiko dari pergerakan harga saham dan komoditas, suku bunga, nilai tukar valuta asing "tanpa" mempengaruhi posisi fisik produk yang menjadi acuannya (*underlying*). Ada banyak sekali instrumen finansial yang dapat dikategorikan dalam kelompok derivatif namun opsi, kontrak berjangka dan swap adalah yang umum dikenal.

Derivatif dapat mengacu pada berbagai jenis aset seperti komoditi, saham atau obligasi, suku bunga, nilai tukar mata uang atau indeks ( seperti indeks pasar saham, indeks harga konsumen (CPI-*Consumer Price Index*), atau bahkan indeks kondisi cuaca ataupun derivatif lainnya). Tampilan dari aset bermaksud dapat menetapkan harga ataupun saat pembayaran. Kegunaan utama dari derivatif ini adalah untuk mengalihkan resiko ataupun mengambil suatu resiko tergantung apakah posisinya sebagai *hedger* (pelaku lindung nilai) atau spekulator. Bermacam-macam rentang nilai antara aset acuan dan alternatif pembayaran menghasilkan beraneka kontrak derivatif yang diperdagangkan di pasaran.

Adapun kegunaan dari derivatif yaitu :

➢ **Lindung nilai**

Salah satu kegunaan derivatif adalah sebagai suatu alat untuk mengalihkan resiko. Contohnya, petani dapat menjual kontrak berjangka atas hasil panenan kepada spekulator sebelum panen dilakukan. Si petani melakukan lindung nilai atas resiko naik atau turunnya harga panenan dan si spekulator menerima pengalihan resiko ini dengan harapan imbalan yang besar. Si petani mengetahui secara pasti nilai jual hasil panen yang akan diperolehnya kelak dan si spekulator akan memperoleh keuntungan apabila harga jual mengalami kenaikan namun apabila harga jual mengalami penurunan maka ia akan mengalami kerugian.

➢ **Spekulasi dan arbitrasi**

*Arbitrasi* atau juga dikenal dengan istilah asing *"arbitrage"* ini bisa diartikan sebagai suatu tindakan mengambil keuntungan dengan memanfaatkan perbedaan antara satu aset acuan dan aset acuan lainnya misalnya dengan memanfaatkan perbedaan antara nilai Indeks LQ-45 (ILQ-45) di Bursa Efek Jakarta (spot market) dan nilai ILQ-45 pada KBIE di Bursa Efek Surabaya (futures market), jadi selain mengambil posisi di BES, juga harus mengambil posisi di BEJ sehingga secara simultan mengambil posisi yang berlawanan antara di BEJ dan BES.

Spekulator dapat bertransaksi dengan spekulator lainnya juga dengan orang yang membutuhkan lindung nilai (*hedger*). Pada umumnya transaksi pasar-pasar derivatif lebih didominasi oleh perdagangan spekulatif daripada perdagangan lindung nilai dalam artian yang sesungguhnya. [Wikipedia, 2007]

Sebagai tambahan, dalam dunia keuangan dikenal juga istilah **efek** atau **sekuriti** yang merupakan suatu surat berharga yang bernilai serta dapat diperdagangkan. Sekuriti dapat dikategorikan sebagai hutang dan ekuitas seperti obligasi dan saham. Perusahaan ataupun lembaga yang menerbitkan sekuriti disebut *penerbit*. sekuriti tesebut dapat terdiri dari surat pengakuan hutang, surat berharga komersial, saham, obligasi, unit penyertaan kontrak investasi kolektif (seperti reksadana, kontrak berjangka atas efek, dan setiap derivatif dari efek. Kualifikasi dari suatu sekuriti adalah berbeda-beda sesuai dengan aturan di masing-masing negara. [Wikipedia, 2007]

### 2.2.2 Opsi

Opsi adalah kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemegang kontrak itu untuk membeli (*call options*) atau menjual (*put options*) suatu aset tertentu dengan harga tertentu (*strike price/exercise price* atau harga patokan/tebus) dalam jangka waktu tertentu. [Sinar Harapan, 2004]

Pada dasarnya ada 2 tipe opsi :

**Opsi beli**, atau yang lebih dikenal dengan istilah ***call option***, adalah suatu hak untuk membeli sebuah asset pada harga kesepakatan (*strike price*) dan dalam jangka waktu tertentu yang disepakati, baik pada akhir masa jatuh tempo ataupun di antara tenggang waktu masa sebelum jatuh tempo.

**Opsi jual**, atau yang lebih dikenal dengan istilah ***put option***, adalah suatu hak untuk menjual sebuah asset pada harga kesepakatan (*strike price*) dan dalam jangka waktu tertentu yang disepakati, baik pada akhir masa jatuh tempo ataupun diantara tenggang waktu masa sebelum jatuh tempo.

Instrumen ini disebut opsi oleh karena perjanjian ini memberikan "**hak**" kepada pemegang opsi untuk menentukan apakah akan melaksanakan (biasa disebut *exercise*) atau tidak opsi yang dipegangnya, yaitu hak membeli (pada opsi beli) atau hak menjual (pada opsi jual) dan pihak yang menjual opsi atau yang biasa disebut **penerbit opsi** "wajib" untuk memenuhi hak opsi dari pemegang opsi tersebut sesuai dengan ketentuan yang disepakati.

**Nilai kontrak opsi**

Kontrak opsi adalah mempertemukan antara suatu perkiraan harga dari pihak penjual (penerbit opsi) dan pihak pembeli (pemegang opsi).

Adapun istilah-istilah yang digunakan dalam perbandingan harga kesepakatan dan harga saham pada opsi beli (*call option*) yaitu

*In-the-money* = harga kesepakatan (*strike price*) kurang dari harga saham pada saat transaksi.

*At-the-money* = harga kesepakatan sama dengan harga saham pada saat transaksi.

*Out-of-the-money* = harga kesepakatan lebih besar dari harga saham pada saat transaksi.

dan pada opsi jual (*put option*) yaitu

*In-the-money* = harga kesepakatan lebih besar dari harga saham pada saat transaksi.

*At-the-money* = harga kesepakatan sama dengan harga saham pada saat transaksi.

*Out-of-the-money* = harga kesepakatan (strike price) kurang dari harga saham pada saat transaksi.

**Premi opsi**

Nilai premi opsi adalah jumlah antara nilai intrinsik dan nilai waktu, atau:

Premi opsi = Nilai Intrinsik + Nilai Waktu

Nilai premium opsi terdiri dari 2 macam nilai yaitu :

1. Nilai intrisik merupakan suatu nilai nyata dari premi sebuah opsi yang merupakan selisih antara harga kesepakatan dan harga aset acuan. Suatu opsi yang mempunyai nilai intrisik disebut *in-the-money*.

   - Nilai intrisik pada opsi beli adalah harga saham dikurangi harga kesepakatan.
   - Nilai intrisik pada opsi jual adalah harga kesepakatan dikurangi harga saham
   - Jika selisinya adalah negatif maka nilai intrisik dianggap nol ( dan ini disebut out-of-the-money)

2. Nilai waktu atau *time value* (diistilahkan juga dengan nilai volatilitas [Sinar Harapan, 2004] yaitu harga yang bersedia dibayar oleh pembeli opsi dengan berdasarkan pada prediksi pembeli atas kemungkinan dari pergerakan harga aset acuan ke arah yang menguntungkan pembeli opsi (suatu nilai yang melebihi harga kesepakatan). Nilai waktu ini didapatkan dari pengurangan atas premi sebuah opsi dengan nilai intrisiknya. Nilai waktu ini berhubungan langsung dengan sisa waktu yang dimiliki oleh suatu opsi sebelum tanggal jatuh temponya.

**Harga premi opsi**

Faktor harga premi dari suatu opsi dipengaruhi oleh berbagai faktor termasuk suplay dan permintaan pasar dimana opsi tersebut diperdagangkan sama seperti halnya harga saham. Sesuatu yang terjadi pada seluruh pasar investasi dan ekonomi global adalah merupakan dua faktor yang berpengaruh besar terhadap harga opsi. Instrumen yang digunakan sebagai acuan serta bagaimana tindak-tanduknya pada saat ini adalah merupakan faktor yang spesifik. Faktor gejolak harga juga merupakan suatu faktor yang penting dimana investor akan berusaha untuk memperkirakan pergerakan suatu opsi dalam *in-the-money.*

Dilihat dari cara pelaksanaan sebuah opsi maka terdapat empat gaya yang dikenal saat ini yaitu :

**Opsi Eropa** : yaitu suatu kontrak opsi yang hanya bisa dilaksanakan pada hari terakhir saat tanggal jatuh tempo masa berlakunya opsi tersebut.

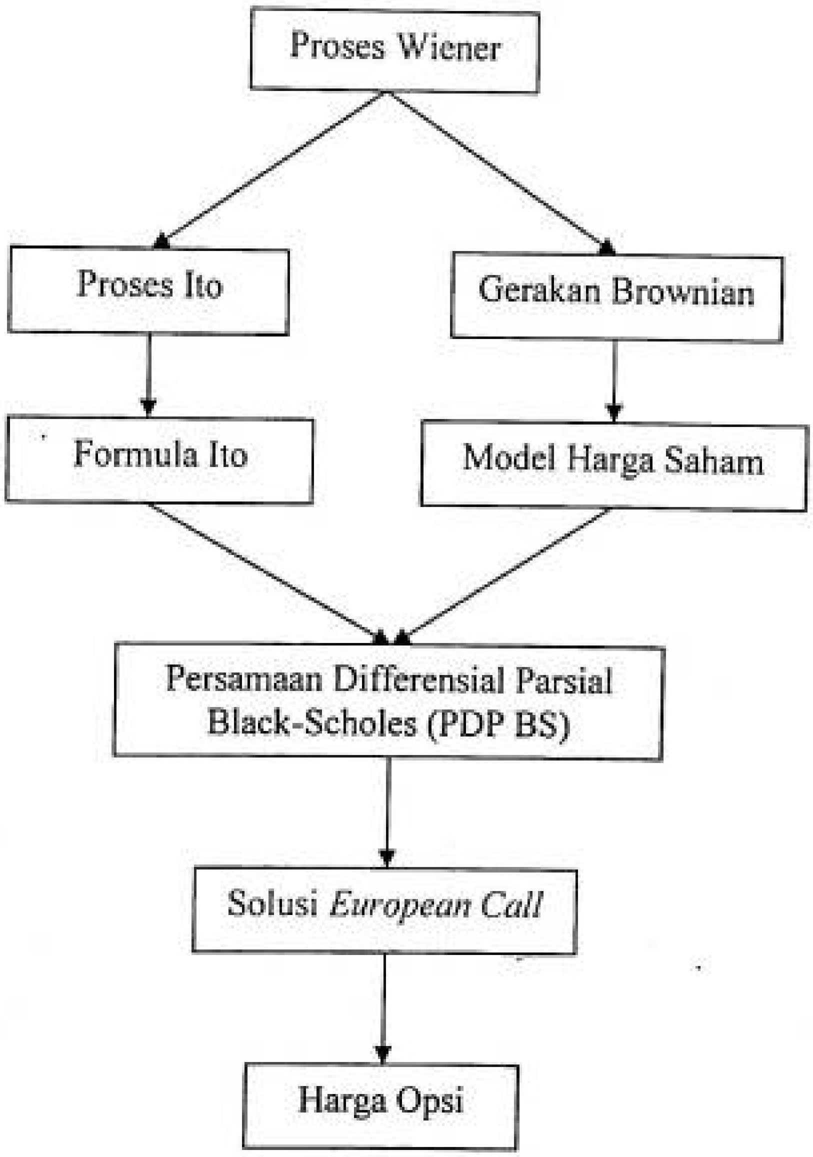
**Opsi Amerika** : yaitu suatu kontrak opsi yang bisa dilaksanakan kapan saja di dalam masa berlakunya kontrak opsi.

**Opsi Bermuda** : yaitu suatu kontrak opsi yang dapat dilaksanakan pada saat tanggal jatuh tempo ataupun sebelum jatuh tempo. Ini merupakan kombinasi dari opsi Eropa dan opsi Amerika.

**Opsi bersyarat** atau biasa juga disebut *barrier option* yaitu suatu opsi yang mensyaratkan keharusan dicapainya suatu harga tertentu pada aset acuan sebelum pelaksanaan opsi dapat dilakukan.

[Wikipedia, 2007]

## 2.3 KERANGKA PIKIR



## 2.4 MODEL HARGA SAHAM

Model harga saham merupakan pengembangan dari proses Wiener, disimbolkan dengan $dz$. Pengembangan proses Wiener untuk variable $x$ didefinisikan dalam suku $dz$ sebagai berikut :

$$dx = adt + bdz \tag{2.1}$$

dimana $a$ dan $b$ adalah konstan.

Untuk memahami persamaan (2.1), pertimbangkan 2 komponen secara terpisah. Suku $adt$ berarti bahwa $x$ mempunyai tingkat *drift* yang diharapkan sebesar $a$ persatuan waktu. Tanpa suku $dz$, persamaan ini

$$\begin{aligned} dx &= adt \\ \frac{dx}{dt} &= a \\ x &= x_0 + at \end{aligned}$$

dimana $x_0$ adalah nilai pada waktu $t = 0$. Dalam periode waktu sepanjang $T$, $x$ meningkat sejumlah $aT$. Suku $bdz$ dapat dianggap sebagai jumlah *noise* atau *variability*/ keberagaman alur yang ditunjukkan oleh $x$. Jumlah dari *noise* atau *variability* ini adalah $b$ kali sebuah persamaan Wiener ($bdz$). Proses Wiener kadang-kadang disebut sebagai proses gerakan Brownian, $dB$ yang akan diuraikan dalam subbab berikutnya.

Sebenarnya model ini gagal untuk menerapkan aspek kunci dari harga saham yang menyatakan persentase keuntungan yang diterima oleh investor dari suatu saham *independent* dengan harga saham ($S$). Contoh ilustratif, jika investor menerima keuntungan sebesar 14 % setiap tahunnya ketika harga saham \$10. Maka *ceteris paribus* (tetap), mereka juga akan menerima 14% pertahun keuntungan ketika \$50.

Jelas asumsi untuk tingkat keuntungan konstan $a$ dalam persamaan (2.1) tidak sesuai dan perlu untuk diubah. Jadi, jika $S$ adalah harga saham pada waktu $t$ maka tingkat *drift* yang diharapkan di $S$ akan diasumsikan menjadi $\mu S$ untuk beberapa konstan parameter $\mu$. Ini berarti bahwa dalam interval waktu $\Delta t$ yang tak lama, perubahan/ peningkatan $S$ ($\Delta S$) yang diharapkan adalah $\mu S \Delta t$. Parameter $\mu$ adalah tingkat laba/ keuntungan yang diperkirakan pada saham, biasa juga diartikan sebagai ukuran tingkat rata-rata pertumbuhan saham. Model $\mu$ diasumsikan memiliki suku bunga bebas resiko pada suatu *bond* (obligasi).

Jika *volatility* ($\sigma$) dari harga saham sama dengan 0 maka model ini meliputi

$$\Delta S = \mu S \Delta t .$$

Di limit $\Delta t \to 0$

$$dS = \mu S dt$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{2.2}$$

dimana $S_0$ dan $S_T$ adalah harga saham pada waktu 0 dan waktu $T$. Persamaan (2.2) menunjukkan bahwa ketika tingkat variansi nol, harga saham tumbuh berlipat ganda secara kontinu dengan tingkat $\mu$ persatuan waktu.

Dalam praktik, tentu harga saham menunjukkan volatilitas. Satu asumsi yang beralasan bahwa *variability*/ keberagaman persentase keuntungan dalam periode waktu $\Delta t$ dari harga saham tidak sama. Dengan kata lain, persentase keuntungan investor tidak tentu ketika harga saham \$50 dan ketika \$10. Ini memberi kesan bahwa standar deviasi dari perubahan periode waktu $\Delta t$ yang tidak lama akan menjadi proporsional dari harga saham. Modelnya adalah

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dB \tag{2.3}$$

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dB.$$

Model kelakuan harga saham ini digunakan secara luas. Variabel $\sigma$ adalah *volatility* harga saham. Variabel $\mu$ adalah tingkat laba yang diharapkan.

## 2.4 GERAKAN BROWNIAN

Gerakan Brownian $B(t)$ mempunyai 3 sifat :

1. $B(0) = 0$,
2. $B(t)$ adalah fungsi kontinu dari $t$,
3. Jika $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n$ maka peubah-peubah acak kenaikan

$$B(t_1) - B(t_0), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

adalah saling bebas, berdistribusi normal, dan

$$E[B(t_{k+1}) - B(t_k)] = 0,$$
$$E[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 = t_{k+1} - t_k.$$

[Steven E. Shreve, 1996]

Kejadian gerakan Brownian dari waktu 0 sampai $T$ disebut suatu alur (*path*) dari proses pada interval $[0,T]$. Ada 5 sifat penting dalam alur gerakan Brownian. Alur $B(t)$, $0 < t < T$

1. merupakan fungsi kontinu di $t$,
2. tidak monoton pada sebarang interval, bagaimanapun kecilnya interval tersebut,
3. tidak differensiabel di sebarang titik,
4. mempunyai variasi tak berhingga pada sebarang interval, bagaimanapun kecilnya interval itu,
5. mempunyai variasi kuadrat di $[0,t]$ sama dengan $t$, $\forall t$.

[Coelen, 2002]

**Definisi 2.5.1 (Variasi Pertama) [Steven E. Shreve, 1996]**

Misalkan $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ adalah partisi dari $[0,T]$, yaitu

$$0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n = T. \tag{2.4}$$

Mesh dari partisi didefinisikan oleh

$$\|\Pi\| = \max\ (t_{k+1} - t_k).$$

Variasi kuadrat berperan sangat penting dalam gerakan Brownian dan kalkulus stokastik.

**Definisi 2.5.2 (Variasi Kuadrat) [Steven E. Shreve, 1996]**

Variasi kuadrat dari fungsi $f$ sepanjang interval $[0,t]$ didefinisikan:

$$[f](t) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^2 .$$

Jika $f$ adalah fungsi yang differensiabel maka $[f](t) = 0$. Bukti dari pernyataan tersebut dapat diperlihatkan di bawah ini.

**Bukti :**

Misalkan $f$ differensiabel. Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata yang menyatakan bahwa di setiap subinterval $[t_k, t_{k+1}]$ terdapat sebuah titik $t_k^*$ sedemikian sehingga

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = f'(t_k^*)(t_{k+1} - t_k) .$$

Maka diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n-1} | f(t_{k+1}) - f(t_k) |^2 = \sum_{k=0}^{n-1} | f'(t_k^*) |^2 \, (t_{k+1} - t_k)^2$$

$$\leq \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} | f'(t_k^*) |^2 \, (t_{k+1} - t_k)$$

dan

$$[f](T) \leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} | f'(t_k^*) |^2 \, (t_{k+1} - t_k)$$

$$= \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \int_0^T | f'(t) |^2 \, dt$$

$$[f](T) = 0. \tag{2.5}$$

**Definisi 2.5.3 (gerakan Brownian geometri) [Steven E. Shreve, 1996]**

gerakan Brownian geometri adalah

$$S(t) = S(0)e^{\sigma B(t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \tag{2.6}$$

dimana $\mu$ dan $\sigma > 0$ adalah konstan.

Aplikasi dari teori gerakan Brownian $B(t)$ dipergunakan untuk menghitung perilaku dari pergerakan harga saham. Aplikasi teori ini yang dipergunakan oleh L.Bachelier tahun 1900 [Klebaner, 1998] mengasumsikan bahwa pergerakan harga saham adalah independent. Maksudnya, perubahan harga saham saat ini tidak ada hubungannya dengan perubahan harga saham di masa mendatang atau harganya di masa lalu. Kondisi ini disebut juga dengan *random walk* [Wikipedia, 2007].

## 2.6 INTEGRAL ITO

Di bagian ini akan diperkenalkan integral stokastik mengenai gerakan Brownian. Integral stokastik ini secara umum disebut integral Ito. Untuk memperoleh formula Black-Scholes, kita perlu mengetahui definisi integral stokastik yaitu

$$\int_0^T X(t)dB(t).$$

Jika $X(t)$ adalah konstan $c$ maka $\int_0^T c\,dB(t) = c(B(T) - B(0))$. Integral dari $(0,T)$ merupakan jumlah dari integral-integral subinterval

$[0,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_3),...,(a_{n-1},T]$. Sehingga jika $X(t)$ bernilai $c_i$ di setiap subinterval maka integral dari $X$ terhadap $B$ lebih mudah didefinisikan.

Pertama kita pertimbangkan integral-integral dari proses sederhana $e(t)$ yang bergantung pada $t$ dan tidak pada $B(t)$. Proses deterministik sederhana $e(t)$ adalah proses dimana terdapat waktu $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ dan konstan $c_0,c_1,c_2,c_{n-1}$, sedemikian sehingga

$$e(t)=\begin{cases} c_0 & if \quad t=0 \\ c_i & if \quad t_i<t\le t_{i+1}, i=0,...,n-1. \end{cases}$$

Maka dari itu, integral Ito $\int_0^T X(t)dB(t)$ didefinisikan sebagai jumlah

$$\int_0^T e(t)dB(t)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i(B(t_{i+1})-B(t_i)).$$

Integral Ito dari proses sederhana merupakan variabel acak dengan empat sifat berikut:

1. Bersifat linear : Jika $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah proses sederhana dan $\alpha$ dan $\beta$ adalah konstan maka

$$\int_0^T(\alpha X(t)+\beta Y(t))d(B(t))=\alpha\int_0^T X(t)d(B(t)+\beta\int_0^T Y(t)d(B(t)).$$

2. Integral dari fungsi indikator pada interval $I_{[a,b]}(t)=1$ ketika $t\in[a,b]$ dan 0 lainnya adalah $B(b)-B(a)$, $0<a<b<T$,

$$\int_0^T I_{[a,b]}(t)d(B(t)) = B(b) - B(a).$$

3. Meannya nol : $E\int_0^T X(t)dB(t) = 0.$

4. Bersifat Isometri :

$$E\left(\int_0^T X(t)d(B(t))\right)^2 = \int_0^T E(X^2(t))dt.$$

[Coelen, 2002]

Berdasarkan sifatnya, gerakan Brownian mempunyai variasi kuadrat pada $[0,t]$ yang sama dengan $t, \forall t$. Ini juga dapat dinyatakan sebagai berikut

$\int_0^t (dB(s))^2 = \int_0^t ds = t$ atau dalam notasi differensial $(dB(t))^2 = dt$.

**Bukti :**

Misalkan $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ adalah partisi dari $[0,T]$.

Pertimbangkan persamaan di bawah

$$Q = [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 - (t_{k+1} - t_k).$$

Berdasarkan sifat gerakan Brownian, ekspektasi dari persamaan di atas adalah

$$\begin{aligned}E(Q) = E\{[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 - (t_{k+1} - t_k)\} &= E\{[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2\} - E(t_{k+1} - t_k) \\ &= (t_{k+1} - t_k) - (t_{k+1} - t_k) \\ &= 0\end{aligned}$$

dan variansinya adalah

$$\operatorname{var}[(B(t_{k+1})-B(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)] = E\left\{\left[(B(t_{k+1})-B(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)\right]^2\right\} - \left(E\left\{[B(t_{k+1})-B(t_k)]^2-(t_{k+1}-t_k)\right\}\right)$$

$$= E\left\{\left[(B(t_{k+1})-B(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)^2\right]^2\right\}-0$$
$$= E(B(t_{k+1})-B(t_k))^4-2(t_{k+1}-t_k)E(B(t_{k+1})-$$

$$B(t_k))^2-E((t_{k+1}-t_k)^2) \qquad (2.7)$$

sebagai catatan, jika $X$ adalah distribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma^2$ maka akan diperoleh

$$E(X^4)=M^{IV}(0)$$

$$M(t) \ = e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$
$$M'(t) \ = \sigma^2 te^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$
$$M''(t) \ = \sigma^2 e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}+\sigma^4t^2e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$
$$M'''(t) = 3\sigma^4te^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}+\sigma^6t^3e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

$$M^{IV}(t) \ = 3\sigma^4e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}+3\sigma^6t^2e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}+3\sigma^6t^2e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}+\sigma^8t^4e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$
$$M^{IV}(0) \ = 3\sigma^4$$

sehingga persamaan (2.7) sama dengan

$$\operatorname{var}[(B(t_{k+1})-B(t_k))^2-(t_{k+1}-t_k)] = 3(t_{k+1}-t_k)^2-2(t_{k+1}-t_k)^2+(t_{k+1}-t_k)^2$$
$$= 2(t_{k+1}-t_k)^2.$$

Ketika $(t_{k+1}-t_k)$ kecil maka $(t_{k+1}-t_k)^2$ sangat kecil dan mempunyai pendekatan persamaan

$$(B(t_{k+1})-B(t_k))^2 \cong (t_{k+1}-t_k)$$

dapat ditulis secara informal seperti

$$dB(t)\ dB(t) = dt\,. \tag{2.8}$$

Dengan menggunakan sifat ini dan mengaplikasikan formula Taylor's, formula Ito's menyatakan bahwa jika $f(x)$ adalah fungsi yang terdifferensial 2 kali maka $\forall t$ berlaku

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds.$$

dan dalam notasi differensial menjadi

$$d(f(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt.$$

Selanjutnya kita definisikan proses Ito. Misalkan $Y(t)$ adalah proses integral

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s).$$

Proses Ito adalah integral Ito plus yang diadaptasi dari proses kontinu variasi berhingga. Proses $Y$ disebut Ito jika untuk setiap $0 \le t \le T$, $Y$ dapat dinyatakan sebagai

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)\,. \tag{2.9}$$

Secara umum, jika $Y$ adalah **proses Ito** maka $Y$ mempunyai differensial stokastik pada $[0,T]$ sebagai berikut

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t) \tag{2.10}$$

untuk $0 \le t \le T$. Fungsi $\mu$ sering disebut koofisien *drift* dan fungsi $\sigma$ disebut koofisien difusi.

Jika $f(x,t)$ terdiferensial dua kali secara kontinu di $x$ dan terdiferensial secara kontinu di $t$ dan $X(t)$ dinyatakan sebagai proses Ito, maka

$$df(x(t),t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)dX(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t))^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)dt. \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) merupakan formula Ito's dan merupakan kasus yang akan digunakan untuk menghitung persamaan differensial parsial Black-Scholes di bagian pembahasan. [Coelen, 2002]

## 2.7. TRANSFORMASI FOURIER

Sifat-sifat dari transformasi Fourier yaitu

1. Pasangan transformasi Fourier

   Transformasi Fourier dari $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, menghasilkan suatu fungsi baru $F(\xi)$ yang didefinisikan dengan formula

$$\mathcal{F}[f] = F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

   dan invers dari transformasi Fourier $F(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$ akan kembali menghasilkan fungsi awal $f(x)$ yang memenuhi

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\xi x}d\xi.$$

2. Transformasi Linear

Transformasi Fourier merupakan suatu transformasi linear dalam suatu ruang fungsi-fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathfrak{F}\,[af+bg]=a\,\mathfrak{F}[f]+b\,\mathfrak{F}[g].$$

3. Turunan parsial transformasi

Jika fungsi yang ditransformasi adalah suatu turunan parsial dari fungsi $u(x,\tau)$ terhadap $x$ maka aturan transformasinya yaitu

$$\mathfrak{F}[u_x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,t)e^{-i\xi x}\,dx=i\xi\,\mathfrak{F}[u]$$

$$\mathfrak{F}[u_{xx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)e^{-i\xi x}\,dx=-\xi^2\,\mathfrak{F}[u].$$

Pada sisi lain, jika kita mentransformasi turunan parsial $u_t(x,t)$ maka hasil transfomasinya diberikan oleh

$$\mathfrak{F}[u_t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\xi x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}[u]$$

$$\mathfrak{F}[u_{tt}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}(x,t)e^{-i\xi x}\,dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathfrak{F}[u]$$

4. Sifat konvolusi

$$\mathfrak{F}[f\cdot g]=\mathfrak{F}[f]\,\mathfrak{F}[g].$$

dimana $(f\cdot g)$ dinyatakan dalam formula berikut

$$(f\cdot g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)\,d\xi.$$ [Stanley J., 1982]

# BAB III

# STUDI TENTANG MODEL HARGA OPSI EROPA MENGGUNAKAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES

## 3.1 Pendahuluan

Ada 3 subbab utama yang akan dikaji dalam bab ini. Yang pertama adalah penurunan persamaan differensial parsial Black-Scholes yang menunjukkan pentingnya peran model harga saham, gerakan Brownian, dan integral Ito. Di subbab berikutnya mengkaji tentang kondisi akhir yang akan diperoleh dan bagaimana syarat batas dari *European call option*. Dan dalam subbab terakhir, dibahas tentang solusi analitik persamaan Black-Scholes bentuk *European call option*. Solusi inilah yang merupakan harga opsi yang menjadi tujuan utama yang ingin ditentukan dalam tulisan ini.

## 3.2 Penurunan Persamaan Differensial Parsial Black-Scholes

Jika didefinisikan

$$f(t,x) = S(0)e^{\sigma x+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

maka dari gerakan Brownian geometri persamaan (2.11) diperoleh

$$S(t) = f(t, B(t))$$

sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial t}=(\mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2)f, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\sigma f, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\sigma^2 f.$$

Sesuai formula Ito's persamaan (2.11),

$$\begin{aligned} dS(t) &= df(t,B(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial x}dB+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dBdB \\ &= (\mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2)f\,dt+\sigma f\,dB+\tfrac{1}{2}\sigma^2 f\,dBdB \end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (2.8) maka diperoleh

$$\begin{aligned} dS(t) &= (\mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2)f\,dt+\sigma f\,dB+\tfrac{1}{2}\sigma^2 f\,dt \\ &= \mu S(t)\,dt+\sigma S(t)\,dB(t). \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh gerakan Brownian geometri dalam bentuk differensial. Dalam hal ini adalah model harga saham dan proses Ito sesuai dengan persamaan (2.3) dan (2.10).

$$dS(t)=\mu S(t)\,dt+\sigma S(t)\,dB(t)$$

dan gerakan Brownian geometri dalam bentuk integral yaitu proses Ito dalam persamaan (2.9)

$$\int_0^t d(S(u))=\int_0^t \mu S(u)\,du+\int_0^t \sigma S(u)\,dB(u)$$

$$S(t)=S(0)+\int_0^t \mu S(u)\,du+\int_0^t \sigma S(u)\,dB(u). \tag{3.1}$$

Suku kedua pada ruas kanan persamaan (3.1) merupakan suatu integral Riemann

$$F(t) = \int_0^t \mu S(u)\,du$$

yang differensiabel dengan $F'(t) = \mu S(t)$. Berdasarkan persamaan (2.5), suku ini mempunyai variasi kuadrat nol. Sedangkan suku ketiga pada ruas kanan persamaan (3.1) merupakan suatu integral Ito

$$G(t) = \int_0^t \sigma\, S(u)\,dB(u)$$

yang tidak differensiabel sehingga mempunyai variasi kuadrat

$$[G](t) = \int_0^t \sigma^2 S^2(u)\,du\,.$$

Dengan demikian variasi kuadrat dari $S$ diberikan oleh variasi kuadrat dari $G$. Dalam notasi differensial, dituliskan

$$dS(t)\,dS(t) = (\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t))^2 = \sigma^2 S^2(t)\,dt\,. \tag{3.2}$$

Dalam subbab berikutnya, akan ditentukan **harga dari suatu derivatif**, $V(S,t)$. Model untuk suatu saham kita peroleh dari suatu proses Ito yang didefinisikan dalam persamaan (2.10). Maka dari itu, kita misalkan fungsi $V(S,t)$ terdifferensial dua kali di $S$ dan terdifferensial di $t$. Dengan menggunakan persamaan (2.11), diperoleh

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS\,dS\,.$$

Berdasarkan persamaan (3.2),

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \,. \tag{3.3}$$

Dengan mensubstitusikan $dS$ pada persamaan (2.3) ke persamaan (3.3) diperoleh:

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \\ &= \sigma S dB \frac{\partial V}{\partial S} + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sekarang pertimbangkan nilai dari suatu portofolio yang dibangun dengan *long* satu opsi, $V$ dan *short* sejumlah $\frac{\partial V}{\partial S}$ saham. *Long* disini berarti membeli saham sedangkan *short* berarti meminjam saham yang bebas resiko dari suatu perusahaan dan menjual kembali saham yang dipinjam tersebut dengan harga yang beredar di pasar. *Long* dan *short* merupakan bentuk dalam *hedging*. Nilai dari portofolio ini yang disimbolkan dengan $\pi$ yaitu

$$\pi = V - \frac{\partial V}{\partial S} S \,. \tag{3.5}$$

Perubahan nilai dari portofolio yang disimbolkan dengan $d\pi$ dalam interval waktu yang tidak lama $dt$ adalah

$$d\pi = dV - \frac{\partial V}{\partial S} dS \,. \tag{3.6}$$

Substitusi persamaan (2.3) dan (3.4) ke dalam persamaan (3.6) untuk $dV$ dan $dS$ sehingga diperoleh

$$d\pi = \sigma S dB \frac{\partial V}{\partial S} + \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt - \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dB) \tag{3.7}$$

$$= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt . \tag{3.8}$$

Catatan penting dalam hal ini adalah portofolio ini sama sekali *riskless* (tidak beresiko) karena tidak memuat suku acak gerakan Brownian. Karena portofolio ini tidak memuat resiko, portofolio yang diperoleh harus sama dengan sekuriti bebas resiko lainnya. Jika diperoleh lebih dari ini maka *arbitrageurs* (orang-orang yang melakukan arbitrasi) dapat membuat suatu keuntungan dengan melakukan *shorting*. Keuntungan *shorting* yang diperoleh ini digunakan untuk membeli portofolio tersebut. Jika portofolio diperoleh ternyata kurang maka *arbitrageurs* dapat membuat suatu *riskless* keuntungan dengan *shorting* portofolio dan membeli sekuriti *risk-free* (bebas resiko). Berikut suatu portofolio *riskless*

$$d\pi = r\pi \, dt \tag{3.9}$$

dimana $r$ adalah suku bunga bebas resiko. Mengsubstitusi $d\pi$ dan $\pi$ dari persamaan (3.5) dan (3.8) sehingga menghasilkan

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt . \tag{3.10}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3.10) maka dihasilkanlah suatu **persamaan differensial parsial Black-Scholes**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \tag{3.11}$$

## 3.3 *European Call Option*

Syarat batas diperlukan dalam penyelesaian persamaan Black-Scholes. Dalam tulisan ini, kita akan berhubungan dengan harga dari *European Call Option* $C(S,t)$ dengan harga kesepakatan (*exercise price*) $E$ dan tanggal jatuh tempo (*expiration date*) $T$.

Kondisi akhir pada $t = T$ dapat diperoleh dari definisi *call option* (opsi beli). Jika pada tanggal jatuh tempo, $S > E$ maka opsi beli akan bernilai $S - E$. Dalam keadaan seperti ini, pembeli opsi akan menggunakan haknya untuk membeli saham sebesar $E$ kemudian kalau mau, pembeli opsi bisa segera menjualnya dengan harga $S$ sehingga pembeli opsi untung sebesar $S - E$. Jika pada tanggal jatuh tempo $S < E$ maka pembeli opsi tidak perlu *exercise call option*-nya. Soalnya ia dapat membeli saham yang lebih murah dari $E$ di pasar. Dalam kasus ini, pembeli opsi membiarkan kontrak *call option* berakhir tanpa digunakan sehingga pembeli opsi cuma rugi sebesar harga yang ia bayar untuk beli kontrak itu (harga ini disebut **premi** dari opsi). Pada waktu $t = T$, nilai atau harga opsi yang dikenal dengan *payoff* (keuntungan) adalah

$$C(S,T) = \max(S - E, 0). \tag{3.12}$$

Ini kondisi akhir untuk PDP BS bentuk *European Call* sekaligus sebagai syarat awal.

Untuk menentukan syarat batas, kita pertimbangkan terlebih dahulu nilai $C$ ketika $S = 0$ dan $S \to \infty$. Jika $S = 0$ maka dari persamaan (2.3) diperoleh $dS = 0$.

Ini berarti bahwa $S$ tidak pernah berubah. Jika pada tanggal jatuh tempo $S = 0$ maka dari persamaan (3.12) *payoff* harus 0. Maka dari itu, ketika $S = 0$, diperoleh

$$C(0,T) = 0 \; .$$

Sekarang ketika $S \to \infty$ maka semakin mungkin opsi akan di-*exercise* dan *payoff* akan menjadi sebesar $S - E$. Harga kesepakatan menjadi sangat kurang di $S \to \infty$ sehingga harga opsi ekuivalen dengan

$$C(S,T) \approx S \text{ di } S \to \infty$$

### 3.4 Solusi Persamaan Black-Scholes untuk *European Call*

Untuk menyelesaikan persamaan Black-Scholes, kita perlu mentransformasi persamaan ke dalam persamaan yang akan kita kerjakan. Langkah pertama yaitu menghilangkan suku $S$ dan $S^2$ dalam persamaan differensial Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV \, . \tag{3.13}$$

Untuk melakukan ini, misalkan perubahan dari variabel-variabelnya menjadi

$$S = Ee^x \tag{3.14}$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{3.15}$$

$$V = Ev(x,\tau) \, . \tag{3.16}$$

Menggunakan aturan rantai dari kalkulus untuk mentransformasi turunan parsial yang kita punya ke dalam fungsi dua variabel

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}. \tag{3.18}$$

Berdasarkan persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16) maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad \frac{\partial \tau}{\partial S} = 0 .$$

Selanjutnya mensubstitusi persamaan di atas ke dalam persamaan (3.17) dan persamaan (3.18) dan menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{S} \\ &= \frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \tau}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 E\frac{\partial v}{\partial \tau} \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S}\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial S} \\ &= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S}\right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3.21}$$

Setelah itu, mensubstitusi persamaan (3.19), persamaan (3.20), dan persamaan (3.21) ke dalam persamaan differensial parsial Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 E\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{E}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + rS\frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - rV = 0$$

$$-E\frac{\partial v}{\partial \tau} + E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - E\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{rE}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}Ev = 0$$

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv = 0$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv \tag{3.22}$$

dimana

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}.$$

Syarat awal $C(S,T) = \max(S-E,0)$ ditransformasi ke dalam

$$Ev(x,\tau) = \max(Ee^x - E,0)$$
$$Ev(x,\tau) = E\max(e^x - 1,0)$$

$$v(x,\tau) = \max(e^x - 1,0)$$

dan pada saat $t = T$, $\tau = 0$,

$$v(x,0) = \max(e^x - 1,0). \tag{3.23}$$

Sekarang kita menggunakan variable lain dengan memisalkan

$$v = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

maka dengan turunan sederhana diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= \alpha\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Selanjutnya mensubstitusi parsial di atas ke dalam persamaan (3.22) dan menghasilkan

$$\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ (k-1)\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + (k-1)e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} - ke^{\alpha x+\beta\tau}u$$

$$e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku\right]$$

$$\left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku.$$

Kita dapat menghilangkan suku $u$ dan suku $\frac{\partial u}{\partial x}$ dengan hati-hati memilih nilai $\alpha$ dan $\beta$ sedemikian sehingga

$$\beta u-\alpha^2 u-(k-1)(\alpha u)+ku+\frac{\partial u}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}-(k-1)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\left[\beta-\alpha^2-(k-1)\alpha+k\right]u+\frac{\partial u}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left[-2\alpha-k+1\right]\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\beta-\alpha^2-(k-1)\alpha+k=0$$

$$\beta=\alpha^2+(k-1)\alpha-k \qquad \text{dan} \qquad 2\alpha+k-1=0.$$

Kita dapat menyusun kembali persamaan-persamaan ini sehingga dapat ditulis

$$\alpha=-\tfrac{1}{2}(k-1) \qquad \text{dan} \qquad \beta=-\tfrac{1}{4}(k+1)^2.$$

Sekarang kita mempunyai transformasi dari $v$ untuk $u$ yaitu

$$v=e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \qquad (3.24)$$

yang menghasilkan persamaan difusi sederhana

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{d^2u}{dx^2}$$

dapat juga dituliskan

$$u_\tau=u_{xx} \qquad \text{untuk } -\infty<x<\infty,\ \tau>0 \qquad (3.25)$$

**Bukti :**

Berdasarkan persamaan di bawah

$$v(x,\tau)=\max(e^x-1,0),$$

dapat disimpulkan bahwa nilai yang mungkin dari $v(x,\tau)$ adalah $e^x-1$ dan 0. Maka untuk membuktikan persamaan (3.24) menghasilkan persamaan difusi, kita menggunakan kedua nilai dari $v(x,\tau)$ tersebut.

1) Untuk $v(x,\tau)=e^{x}-1$ maka dari persamaan (3.22) diperoleh $\dfrac{\partial v}{\partial \tau}=k$.

Persamaan (3.24) dapat dituliskan sebagai

$$u(x,\tau)=e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}v(x,\tau).$$

Berdasarkan persamaan di atas dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial v}{\partial \tau}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+v\frac{1}{4}(k+1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+v\frac{1}{2}(k-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+\frac{\partial v}{\partial x}(k-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+v\frac{1}{4}(k-1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}. \tag{3.27}$$

Substitusi nilai dari $v(x,\tau)$ dan $\dfrac{\partial v}{\partial \tau}$ ke dalam persamaan (3.26) dan (3.27) sehingga

menghasilkan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau}&=ke^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+(e^{x}-1)\frac{1}{4}(k+1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}-\frac{1}{4}(k-1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=e^{x}e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+e^{x}(k-1)e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}+(e^{x}-1)\frac{1}{4}(k-1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\\&=\left(1+(k-1)+\frac{1}{4}(k-1)^2\right)e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}-\frac{1}{4}(k-1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}-\frac{1}{4}(k-1)^2e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\end{aligned}$$

dan terlihat bahwa $\frac{du}{d\tau}=\frac{d^2u}{dx^2}$ berarti persamaan (3.24) terbukti menghasilkan persamaan difusi.

**2)** Untuk $v=0$ maka dari persamaan (3.22) diperoleh $\frac{\partial v}{\partial \tau}=0$.

Substitusi nilai dari $v(x,\tau)$ dan $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ ke dalam persamaan (3.26) dan (3.27) sehingga menghasilkan

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

terlihat bahwa $\frac{du}{d\tau}=\frac{d^2u}{dx^2}$ berarti persamaan (3.24) terbukti menghasilkan persamaan difusi.

Karena sekarang $v(x,\tau)$ dalam variabel $u$, syarat awal yang dimiliki juga harus berubah. Persamaan (3.24) disubstitusi ke dalam persamaan (3.23) sehingga diperoleh

$$e^{-\frac{1}{2}(k-1)x}u(x,0)=\max(e^x-1,0)$$

$$u(x,0)=e^{-\frac{1}{2}(k-1)x}\max(e^x-1,0)$$

$$=\max[e^{-\frac{1}{2}(k-1)x}(e^x-1,0)]$$
$$=\max(e^{-\frac{1}{2}(k-1)x+x}-e^{-\frac{1}{2}(k-1)x},0)$$

$$u(x,0)=u_0(x)=\max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0). \qquad (3.28)$$

Solusi dari persamaan difusi sederhana pada persamaan (3.25) dapat ditempuh dengan 3 langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Mentrasformasikan persamaan

Dalam persamaan (3.25), diperlihatkan bahwa $-\infty < x < \infty$. Maka dari itu, kita perlu melakukan transformasi Fourier pada persamaan difusi sederhana di atas beserta syarat awalnya.

$$\mathcal{F}[u_\tau] = \mathcal{F}[u_{xx}] \tag{3.29}$$

$$\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[u_0(x)]. \tag{3.30}$$

Misalkan $U(s,\tau) = \mathcal{F}[u(x,\tau)]$ maka berdasarkan persamaan (3.29) dan (3.30) diperoleh

$$\frac{\partial U(s,\tau)}{\partial \tau} = \mathcal{F}[u_{xx}] \tag{3.31}$$

$$U(0) = \Phi(s)$$

dimana $\Phi$ adalah transformasi Fourier dari $u_0(x)$.

Langkah 2 : menyelesaikan transformasi persamaan

Berdasarkan sifat ketiga transformasi Fourier pada bab II, persamaan (3.31) dapat dituliskan

$$\frac{d(U(s,\tau))}{d\tau} = -s^2 U(s,\tau)$$

$$\int \frac{1}{U(s,\tau)} d(U(s,\tau)) = -\int s^2 d\tau$$

$$\ln U(s,\tau) = -s^2\tau + c$$

$$U(s,\tau) = e^{-s^2\tau + c}$$

untuk $\tau = 0$

$$U(s,0) = e^c = \Phi(s)$$

jadi

$$U(s,\tau) = \Phi(s)e^{-s^2\tau}.$$

Langkah 3 : Menemukan invers dari transformasi

Untuk menemukan solusi dari $u(x,\tau)$, kita perlu menghitung invers dari transformasi

$$u(x,\tau) = \mathcal{F}^{-1}[U(s,\tau]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s)e^{-s^2\tau}]. \tag{3.32}$$

Berdasarkan sifat konvolusi yaitu sifat keempat transformasi Fourier di bab II, persamaan (3.32) menjadi

$$u(x,\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s)] \cdot \mathcal{F}^{-1}[e^{-s^2\tau}] \tag{3.33}$$

dengan menggunakan tabel pada lampiran, persamaan (3.33) dapat dituliskan

$$= u_0(x) \cdot \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\left(\frac{x^2}{4\tau}\right)} \right]$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} ds \tag{3.34}$$

dimana $u_0(x)$ diberikan oleh persamaan (3.28). Agar penyelesaian dari integral ini tepat, dibuat suatu perubahan variabel

$$y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$$

sehingga dari persamaan (3.34) dihasilkan

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{2\tau}\, dy$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Substitusi syarat awal ke dalam persamaan di atas sehingga menghasilkan

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(y\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(y\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \qquad (3.35)$$

Untuk menyelesaikan ini, kita akan menyelesaikan setiap integral secara terpisah. Integral pada suku pertama di ruas kanan persamaan (3.35) melengkapkan kuadrat pada eksponen yaitu

$$= -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(k+1)(x + y\sqrt{2\pi})$$
$$= \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}\left(y^2 - [k+1]y\sqrt{2\tau} + \left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 - \left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right).$$

Dengan memisahkan suku-suku yang tidak memuat variabel $y$, diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$= \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}\left(y - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}\left(y - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \frac{[k+1]^2\tau}{4}$$

sehingga integral pada suku pertama di ruas kanan persamaan (3.35) tereduksi menjadi

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}[k+1]\sqrt{2\tau})^2} dy.$$

Sekarang substitusi

$$z = y - \frac{1}{2}[k+1]\sqrt{2\tau}$$

sehingga menghasilkan

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

dimana

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

dan

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

adalah fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi normal.

Perhitungan dari integral kedua $I_2$ identik dengan $I_1$ kecuali $(k-1)$ diganti dengan $(k+1)$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz \\
&= e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)
\end{aligned}
$$

dimana

$$
d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}
$$

dan

$$
N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\,.
$$

Jadi

$$
u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) + e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)\,.
$$

Setelah mendapatkan hasil integral dari $u(x,\tau)$, kita kembali ke persamaan

$$
v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau)
$$

dan mensubstitusi invers transformasi di bawah ke dalam persamaan (3.16). Penting sebagai catatan bahwa simbol $V$ dalam persamaan (3.16) diganti dengan $C$ untuk lebih menekankan bahwa harga derivatif yang ingin ditentukan adalah harga dari opsi ***European Call***,

$$
x = \ln\left(\frac{S}{E}\right)
$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$

$$
\begin{aligned}
C &= Ev(x,\tau) \\
&= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \\
&= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\left\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1)+e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)\right\} \\
&= Ee^{-\frac{1}{2}kx+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}(k+1)^2x+\frac{1}{2}kx+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1)+Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \\
&= Ee^{x}N(d_1)+Ee^{-k\tau}N(d_2) \\
&= SN(d_1)+Ee^{-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}N(d_2)
\end{aligned}
$$

$$C(S,t) = SN(d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

dimana

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \\
&= \frac{\ln(\frac{S}{E})}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}+1\right)\sqrt{2\tau} \\
&= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + \left(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)2\tau}{\sqrt{2\tau}} \\
&= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

$$= \frac{\ln(\frac{S}{E})}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)\sqrt{2\tau}$$

$$= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)2\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

$$= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Dengan mendapatkan solusi dari $C(S,t)$ berarti bahwa kita telah menentukan harga opsi bentuk *European Call* dengan menggunakan persamaan differensial Black-Scholes.

# BAB IV

# KESIMPULAN DAN SARAN

## 4.1 Kesimpulan

Titik penting dalam penurunan persamaan differensial Black-Scholes adalah kita tidak pernah menetapkan satu tipe khusus dari sekuriti suatu derivatif untuk menentukan harga hingga memenuhi syarat batas dari *European call*. Ini berarti bahwa seseorang dapat menggunakan persamaan differensial Black-Scholes untuk menentukan harga dari sebarang jenis opsi dengan hanya mengubah syarat batas saja. Adapun hasil yang diperoleh dalam tulisan ini yaitu

1. Persamaan differensial parsial Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=rV$$

dengan asumsi :

1) Suku bunga bebas resiko yang besarnya tetap sepanjang waktu *option*.
2) *Return* (laba) harga saham terdistribusi secara lognormal.
3) Volatilitas tetap.-
4) Tidak ada pembagian *dividend* (pembagian laba kepada pemegang saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki).

5) Option adalah model " *European Call* ", tidak dapat di-*exercise* sebelum jatuh tempo.

6) Tidak ada biaya transaksi atau pajak.

7) Tidak ada penalty untuk short sales, kapan saja bisa dilaksanakan.

2. Harga opsi Eropa yang juga merupakan solusi dari persamaan differensial parsial Black-Scholes untuk *European call.*

$$C(S,t) = SN(d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

dimana

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

dan

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

## 4.2 Saran

Diharapkan pada penulisan selanjutnya juga dikaji tentang harga opsi tidak hanya pada *European Call* tetapi juga untuk gaya opsi lain seperti *American option* baik secara analitik maupun secara numerik. Atau mungkin tidak hanya mengenai opsi saja melainkan derivatif lain yang berkembang saat ini. Ahli matematika di luar sana telah menguasai model Black-Scholes ini dan kembali mencari metode lain bagaimana memaksimalkan harga opsi dengan lebih efisien sementara kita baru mempelajarinya. Tetapi tidak ada kata terlambat dalam menuntut ilmu. Semoga penulis diberi kembali kesempatan untuk mengkaji bidang ini dalam masalah yang lain di tingkat pendidikan yang lebih tinggi.

## DAFTAR PUSTAKA

E. Shreve, Steven. 1996. *Stochastic Calculus and Finance.*

Farlow, Stanley J. 1982. *Partial Differential Equations For Scientists and Engineers.* Amerika Serikat.

Andriansyah. 2004. *The Analytical Solutions Of European Options On Shares Pricing Models.*

Coelen, Nathan. 2002. *Black-Scholes Option Pricing Model.*

http://www.jsx.co.id/MainMenu/Education/WhatisBond/tabid/89/lang/id-ID/Default.aspx. 2007. 24 November 2007.

http://spicaalmilia.files.wordpress.com/2007/07/perjalanan-sejarah-option.pdf . 15 Juni 2007.

http://id.wikipedia.org/wiki/Sekuriti. 22:46, 30 Desember 2007.

http://id.wikipedia.org/wiki/Opsi_(keuangan). 06:46, 29 Oktober 2007. 15 November 2007.

http://www.sinarharapan.co.id/ekonomi/eureka/2004/0514/eur1.html. 2003. 21 November 2007.

# LAMPIRAN

**Tabel : Transformasi Fourier Exponensial**

| $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx}\, dw$ | $F(w) = \mathcal{F}[f] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx$ |
|---|---|
| 1. $f'(x)$ | $iwF(w)$ |
| 2. $f''(x)$ | $-w^2 F(w)$ |
| 3. $f^{n}(x)$ (nth derivatif) | $(iw)^n F(w)$ |
| 4. $f(ax)$ $a > 0$ | $\dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{w}{a}\right)$ |
| 5. $e^{-a^2 x^2}$ | $\dfrac{1}{a\sqrt{2}} e^{\frac{-w^2}{4a^2}}$ |

[Stanley J., 1982]