

**BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF  
ULAR SEGIEMPAT GANDA**

**SKRIPSI**



**ERVIE YUNIARTI ASTIKA MUSTAFAPUTRI  
H011191065**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
JANUARI 2023**

**BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF  
ULAR SEGIEMPAT GANDA**

**SKRIPSI**

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
pada Program **Matematika** Fakultas **Matematika dan Ilmu Pengetahuan**

**Alam Universitas Hasanuddin**

**ERVIE YUNIARTI ASTIKA MUSTAFAPUTRI**  
**H011191065**

**FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**  
**MAKASSAR**  
**JANUARI 2023**

## PERNYATAAN KEASLIAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ervie Yunarti Astika Mustafaputri

Nim : H011191065

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya yang berjudul

### **Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Ular Segiempat Ganda**

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa tulisan skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 19 Januari 2023

Yang menyatakan,



Ervie Yuniarti Astika Mustafaputri  
NIM . H011191065

**LEMBARAN PENGESAHAN**

**BILANGAN *RANBOW CONNECTION* PADA GRAF ULAR  
SEGIEMPAT GANDA**

Disusun dan diajukan oleh

**ERVIE YUNIARTI ASTIKA MUSTAFAPUTRI**

**H011191065**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas  
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin


Pada tanggal, 19 Januari 2023


Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

**Pembimbing Utama,**

**Pembimbing Pertama,**

  
**Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.**  
NIP. 19580802 198403 1 002

  
**Jusmawati Massaless, S.Si., M.Si.**  
NIP. 19680601 199512 2 001

**Ketua Program Studi,**

  
**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**  
NIP. 19700807 200003 1 002



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul “**Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Ular Segiempat Ganda**”, sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, izinkan penulis mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Bapak **Mustafa, S.Pd** dan Ibu **Wa Ode Muzlifa** yang telah sabar membesarkan dan mendidik penulis, serta memberi dukungan do'a dan materi, sehingga penulis bisa mencapai di titik ini dan mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih kepada adik saya **Al Fariz, Amalia**, dan **Nadiva**, serta seluruh keluarga yang telah memberi do'a dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika serta **Para Staff**

**Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.

3. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** dan **Prof. Dr. Moh. Ivan Azis., M.Sc.** selaku Tim Penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Teman-teman seperjuangan Prodi **Matematika 2019** telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
6. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapatkan balasan dari Allah SWT . Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 19 Januari 2023



Ervie Yuniarti Astika Mustafaputri

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR  
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMISI**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ervie Yunarti Astika Mustafaputri

Nim : H011191065

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Ular Segiempat Ganda**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,  
Dibuat di Makassar pada tanggal 19 Januari 2023

Yang menyatakan,



Ervie Yuniarti Astika Mustafaputri

**ABSTRAK**

Misalkan graf  $G = (V(G), E(G))$  adalah graf terhubung tak trivial. Graf  $G$  dengan pewarnaan sisi disebut *rainbow connection*, jika untuk setiap pasangan titik  $u, v \in G$  pada suatu lintasan mempunyai warna yang berbeda. Bilangan *rainbow connection* yang dinotasikan dengan  $rc(G)$  adalah minimum warna yang dibutuhkan untuk membuat graf  $G$  *rainbow connection*. Dalam penelitian ini akan ditentukan bilangan *rainbow connection* dari graf ular segiempat ganda dan graf ular segiempat alternatif ganda. Hasil penelitian menunjukkan bahwa  $rc(D(Q_n)) = n + 1$  sedangkan  $rc(AD(Q_n)) = 3$ , jika  $n = 3$  dan  $rc(AD(Q_n)) = n + 1$ , jika  $n = \text{genap}, n \geq 2$  dan  $n \text{ ganjil}, n > 3$ .

**Kata Kunci:** bilangan *rainbow connection*, graf ular segiempat ganda, graf ular alternatif ganda.

Judul : Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Ular Segiempat Ganda

Nama : Ervie Yuniarti Astika Mustafaputri

Nim : H011191065

Program Studi : Matematika



**ABSTRACT**

Let graph  $G = (V(G), E(G))$  be a non trivial connected graph. A graph  $G$  with edges coloring is called a rainbow connection, if for every pair of points  $u, v \in G$  on a path has a different color. The rainbow connection number denoted by  $rc(G)$  is the minimum color needed to make graph  $G$  rainbow connection. In this study, we will determine the rainbow connection number of double quadrilateral snake graph and alternative double quadrilateral snake graph. The research results show that  $rc(D(Q_n)) = n + 1$  while  $rc(AD(Q_3)) = 3$ , if  $n = 3$ , and  $rc(AD(Q_n)) = n + 1$ , if  $n$  even,  $n \geq 2$  and  $n$  odd,  $n > 3$ .

**Keywords** : Rainbow connection number, double quadrilateral snake graph, alternative double quadrilateral snake graph.

*Title* : Rainbow Connection Number of Double Quadrilateral Snake Graph

*Name* : Ervie Yuniarti Astika Mustafaputri

*Student ID* : H011191065

*Study Program* : Mathematics

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
PERNYATAAN KEASLIAN .....	ii
LEMBARAN PENGESAHAN .....	iii
KATA PENGANTAR .....	iv
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMISI .....	vi
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	viii
DAFTAR ISI .....	ix
 BAB 1 PENDAHULUAN .....	 1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	3
1.4 Manfaat Penelitian .....	4
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	 5
2.1 Defenisi dan Terminologi Graf .....	5
2.1.1 Graf .....	5
2.1.2 Graf Trivial dan Tak Trivial .....	6
2.1.3 Titik yang Bertetangga .....	6
2.1.4 Sisi yang Bersisian .....	7
2.1.5 Sisi yang Bertetangga .....	7
2.1.6 Jalan .....	8
2.1.7 Lintasan .....	9
2.1.8 Graf Terhubung .....	9

2.1.9 Jarak .....	10
2.1.10 Eksentrisitas .....	11
2.1.11 Diameter .....	12
2.2 Jenis-Jenis Graf .....	12
2.2.1 Graf Lintasan .....	12
2.2.2 Graf Siklus .....	13
2.2.3 Graf Ular Segitiga .....	13
2.2.4 Graf Ular Segiempat .....	13
2.2.5 Graf Ular Segiempat Alternatif .....	14
2.2.6 Graf Ular Segiempat Ganda .....	14
2.2.7 Graf Ular Segiempat Alternatif Ganda .....	15
2.3 Pewarnaan Sisi pada Graf .....	16
2.4 <i>Rainbow Connection</i> .....	16
2.4.1 <i>Rainbow Path</i> .....	17
2.4.2 <i>Rainbow Connection</i> .....	18
2.4.3 <i>Rainbow Coloring</i> .....	18
2.4.4 Bilangan <i>Rainbow Connection</i> .....	18
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	20
3.1 Metode Penelitian .....	20
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....	22
4.1. Menentukan pola umum bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $D(Q_n)$ ..	22
4.1.1 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $D(Q_n)$ untuk $n = 2$ .....	22
4.1.2 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $D(Q_n)$ untuk $n = 3$ .....	25
4.1.3 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $D(Q_n)$ untuk $n = 4$ .....	28
4.1.4 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $D(Q_n)$ untuk $n = 5$ .....	32
4.1.5 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $D(Q_n)$ untuk $n = 6$ .....	40
4.2 Menentukan pola umum bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ .	50
4.2.1 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ untuk $n = 2$ .....	50
4.2.2 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ untuk $n = 3$ .....	53
4.2.3 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ untuk $n = 4$ .....	55

4.2.4 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ untuk $n = 5$ .....	59
4.2.5 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ untuk $n = 6$ .....	63
4.2.6 Bilangan <i>rainbow connection</i> pada graf $AD(Q_n)$ untuk $n = 7$ .....	70
4.3 Menentukan Teorema dan bukti terkait $rc(D(Q_n))$ dan $rc(AD(Q_n))$ ....	79

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan .....	94
5.2 Saran .....	94
DAFTAR PUSTAKA .....	95

## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali Pada halaman
$rc(G)$	Bilangan <i>Rainbow Connection</i>	1
$W_n$	Graf roda berorde $n$	2
$C_n$	Graf Lingkaran berorde $n$	2
$k_{s,t}$	Graf komplit	2
$G_n$	Graf gear berorde $n$	2
$B_n$	Graf buku berorde $n$	2
$C_m \odot P_n$	Graf silus korona graf lintasan	2
$C_m \odot C_n$	Graf siklus korona graf siklus	2
$H \odot mk_1$	Graf $H$ korona graf $mk_1$	2
$D(Q_n)$	Graf ular segiempat ganda	3
$AD(Q_n)$	Graf ular segiempat alternatif ganda	3
$V(G)$	Himpunan titik graf $G$	5
$ V(G) $	Banyaknya himpunan titik graf $G$	5
$E(G)$	Himpunan sisi graf $G$	5
$ E(G) $	Banyaknya himpunan sisi graf $G$	5
$\in$	Elemen dari suatu himpunan	6
$d(u, v)$	Jarak dari titik $u$ ke titik $v$	10
$e(u)$	Eksentrisitas setiap dua titik di $G$	11
$diam(G)$	Jarak maksimum antara dua titik di $G$	12
$T_n$	Graf ular segitiga	13
$Q_n$	Graf ular segiempat	14
$A(Q_n)$	Graf ular segiempat alternatif	14
$x'(G)$	Bilangan kromatik pewarnaan sisi di $G$	16
$c(e)$	Definisi pewarnaan sisi	22
$\cup$	Operasi gabung	70
$f(e)$	Fungsi pewarnaan sisi	70

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Contoh graf $G$ .....	5
<b>Gambar 2.2</b> (a) Graf tak trivial A, (b) Graf trivial B .....	6
<b>Gambar 2.3</b> Graf $G_1$ .....	6
<b>Gambar 2.4</b> Graf $G_2$ .....	7
<b>Gambar 2.5</b> Graf $G_3$ .....	8
<b>Gambar 2.6</b> Graf $G$ yang memuat jalan .....	8
<b>Gambar 2.7</b> Graf $G$ yang memuat lintasan .....	9
<b>Gambar 2.8</b> Graf Terhubung $G$ .....	9
<b>Gambar 2.9</b> Graf tidak terhubung $G$ .....	10
<b>Gambar 2.10</b> Graf kipas .....	10
<b>Gambar 2.11</b> Graf $G$ yang akan ditentukan eksentrisitasnya .....	11
<b>Gambar 2.12</b> Graf $G$ yang akan ditentukan diameternya .....	12
<b>Gambar 2.13</b> Graf Lintasan $P_6$ .....	13
<b>Gambar 2.14</b> Graf siklus $C_4$ .....	13
<b>Gambar 2.15</b> Graf ular segitiga $T_5$ .....	13
<b>Gambar 2.16</b> Graf ular segiempat $Q_5$ .....	14
<b>Gambar 2.17</b> Graf ular segiempat $AQ_4$ .....	14
<b>Gambar 2.18</b> Graf ular segiempat ganda $D(Q_5)$ .....	15
<b>Gambar 2.19</b> Graf ular segiempat alternatif ganda $AD(Q_4)$ .....	16
<b>Gambar 2.20</b> Graf sikel .....	16
<b>Gambar 2.21</b> Graf $G$ dengan pewarnaan sisi-3 .....	17
<b>Gambar 3.1</b> Flowchart langkah-langkah penelitian .....	21
<b>Gambar 4.1</b> Graf $D(Q_2)$ .....	22
<b>Gambar 4.2</b> Graf $D(Q_2)$ dengan <i>rainbow 3-coloring</i> .....	23
<b>Gambar 4.3</b> Graf $D(Q_3)$ .....	25
<b>Gambar 4.4</b> Graf $D(Q_3)$ dengan <i>rainbow 4-coloring</i> .....	26
<b>Gambar 4.5</b> Graf $D(Q_4)$ .....	28
<b>Gambar 4.6</b> Graf $D(Q_4)$ dengan <i>rainbow 5-coloring</i> .....	26
<b>Gambar 4.7</b> Graf $D(Q_5)$ .....	29
<b>Gambar 4.8</b> Graf $D(Q_5)$ dengan <i>rainbow 6-coloring</i> .....	33

<b>Gambar 4.9</b> Graf $D(Q_6)$ .....	35
<b>Gambar 4.10</b> Graf $D(Q_6)$ dengan <i>rainbow 7-coloring</i> .....	40
<b>Gambar 4.11</b> Graf $AD(Q_2)$ .....	51
<b>Gambar 4.12</b> Graf $AD(Q_2)$ dengan <i>rainbow 3-coloring</i> .....	52
<b>Gambar 4.13</b> Graf $AD(Q_3)$ .....	53
<b>Gambar 4.14</b> Graf $AD(Q_3)$ dengan <i>rainbow 3-coloring</i> .....	54
<b>Gambar 4.15</b> Graf $AD(Q_4)$ .....	55
<b>Gambar 4.16</b> Graf $AD(Q_4)$ dengan <i>rainbow 5-coloring</i> .....	56
<b>Gambar 4.17</b> Graf $AD(Q_5)$ .....	59
<b>Gambar 4.18</b> Graf $AD(Q_5)$ bukan <i>rainbow 5-coloring</i> .....	60
<b>Gambar 4.19</b> Graf $AD(Q_5)$ dengan <i>rainbow 6-coloring</i> .....	61
<b>Gambar 4.20</b> Graf $AD(Q_6)$ .....	63
<b>Gambar 4.21</b> Graf $AD(Q_6)$ dengan <i>rainbow 7-coloring</i> .....	65
<b>Gambar 4.22</b> Graf $AD(Q_7)$ .....	70
<b>Gambar 4.23</b> Graf $AD(Q_7)$ bukan <i>rainbow 7-coloring</i> .....	72
<b>Gambar 4.24</b> Graf $AD(Q_7)$ dengan <i>rainbow 8-coloring</i> .....	75
<b>Gambar 4.25</b> Graf $D(Q_6)$ , dengan <i>rainbow 7-coloring</i> .....	83
<b>Gambar 4.26</b> Graf $AD(Q_3)$ , dengan <i>rainbow 3-coloring</i> .....	86
<b>Gambar 4.27</b> Graf $AD(Q_6)$ dengan <i>rainbow 7-coloring</i> .....	89
<b>Gambar 4.28</b> Graf $AD(Q_5)$ dengan <i>rainbow 5-coloring</i> .....	90
<b>Gambar 4.29</b> Graf $AD(Q_7)$ dengan <i>rainbow 8-coloring</i> .....	93

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 1.1</b> Kronologi hasil penelitian sebelumnya .....	2
<b>Tabel 2.1</b> Lintasan dari titik $u$ ke titik $v$ untuk setiap $u, v$ di $G$ .....	10
<b>Tabel 2.2</b> Eksentrisitas suatu titik $u$ ke $v$ .....	11
<b>Tabel 2.3</b> Diameter dari dua buah titik $u$ ke $v$ .....	12
<b>Tabel 2.4</b> <i>Rainbow path</i> $u, v$ di $G$ .....	17
<b>Tabel 2.5</b> Lanjutan tabel 2.4 .....	18
<b>Tabel 4.1</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $D(Q_2)$ ....	23
<b>Tabel 4.2</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $D(Q_2)$ .....	24
<b>Tabel 4.3</b> Lanjutan tabel 4.2 .....	24
<b>Tabel 4.4</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $D(Q_3)$ ....	25
<b>Tabel 4.5</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $D(Q_3)$ .....	26
<b>Tabel 4.6</b> Lanjutan tabel 4.4 .....	27
<b>Tabel 4.7</b> Lanjutan tabel 4.5 .....	27
<b>Tabel 4.8</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $D(Q_4)$ ....	28
<b>Tabel 4.9</b> lanjutan tabel 4.8 .....	29
<b>Tabel 4.10</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $D(Q_4)$ .....	27
<b>Tabel 4.11</b> Lanjutan tabel 4.10 .....	30
<b>Tabel 4.12</b> Lanjutan tabel 4.11 .....	31
<b>Tabel 4.13</b> Lanjutan tabel 4.12 .....	31
<b>Tabel 4.14</b> Lanjutan tabel 4.13 .....	32
<b>Tabel 4.15</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $D(Q_5)$ ..	33
<b>Tabel 4.16</b> lanjutan tabel 4.15 .....	34
<b>Tabel 4.17</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $D(Q_5)$ .....	35
<b>Tabel 4.18</b> Lanjutan tabel 4.17 .....	36
<b>Tabel 4.19</b> Lanjutan tabel 4.18 .....	36
<b>Tabel 4.20</b> Lanjutan tabel 4.19 .....	37
<b>Tabel 4.21</b> Lanjutan tabel 4.20 .....	37
<b>Tabel 4.22</b> Lanjutan tabel 4.21 .....	38
<b>Tabel 4.23</b> Lanjutan tabel 4.22 .....	39
<b>Tabel 4.24</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $D(Q_6)$ ..	40



<b>Tabel 4.25</b> lanjutan tabel 4.24 .....	41
<b>Tabel 4.26</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $D(Q_6)$ .....	42
<b>Tabel 4.27</b> Lanjutan tabel 4.26 .....	43
<b>Tabel 4.28</b> Lanjutan tabel 4.27 .....	44
<b>Tabel 4.29</b> Lanjutan tabel 4.28 .....	44
<b>Tabel 4.30</b> Lanjutan tabel 4.29 .....	45
<b>Tabel 4.31</b> Lanjutan tabel 4.30 .....	46
<b>Tabel 4.32</b> Lanjutan tabel 4.31 .....	47
<b>Tabel 4.33</b> Lanjutan tabel 4.32 .....	47
<b>Tabel 4.34</b> Lanjutan tabel 4.33 .....	48
<b>Tabel 4.35</b> Lanjutan tabel 4.34 .....	49
<b>Tabel 4.36</b> Pola umum bilangan rainbow connection pada graf $D(Q_n)$ .....	50
<b>Tabel 4.37</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $AD(Q_2)$ .	51
<b>Tabel 4.38</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $AD(Q_2)$ .....	52
<b>Tabel 4.39</b> Lanjutan 4.38 .....	52
<b>Tabel 4.40</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $AD(Q_3)$	53
<b>Tabel 4.41</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $AD(Q_3)$ .....	54
<b>Tabel 4.42</b> Lanjutan tabel 4.41 .....	55
<b>Tabel 4.43</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $AD(Q_4)$	56
<b>Tabel 4.44</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $AD(Q_4)$ .....	57
<b>Tabel 4.45</b> Lanjutan tabel 4.44 .....	57
<b>Tabel 4.46</b> Lanjutan tabel 4.45 .....	58
<b>Tabel 4.47</b> Lanjutan tabel 4.46 .....	59
<b>Tabel 4.48</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $AD(Q_5)$	59
<b>Tabel 4.49</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $AD(Q_5)$ .....	61
<b>Tabel 4.50</b> Lanjutan tabel 4.49 .....	62
<b>Tabel 4.51</b> Lanjutan tabel 4.50 .....	62
<b>Tabel 4.52</b> Lanjutan tabel 4.51 .....	63
<b>Tabel 4.53</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $AD(Q_6)$	57
<b>Tabel 4.54</b> Lanjutan 4.53 .....	64
<b>Tabel 4.55</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $AD(Q_6)$ .....	66
<b>Tabel 4.56</b> Lanjutan tabel 4.55 .....	66

<b>Tabel 4.57</b> Lanjutan tabel 4.56 .....	67
<b>Tabel 4.58</b> Lanjutan tabel 4.57 .....	67
<b>Tabel 4.59</b> Lanjutan tabel 4.58 .....	68
<b>Tabel 4.60</b> Lanjutan tabel 4.59 .....	69
<b>Tabel 4.61</b> Lanjutan tabel 4.60 .....	69
<b>Tabel 4.62</b> Jarak setiap dua titik dan eksentrisitas setiap titik pada graf $AD(Q_7)$	70
<b>Tabel 4.63</b> Lanjutan 4.62 .....	71
<b>Tabel 4.64</b> <i>Rainbow Path</i> untuk setiap dua titik pada graf $AD(Q_7)$ .....	73
<b>Tabel 4.65</b> Lanjutan tabel 4.64 .....	74
<b>Tabel 4.66</b> Lanjutan tabel 4.65 .....	74
<b>Tabel 4.67</b> Lanjutan tabel 4.66 .....	75
<b>Tabel 4.68</b> Lanjutan tabel 4.67 .....	76
<b>Tabel 4.69</b> Lanjutan tabel 4.68 .....	76
<b>Tabel 4.70</b> Lanjutan tabel 4.69 .....	77
<b>Tabel 4.71</b> Lanjutan tabel 4.70 .....	78
<b>Tabel 4.72</b> Pola umum bilangan <i>rainbow connection</i> .....	79
<b>Tabel 4.73</b> <i>Rainbow path u-v</i> pada graf $D(Q_n)$ .....	81
<b>Tabel 4.74</b> <i>Rainbow path u-v</i> pada graf $AD(Q_3)$ .....	85
<b>Tabel 4.75</b> <i>Rainbow path u-v</i> pada graf $AD(Q_n)$ jika $n$ genap .....	87
<b>Tabel 4.76</b> <i>Rainbow path u-v</i> pada graf $AD(Q_n)$ jika $n$ ganjil .....	91

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf lahir dari seorang matematikawan asal Swiss yang bernama Euler pada tahun 1736, yang mencakup upaya penyelesaian masalah jembatan Konigsberg yang terkenal di Eropa. Secara umum graf merupakan model matematika yang digunakan untuk menganalisis banyak masalah konkret yang terkait dengan dunia nyata. Beberapa masalah dalam fisika, kimia, ilmu komunikasi, ilmu komputer, genetika, psikologi dan sosiologi dapat dirumuskan sebagai masalah teori graf. Selain itu, cabang-cabang matematika seperti teori grup, matriks, probabilitas, dan topologi juga memiliki implementasi dalam teori graf (Balakrishnan, R. and Ranganathan, K. 2012).

Pewarnaan graf adalah salah satu kajian dari graf. Salah satu pengembangan dari pewarnaan graf adalah *rainbow connection*, yang pertama kali di perkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 2008. *Rainbow connection* adalah pewarnaan sisi pada graf terhubung tak trivial dengan sifat setiap dua titik dapat dihubungkan melalui *rainbow path*. *Rainbow path* adalah suatu lintasan dari suatu titik ke titik yang lain yang sisi-sisinya mempunyai warna yang berlainan. Pewarnaan sisi pada graf  $G$  disebut *rainbow coloring*. Jika telah digunakan  $k$  warna maka dikatakan *rainbow  $k$  coloring*, Jika  $k$  tersebut bilangan bulat positif terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf menjadi *rainbow connection*, maka  $k$  disebut bilangan *rainbow connection* yang dinotasikan dengan  $rc(G)$ .

Terdapat beberapa hasil penelitian sebelumnya terkait dengan bilangan *rainbow connection*, yaitu dapat di tunjukan kronologi nya pada tabel 1.1, antara lain sebagai berikut :

**Tabel 1.1.** Kronologi Hasil Penelitian sebelumnya.

No	Tahun	Nama Penulis	Judul Penelitian	Objek Kajian
1.	2008	Chartrand G, dkk	<i>Rainbow Connction Number in Graphs</i>	Graf roda ( $W_n$ ), graf lingkaran ( $C_n$ ), graf $(k_{s,t})$
2.	2013	Syafrizal, S.,dkk	<i>The Rainbow Connection of Fan and Sun</i>	Graf kipas dan graf matahari
3.	2014	Syafrizal, S.,dkk	<i>Rainbow Connection Number of Some Graphs</i>	Graf gear ( $G_n$ ), graf buku ( $B_n$ ), dan graf rantai lingkaran ( $C_n$ )
4.	2019	Surbakti, N.M., and Sugeng K.A.	<i>The Rainbow Connection Number of a Watermill Graph</i>	Graf kincir air
5.	2019	Maulani, A., dkk	<i>Rainbow Connection Number of <math>C_m \odot P_n</math> and <math>C_m \odot C_n</math></i>	Graf $C_m \odot P_n$ dan graf $C_m \odot C_n$
6.	2019	Parmar, D, dkk	<i>Rainbow Connection Number of H- Graph</i>	Graf H dan graf $H \odot mk_1$
7.	2019	Parmar, D, dkk	<i>Rainbow Connection Number of Triangular Snake Graph</i>	Graf ular segitiga, graf ular segitiga alternatif, graf ular segitiga ganda,
8.	2021	Suthar, dkk	<i>Rainbow Connection Number Of Some Graphs</i>	Graf $P_n + N_n$ , graf $P_n + N_{n-1}$ & graf ular segiempat

Dari referensi penelitian pada tahun (2019) Parmar, D, dkk yang berjudul “*Rainbow connection number of triangular snake graph* “. telah dijelaskan bahwa Graf ular segitiga (*tringular snake*) adalah graf hasil duplikasi sisi graf sikel  $c_3$ . Selanjutnya pada tahun (2021) Suthar dkk, dalam jurnalnya yang berjudul “*Rainbow Connection Number Of Some Graphs* “ telah mengembangkan hasil penelitian sebelumnya, dengan menentukan bilangan *rainbow connection* tetapi menggunakan jenis graf lain yaitu graf ular segiempat (*quadraliteral snake*). Graf ular segiempat (*quadraliteral snake*) adalah graf hasil duplikasi sisi graf sikel  $c_4$ . Berdasarkan hasil yang dikemukakan pada penelitian sebelumnya ,penulis tertarik untuk mengkaji lebih jauh tentang bilangan *rainbow connection* yang terkait graf ular segiempat (*quadraliteral snake*). Pada penelitian yang akan penulis lakukan, penulis mengembangkan penelitian sebelumnya dengan menggandakan graf ular segiempat (*double quadraliteral snake*), dan menuangkan hasilnya dalam bentuk tulisan skripsi dengan judul “*Bilangan Rainbow Connection pada Graf Ular Segiempat Ganda*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah di uraikan maka rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Mencari pola umum bilangan *rainbow connection* pada graf ular segiempat ganda  $rc(D(Q_n))$  dan bilangan *rainbow connection* pada graf ular segiempat alternatif ganda  $rc(AD(Q_n))$
2. Membentuk teorema dan bukti terkait dengan bilangan *rainbow connection* pada graf ular segiempat ganda  $rc(D(Q_n))$  dan bilangan *rainbow connection* pada graf ular segiempat alternatif ganda  $rc(AD(Q_n))$ .

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf ular segiempat

ganda  $rc(D(Q_n))$  dan bilangan *rainbow connection* pada graf ular segiempat alternatif ganda  $rc(AD(Q_n))$ .

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai pengembangan dari disiplin ilmu teori graf serta sebagai rujukan penelitian selanjutnya bagi peneliti pada teori graf khususnya bilangan *rainbow connection* pada graf.
2. Digunakan di dalam pendistribusian barang, salah satu contohnya yaitu pada pendistribusian soal UN yang bersifat rahasia sehingga membutuhkan tim pengawas pendistribusian soal UN.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dipaparkan beberapa teori graf yang akan digunakan di dalam skripsi ini, diantaranya definisi dan terminologi graf, jenis-jenis graf, pewarnaan sisi pada graf serta *rainbow connection*.

#### 2.1 Definisi dan Terminologi Graf

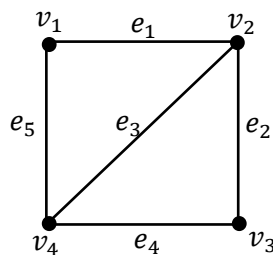
**Definisi 2.1.1** (Chartrand & lesniak, 1996) . Graf  $G = (V, E)$  merupakan suatu pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan hingga dan tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik (vertex) dan  $E$  adalah himpunan pasangan tak terurut dari anggota-anggota  $V$  yang berbeda disebut sisi (edge).

Himpunan titik pada graf  $G$  biasanya dinotasikan  $V(G)$  dan dapat dituliskan dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan banyaknya titik dari graf  $G$  yang dinotasikan  $|V(G)|$  disebut *orde* dari  $G$ , sedangkan himpunan sisi-sisi pada graf  $G$  biasanya dinotasikan  $E(G)$  dapat dituliskan dengan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  dan banyaknya sisi-sisi dari graf  $G$  yang dinotasikan  $|E(G)|$  disebut *orde* dari  $G$ . Sisi  $e = (u, v)$ .

**Contoh 2.1.** Graf  $G$  pada gambar 2.1 merupakan graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$$

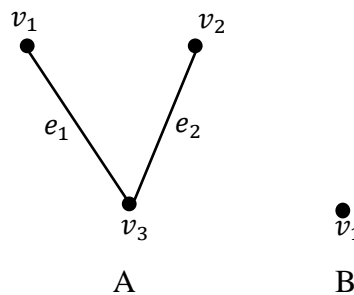


**Gambar 2.1** Graf  $G$

Berdasarkan gambar 2.1 banyaknya titik dari graf  $G$  adalah 4 dan banyaknya sisi dari graf  $G$  adalah 5.

**Definisi 2.1.2** (Chartrand & lesniak, 1996). Graf trivial adalah graf yang mempunyai satu titik, sedangkan graf tak trivial adalah graf yang memiliki dua titik atau lebih.

**Contoh 2.2** (a) Graf tak trivial A, (b) Graf trivial B.



**Gambar 2.2** (a) Graf tak trivial A, (b) Graf trivial B

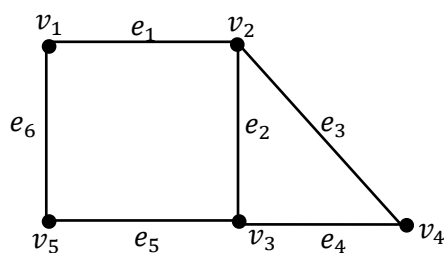
Berdasarkan gambar 2.2 graf A terdiri dari 3 titik yaitu  $v_1, v_2, v_3$ , sedangkan graf B hanya terdapat 1 titik yaitu  $v_1$ , sehingga graf A merupakan graf tak trivial sedangkan graf B merupakan graf trivial.

**Definisi 2.1.3** (Chartrand & lesniak, 1996). Misalkan  $u, v \in V(G)$ . Titik  $u$  dan  $v$  dikatakan bertetangga di  $G$  jika  $u, v \in E(G)$ .

**Contoh 2.3** Graf  $G$  pada gambar 2.3 merupakan graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$



**Gambar 2.3** Graf  $G$



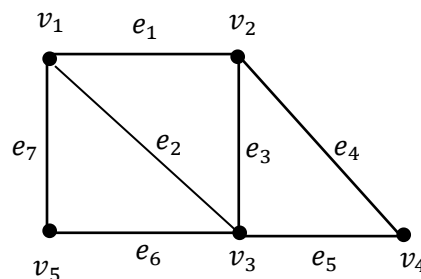
Berdasarkan gambar 2.3, titik  $v_2$  bertetangga dengan titik  $v_1, v_3, v_4$  karena  $e_1 = v_2v_1, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_2v_4$ , dan titik  $v_2$  tidak bertetangga dengan titik  $v_5$ , karena  $v_2v_5$  bukan sisi di  $G$ .

**Definisi 2.1.4** (Chartrand & lesniak, 1996). Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah titik pada graf  $G$ , jika  $e = (u, v)$ , maka  $e \in E(G)$  dikatakan bersisian (*incident*) dengan titik  $u$  dan titik  $v$ .

**Contoh 2.4.** Graf  $G$  pada gambar 2.4 merupakan graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$



**Gambar 2.4** Graf  $G$

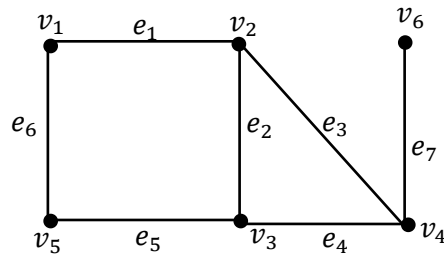
Berdasarkan gambar 2.4, sisi  $e_1$  bersisian dengan titik  $v_1$  dan  $v_2$ , tetapi sisi tersebut tidak bersisian dengan titik  $v_4, v_3, v_5$ .

**Definisi 2.1.5** (Chartrand & lesniak, 1996). Dua buah sisi yang bersisian pada titik ujung yang sama disebut bertetangga.

**Contoh 2.5** Graf  $G$  pada gambar 2.5 merupakan graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$



Gambar 2.5 Graf  $G$

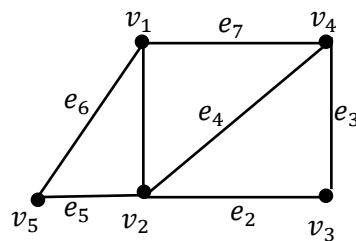
Berdasarkan gambar 2.5, sisi  $e_7$  bersisian dengan sisi  $e_3$  dan  $e_4$  pada titik ujung  $v_4$ , sehingga sisi  $e_7, e_3, e_4$  dikatakan bertetangga.

**Definisi 2.1.6.** (Gross,dkk, 2019). Misal  $G$  adalah graf dengan  $u$  dan  $v$  adalah titik di  $G$  (yang tidak harus berbeda). Jalan dari titik  $u$  ke titik  $v$  adalah barisan selang seling berhingga yang terdiri dari titik dan sisi yang bertetangga pada  $G$ . Jalan dari titik  $u$  ke titik  $v$  disebut jalan  $u - v$ , dan dituliskan dalam bentuk:

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$$

Dengan  $v_i$  menyatakan titik di  $G$  dan  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  menyatakan sisi di  $G$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Jalan pada suatu graf  $G$  bisa dinyatakan dengan barisan titik asalkan tidak memuat sisi parallel (sisi ganda).

**Contoh 2.6** Graf  $G$  pada gambar 2.3 merupakan graf yang memuat jalan.

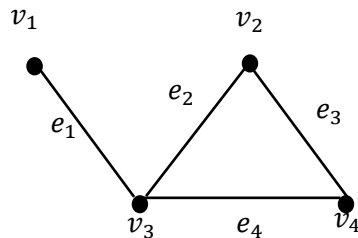


Gambar 2.6 Graf  $G$

Berdasarkan gambar 2.6 untuk setiap dua titik  $v_1$  dan  $v_5$ ,  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_5, v_5$  merupakan jalan  $v_1 - v_5$ .

**Definisi 2.1.7** (Gross, dkk, 2019). Misalkan  $G$  adalah graf. Lintasan dari  $u$  ke  $v$  pada  $G$  adalah jalan dari  $u$  ke  $v$  dimana tidak terjadi pengulangan sisi maupun titik. Lintasan dari  $u$  ke  $v$  disebut lintasan  $u-v$ .

**Contoh 2.7** Graf  $G$  pada gambar 2.7 merupakan graf yang memuat lintasan.

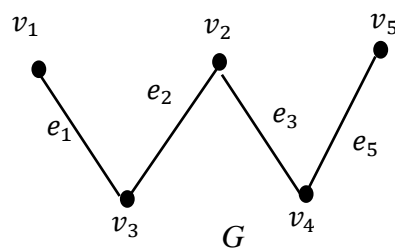


**Gambar 2.7** Graf  $G$

Berdasarkan gambar 2.7, untuk setiap dua titik  $v_1$  dan  $v_4$ , terdapat  $v_1v_3v_2v_4$  dan  $v_1v_3v_4$  yang merupakan lintasan  $v_1 - v_4$ .

**Definisi 2.1.8** (Chartrand & lesniak, 1996). Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah sebarang titik berbeda pada graf  $G$ . Maka graf  $G$  dikatakan graf terhubung, jika terdapat lintasan dari titik  $u$  ke  $v$ .

**Contoh 2.8** Graf  $G$  pada gambar 2.8 merupakan graf terhubung



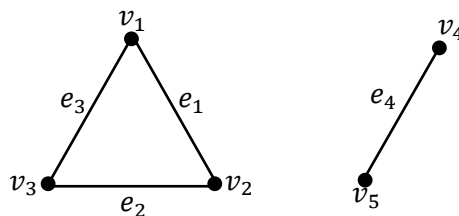
**Gambar 2.8** Graf terhubung  $G$

Berdasarkan gambar 2.8 untuk setiap dua titik  $u$  dan  $v$  pada graf  $G$  terdapat lintasan dari titik  $u$  ke  $v$ , maka graf  $G$  merupakan graf terhubung, seperti yang terlihat pada tabel 2.1 berikut :

**Tabel 2.1** lintasan dari titik  $u$  ke titik  $v$  untuk setiap  $u, v$  di  $G$ .

		Lintasan titik $u$ ke $v$				
Titik $u$	Titik $v$					
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	
$v_1$		$v_1, v_2$	$v_1, v_3$	$v_1, v_3, v_2, v_4$	$v_1, v_3, v_2, v_4, v_5$	
$v_2$	$v_2, v_3, v_1$		$v_2, v_3$	$v_2, v_4$	$v_2, v_4, v_5$	
$v_3$	$v_3, v_1$	$v_3, v_2$		$v_3, v_2, v_4$	$v_3, v_2, v_4, v_5$	
$v_4$	$v_4, v_2, v_3, v_1$	$v_4, v_2$	$v_4, v_2, v_3$		$v_4, v_5$	
$v_5$	$v_5, v_4, v_2, v_3, v_1$	$v_5, v_4, v_2$	$v_5, v_4, v_2, v_3$	$v_5, v_4$		

**Contoh 2.9** Graf  $G$  pada gambar 2.9 merupakan graf tidak terhubung

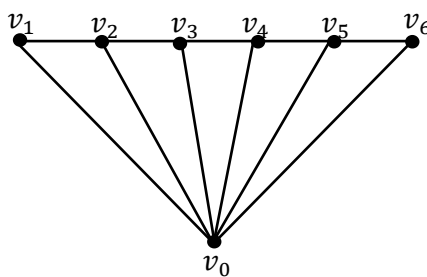


**Gambar 2.9** Graf tidak terhubung  $G$

Berdasarkan gambar 2.9, graf  $G$  tidak terhubung karena dua titik  $v_1$  dan  $v_4$  tidak terdapat lintasan dari titik  $v_1$  ke  $v_4$ .

**Definisi 2.1.9** (Gross, dkk, 2019). Jarak (*distance*) dari  $u$  ke  $v$  di  $G$ , dinotasikan dengan  $d(u, v)$  adalah panjang lintasan terpendek  $u - v$  di  $G$ .

**Contoh 2.10.** Graf Kipas pada gambar 2.10 merupakan graf yang akan ditentukan jaraknya.



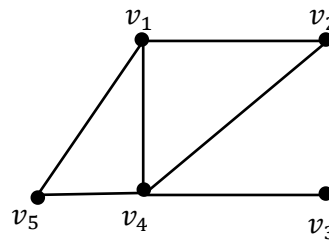
**Gambar 2.10** Graf Kipas

Berdasarkan gambar 2.10, lintasan dari titik  $v_1$  ke  $v_6$  adalah  $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6$  dan  $v_1 - v_0 - v_6$ . Maka, jarak dari titik  $v_1$  ke  $v_6$  panjangnya 2, karena lintasan terpendek yaitu  $v_1 - v_0 - v_6$ .

**Definisi 2.1.10.** (Gross, dkk, 2019). Graf  $G$  dikatakan eksentrisitas suatu titik  $u \in V(G)$ , dinotasikan dengan  $e(u)$  adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari  $u$  ke setiap titik di  $G$ , dengan kata lain:

$$e(u) = \max\{d(u, v) | u \in V(G)\}$$

**Contoh 2.11.** Graf  $G$  pada gambar 2.11 merupakan graf yang akan ditentukan eksentrisitasnya.



**Gambar 2.11** Graf  $G$

**Tabel 2.2.** Eksentrisitas suatu titik  $u$  ke  $v$ .

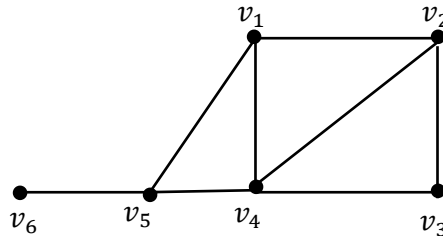
Titik $u$	$d(u, v)$					$e(u)$
	Titik $v$					
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	
$v_1$		1	2	1	1	2
$v_2$	1		2	1	2	2
$v_3$	2	2		1	2	2
$v_4$	1	1	1		1	1
$v_5$	1	2	2	1		2

Berdasarkan tabel 2.2, diperoleh  $e(v_1) = e(v_2) = e(v_3) = e(v_5) = 2$ , dan  $e(v_4) = 1$

**Definisi 2.1.11.** (Gross, dkk, 2019). Diameter dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $diam(G)$  adalah jarak maksimum antara dua titik di  $G$  yaitu:

$$diam(G) = \max\{e(u) | u \in V(G)\}$$

**Contoh 2.12.** Graf  $G$  pada gambar 2.11 merupakan graf yang akan ditentukan diameternya.



**Gambar 2.12** Graf  $G$

**Tabel 2.3** Diameter dari dua buah titik  $u$  ke  $v$

Titik $u$	$d(u, v)$						$e(u)$
	Titik $v$						
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	
$v_1$		1	2	1	1	2	2
$v_2$	1		2	1	2	3	3
$v_3$	2	1		1	2	3	3
$v_4$	1	1	1		1	2	2
$v_5$	1	2	2	1		1	2
$diam(G) = \max\{e(u)   u \in V(G)\}$							3

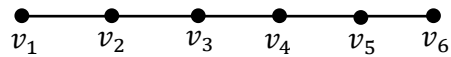
Berdasarkan tabel 2.3, diperoleh  $diam$  graf  $G$  adalah 3.

## 2.2. Jenis-Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf diantaranya adalah sebagai berikut :

**Definisi 2.2.1** (Harris, dkk, 2000). Graf Lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dinotasikan dengan  $P_n$ , dimana  $n \geq 2$ , yang terdiri dari  $n$  titik dan  $n - 1$  sisi.

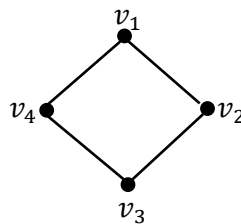
**Contoh 2.13** Graf lintasan dapat dilihat pada gambar 2.13



**Gambar 2.13** Graf lintasan  $P_6$

**Definisi 2.2.2** (Harris,dkk, 2000). Graf siklus adalah graf yang setiap titiknya berderajat dua dan memiliki jumlah titik dan jumlah sisi yang sama. Graf siklus dinotasikan dengan  $c_n$ , dimana  $n \geq 3$ .

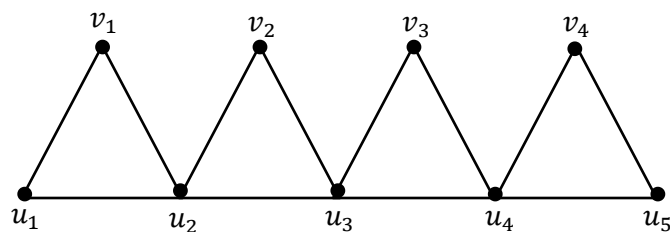
**Contoh 2.14** Graf siklus dapat dilihat pada gambar 2.14.



**Gambar 2.14** Graf siklus  $C_4$

**Definisi 2.2.3** (Parmar, dkk, 2019). Graf ular segitiga (*Tringular snake*), graf ular segitiga dinotasikan dengan  $T_n$ , dimana  $n \geq 2$ , adalah graf yang diperoleh dari suatu graf lintasan  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$  dengan menghubungkan titik  $u_i$  dan  $u_{i+1}$  ke sebuah titik  $v_i$ , untuk  $1 \leq i < n$ .

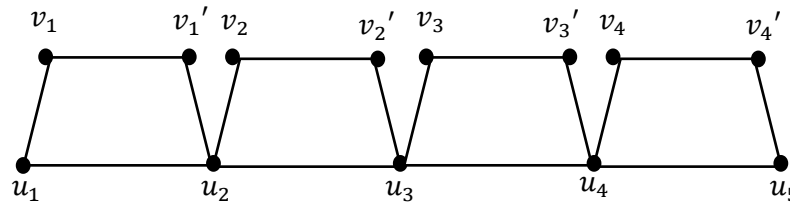
**Contoh 2.15** Graf ular segitiga dapat dilihat pada gambar 2.15.



**Gambar 2.15** Graf ular segitiga  $T_5$

**Definisi 2.2.4** (Suthar, dkk, 2021). Graf ular segiempat (*Quadrilateral snake*) adalah graf yang diperoleh dari suatu graf lintasan  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$  dengan menghubungkan  $u_i$  ke titik  $v_i$  dan  $u_{i+1}$  ke titik  $v_i'$  untuk  $1 \leq i < n$ , serta menghubungkan titik  $v_i$  ke titik  $v_i'$ , untuk  $1 \leq i < n$ . Graf ular segiempat dinotasikan dengan  $Q_n$ , dimana  $n \geq 2$ .

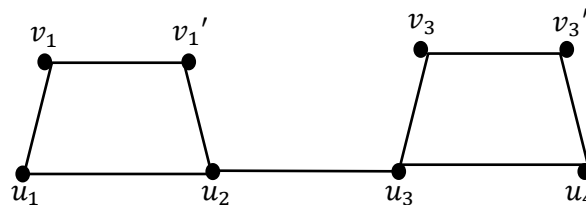
**Contoh 2.16** Graf ular segiempat dapat dilihat pada gambar 2.16.



**Gambar 2.16** Graf ular segiempat ( $Q_5$ )

**Definisi 2.2.5** (Suthar, dkk, 2021). Graf ular segiempat alternatif (*Alternate quadrilateral snake*) adalah graf yang diperoleh dari suatu graf lintasan  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$ , untuk  $1 \leq i < n$ , dengan menghubungkan  $u_i$  ke titik  $v_i$  dan  $u_{i+1}$  ke titik  $v_i'$  untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 2$ , dimana  $n$  ganjil, dan untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 1$ , dimana  $n$  genap, serta menghubungkan titik  $v_i$  ke titik  $v_i'$ , untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 2$ , dimana  $n$  ganjil, dan untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 1$ , dimana  $n$  genap. Graf ular segiempat alternatif dinotasikan dengan  $(A(Q_n))$ , dimana  $n \geq 2$ .

**Contoh 2.17** Graf ular segiempat alternatif dapat dilihat pada gambar 2.17.



**Gambar 2.17** Graf ular segiempat alternatif ( $A(Q_4)$ )

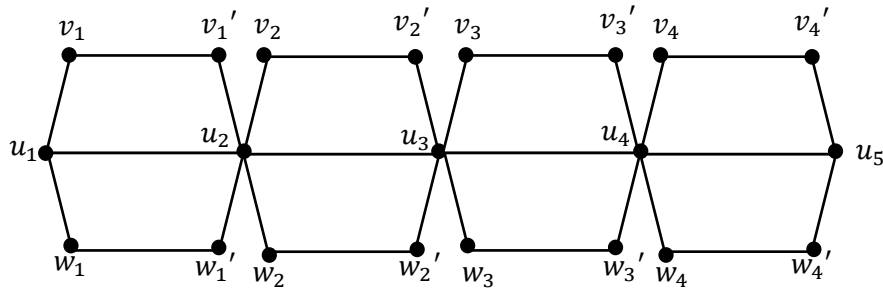
**Definisi 2.2.6** (Suthar, dkk, 2021). Graf ular segiempat ganda (*Double quadrilateral snake*) adalah graf yang terdiri dari dua buah graf ular segiempat yang memiliki lintasan yang sama. Graf ular segiempat ganda dinotasikan dengan  $D(Q_n)$ , dimana  $n \geq 2$ . Langkah-langkah membangun graf ular segiempat ganda  $D(Q_n)$ ,  $n \geq 2$ , adalah sebagai berikut:

1. Membangun suatu graf lintasan  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$ , untuk  $1 \leq i < n$
2. Menghubungkan  $u_i$  ke sebuah titik  $v_i$  dan  $u_{i+1}$  ke sebuah titik  $v_i'$ , untuk  $1 \leq i < n$ .
3. Menghubungkan  $v_i$  ke sebuah titik  $v_i'$ , untuk  $1 \leq i < n$ .



4. Menghubungkan  $u_i$  ke sebuah titik  $w_i$  dan  $u_{i+1}$  ke sebuah titik  $w_i'$ , untuk  $1 \leq i < n$ .
5. Menghubungkan  $w_i$  ke sebuah titik  $w_i'$ , untuk  $1 \leq i < n$ .

**Contoh 2.18** Graf ular segiempat ganda dapat dilihat pada gambar 2.18.

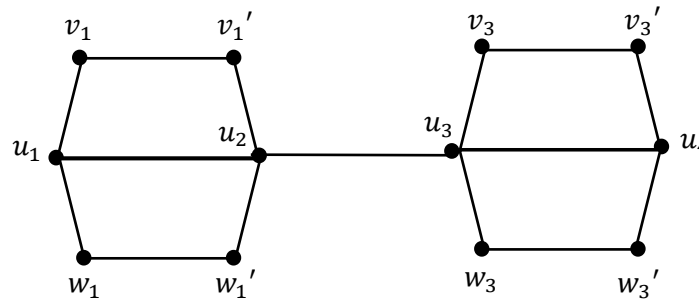


**Gambar 2.18** Graf ular segiempat ganda  $D(Q_5)$

**Definisi 2.2.7** (Suthar, dkk, 2021). Graf ular segiempat alternatif ganda (*Alternate double quadrilateral snake*) adalah graf yang terdiri dari dua buah graf ular segiempat alternatif yang memiliki lintasan yang sama. Graf ular segiempat alternatif ganda dinotasikan dengan  $AD(Q_n)$ , dimana  $n \geq 2$ . Langkah-langkah membangun graf ular segiempat alternatif ganda  $AD(Q_n)$ ,  $n \geq 2$ , adalah sebagai berikut:

1. Membangun suatu graf lintasan  $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$ , untuk  $1 \leq i < n$
2. Menghubungkan  $u_i$  ke sebuah titik  $v_i$  dan  $u_{i+1}$  ke sebuah titik  $v_i'$ , untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 2$ , dimana  $n$  ganjil, dan untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 1$ , dimana  $n$  genap,
3. Menghubungkan  $v_i$  ke sebuah titik  $v_i'$ , untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 2$ , dimana  $n$  ganjil, dan untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 1$ , dimana  $n$  genap,
4. Menghubungkan  $u_i$  ke sebuah titik  $w_i$  dan  $u_{i+1}$  ke sebuah titik  $w_i'$ , untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 2$ , dimana  $n$  ganjil, dan untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 1$ , dimana  $n$  genap,
5. Menghubungkan  $w_i$  ke sebuah titik  $w_i'$ , untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 2$ , dimana  $n$  ganjil, dan untuk  $i = 1, 3, 5, \dots, n - 1$ , dimana  $n$  genap.

**Contoh 2.19** Graf ular segiempat ganda alternatif  $AD(Q_4)$  dapat dilihat pada gambar 2.19.



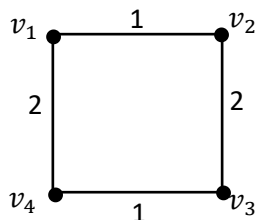
**Gambar 2.19** Graf ular segiempat ganda  $AD(Q_4)$

### 2.3 Pewarnaan Sisi pada Graf

Pada subbab ini akan dibahas mengenai pewarnaan sisi pada graf meliputi definisi, contohnya.

**Definisi 2.3.1** (Gross, dkk, 2019). Suatu pewarnaan sisi- $k$  untuk graf  $G$  adalah suatu penggunaan  $k$  warna untuk mewarnai semua sisi di  $G$  sehingga setiap sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jika  $G$  mempunyai pewarnaan sisi- $n$ , maka dikatakan sisi-sisi di  $G$  diwarnai dengan  $n$  warna. Indeks kromatik  $G$  dinotasikan dengan  $x'(G)$  adalah bilangan  $n$  terkecil sehingga sisi di  $G$  dapat diwarnai dengan  $n$  warna.

**Contoh 2.20** Graf sikel pada gambar 2.20 dilakukan pewarnaan sisi.



**Gambar 2.20** Graf sikel

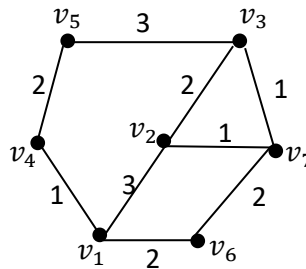
Pada gambar 2.20 graf sikel memuat dua sisi yang bertemu pada titik yang sama (yaitu titik berderajat 2) sehingga graf tersebut harus di berikan warna berbeda. Jadi  $x'(G) = 2$ .

**2.4 Rainbow Connection**

Pada subbab ini akan dibahas definisi, contoh dan teorema. mengenai *rainbow path*, *rainbow connection*, *rainbow coloring*, dan bilangan *rainbow connection*.

**Definisi 2.4.1** (Chartrand dkk, 2008). Misalkan graf  $G$  adalah graf terhubung tak trivial dan  $k$  adalah sebuah bilangan bulat positif. Misalkan sisi pada graf  $G$  diwarnai sebanyak  $k$  warna, dimana sisi yang bertetangga dapat diwarnai sama. Lintasan terpendek dari titik  $u$  ke titik  $v$  di  $G$  disebut *rainbow path* jika sisi-sisi pada lintasan tersebut mempunyai warna yang berlainan.

**Contoh 2.21** Graf  $G$  pada gambar 2.21 merupakan graf dengan pewarnaan sisi-3 dengan himpunan warna  $\{1,2,3\}$ .



**Gambar 2.21** Graf  $G$  dengan pewarnaan sisi-3

Berdasarkan gambar 2.21, untuk setiap titik  $u$  dan  $v$  terdapat *rainbow path* dari titik  $u$  ke titik  $v$ , dapat disajikan dalam tabel 2.4 berikut :

**Tabel 2.4** *Rainbow path*  $u, v$  di  $G$  :

Titik $u$		<i>Rainbow path</i> $u-v$			
		Titik $v$			
		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$			$v_1, v_2$	$v_1, v_2, v_3$	$v_1, v_4$
$v_2$	$v_2, v_1$			$v_2, v_3$	$v_2, v_1, v_4$
$v_3$	$v_3, v_2, v_1$	$v_3, v_2$			$v_3, v_5, v_4$
$v_4$	$v_4, v_1$	$v_4, v_1, v_2$	$v_4, v_5, v_3$		
$v_5$	$v_5, v_4, v_1$	$v_5, v_3, v_2$	$v_5, v_3$		$v_5, v_4$
$v_6$	$v_6, v_1$	$v_6, v_1, v_2$	$v_6, v_7, v_3$		$v_6, v_1, v_4$

**Tabel 2.5** Lanjutan tabel 2.4

		<i>Rainbow path u-v</i>		
Titik $u$	Titik $v$			
		$v_5$	$v_6$	$v_7$
$v_1$	$v_1, v_4, v_5$	$v_1, v_6$	$v_1, v_2, v_7$	
$v_2$	$v_2, v_3, v_5$	$v_2, v_7, v_6$	$v_2, v_7$	
$v_3$	$v_3, v_5$	$v_3, v_7, v_6$	$v_3, v_7$	
$v_4$	$v_4, v_5$	$v_4, v_1, v_6$	$v_4, v_5, v_3, v_7$	
$v_5$		$v_5, v_3, v_7, v_6$	$v_5, v_3, v_7$	
$v_6$	$v_6, v_7, v_3, v_5$		$v_6, v_7$	

**Definisi 2.4.2** (Chartrand dkk, 2008). Misalkan graf  $G$  adalah graf terhubung tak trivial dan  $k$  adalah sebuah bilangan bulat positif. Didefinisikan pewarnaan sisi  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , Graf  $G$  dengan pewarnaan sisi  $c$  disebut *rainbow connection*, jika untuk setiap pasangan titik  $u, v \in G$  terdapat *rainbow path*.

**Contoh 2.22** Graf  $G$  pada gambar 2.21 dapat dikatakan *rainbow connection*, karena menurut tabel 2.4 setiap dua titik  $u$  dan  $v$  di  $G$  terdapat *rainbow path u-v*.

**Definisi 2.4.3** (Chartrand dkk, 2008). Misalkan graf  $G$  adalah graf. Pewarnaan sisi pada  $G$  dikatakan *rainbow coloring*, jika pewarnaan itu menyebabkan graf  $G$  *rainbow connection*.

**Contoh 2.23** pewarnaan sisi-3 graf  $G$  pada Gambar 2.21 merupakan *rainbow coloring* karena menyebabkan  $G$  *rainbow connection*.

**Definisi 2.24** (Chartrand dkk, 2008). Misalkan graf  $G$  adalah graf terhubung tak trivial dan  $k$  adalah bilangan bulat positif terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf menjadi *rainbow connection*. *Rainbow coloring* yang menggunakan  $k$  warna disebut *rainbow k-coloring*, maka  $k$  disebut bilangan *rainbow connection* yang dinotasikan dengan  $rc(G)$ .

**Contoh 2.24** Pewarnaan sisi-3 graf  $G$  pada Gambar 2.21 merupakan *rainbow 3-coloring* karena menyebabkan  $G$  *rainbow connection*, maka  $rc(G) = 3$ .

**Teorema 2.4** (Chartrand dkk, 2008). *Misalkan  $G$  adalah graf terhubung tak trivial, maka  $rc(G) \geq diam(G)$ .*