PENENTUAN DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL KORONA ANTARA GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA

SKRIPSI

MUHAMMAD ROZZAQ HAMIDI

H011191042

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

PENENTUAN DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL KORONA ANTARA GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

MUHAMMAD ROZZAQ HAMIDI

H011191042

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Muhammad Rozzaq Hamidi
NIM	: H011191042
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Penentuan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Korona antara Graf Lengkap dengan Graf Roda

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 13 September 2022

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

Muhammad Rozzaq Hamidi
NIM. H011191042

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL KORONA ANTARA GRAF LENGKAP DENGAN GRAF RODA

Disusun dan diajukan oleh

MUHAMMAD ROZZAQ HAMIDI

H011191042

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 13 September 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.
NIP. 19641231 199003 2 007

Pembimbing Pertama,

Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.
NIP. 19850529 200812 1 002

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul **"Penentuan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Korona antara Graf Lengkap dengan Graf Roda"** sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, izinkan penulis mengucapkan terima kasih dan memberikan penghargaan kepada kedua orang tua penulis, Ayah **La Hamidi, S.Pd** dan Ibu **Nursina, S.Pd** yang telah dengan sabar membesarkan dan mendidik penulis, serta memberikan dukungan do'a dan materi, sehingga penulis bisa mencapai di titik ini. Mampu menyelesaikan pendidikan di perguruan tinggi dan mendapat gelar yang insyaAllah dapat dimanfaatkan penulis di kemudian hari. Terima kasih kepada kakak saya **Nurmilawati**, adik **Yayat** dan **Ozil**, serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.

3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si** selaku Pembimbing Utama yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini, serta Bapak **Dr. Muh. Nur, S,Si., M.Si** selaku Pembimbing Pendamping sekaligus Pembimbing Akademik selama penulis menempuh Pendidikan S1. Penulis ucapkan terima kasih atas waktu yang telah diberikan dalam membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini dan membimbing penulis dalam segala hal terkait penyelesaian studi S1 penulis.
4. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si** selaku Tim Penguji yang telah meluangkan waktunya untuk meberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Paman saya Bapak **Safiddun** dan Ibu **Ramlah** yang telah menerima penulis untuk tinggal bersama dan selalu memberikan bantuan, dukungan serta masukan kepada penulis.
6. Keluarga besar **La Hengga** dan **H. La Ahi** yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan perkuliahan penulis.
7. Keluarga besar **SMA Negeri 1 Kontunaga** yang menjadi tempat penulis memulai masa pembentukan jati diri dan mengenal banyak hal, serta terkhusus kepada Ibu **Sitti Nurjannah** yang selalu mempercayai penulis dan meberikan kesempatan yang luar biasa untuk menjadi siswa berprestasi dan mengharumkan nama sekolah pada masa itu.
8. Sahabat penulis **Angga** dan grup **"BFF", Irma, Titin, Roy, Dian, Anita, Riko,** dan **Asar** yang telah menemani penulis dari bangku sekolah dasar, sekolah menengah, hingga di perkuliahan, dan selalu memberikan dukungan, serta selalu ada ketika penulis membutuhkan bantuan.
9. Teman-teman **Matematika 2019** khususnya **Ichsan, Wawan, Ade, Tasya, Irfa, Dara,** dan **Isra** yang telah memberi warna-warni masa perkuliahan, membantu, dan memberikan dukungan kepada penulis dalam penyelesaian studi penulis.

10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibdah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 13 September 2022

Muhammad Rozzaq Hamidi

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Rozzaq Hamidi

NIM : H011191042

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penentuan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Korona antara Graf Lengkap dengan Graf Roda

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 13 September 2022

Yang menyatakan,

Muhammad Rozzaq Hamidi

ABSTRAK

Graf G adalah pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi (*edge*). Misalkan G adalah graf sederhana. Untuk $v \in V(G)$ dan $S \subseteq V(G)$, jarak titik v terhadap S adalah $d(v, S) = \min\{d(v, x) |\, x \in S\}$. Jika $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ maka representasi v terhadap $\prod$ merupakan pasangan$-k$ terurut $r(v|\prod) = \left(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\right)$. Partisi $\prod$ disebut partisi pembeda dari G jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$. Partisi pembeda $\prod$ dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum. Adapun Dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ merupakan kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G. Pada skripsi ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf hasil korona antara graf lengkap dan graf roda dengan menggunakan beberapa pernyataan matematika tentang partisi pembeda, titik setara, dan titik setingkat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $pd(K_n \odot W_{n+1}) = 4$ untuk $n = 3$ dan $pd(K_n \odot W_{n+1}) = n$ untuk $n > 3$.

Kata Kunci : *teori graf, partisi pembeda, dimensi partisi, graf hasil korona, graf lengkap, graf roda, titik setara, titik setingkat*

Judul : Penentuan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Korona antara Graf Lengkap dengan Graf Roda

Nama : Muhammad Rozzaq Hamidi

NIM : H011191042

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

The graph G is a pair of sets $(V(G), E(G))$, where $V(G)$ is a finite set whose elements are called vertices, and $E(G)$ is the set of pairs of members of $V(G)$. which is called the edge. Let G be a simple graph. For $v \in V(G)$ and $S \subseteq V(G)$, the distance between v and S is $d(v,S) = \min\{d(v,x) | x \in S\}$. If $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ is ordered partition of $V(G)$, then representation of v respect to $\prod$ is k-ordered pairs, $r(v|\prod) = \big(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\big)$. The partition $\prod$ is called a resolving partition of G if $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ for all distinct $u, v \in V(G)$. The resolving partition $\prod$ with the minimum cardinality is called minimum resolving partition. The Partition dimension of G, denoted by $pd(G)$ is the cardinality of a minimum resolving partition of G. In this thesis, we will determine the partition dimension of corona product of complete and wheel graph by using some mathematical statements about resolving partition, equivalent vertices, and same level vertices. The results show that $pd(K_n \odot W_{n+1}) = 4$ for $n = 3$ and $pd(K_n \odot W_{n+1}) = n$ for $n > 3$.

Keywords : *graph theory, resolving partition, partition dimension, corona product graph, complete graph, wheel graph, equivalent vertices, same level vertices.*

Title	: *The Partition Dimension of Corona Product of Complete and Wheel Graph*
Name	: *Muhammad Rozzaq Hamidi*
Student ID	: *H011191042*
Study Program	: *Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$pd(G)$	Dimensi partisi graf G	2
$Amal(C_n)_m$	Graf kincir angin belanda	2
$C_m \odot K_n$	Graf siklus korona graf lengkap	2
$P_m \odot K_{1,m}$	Graf lintasan korona graf bintang	2
$V(G)$	Himpunan titik graf G	6
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	6
$\in$	Elemen dari suatu himpunan	8
$deg(v_i)$	Derajat titik v_i pada graf G	9
$N(v_i)$	Himpunan tetangga titik v_i	9
$\delta(G)$	Derajat minimum graf G	9
$\Delta(G)$	Derajat maksimum graf G	9
$d(u,v)$	Jarak titik u ke titik v dalam graf G	9
$\subseteq$	Subhimpunan	10
$+$	Operasi tambah	11
$\cup$	Operasi gabung	11
C_n	Graf siklus berorde n	13
P_n	Graf lintasan berorde n	13
K_n	Graf lengkap berorde n	14
$K_1 + C_n$	Graf lengkap berorde 1 tambah graf siklus	14
W_n	Graf roda berorde $n+1$	14
$\prod$	Partisi terurut dari $V(G)$	15
$r(v \vert \prod)$	Representasi titik v terhadap partisi terurut $\prod$	15
$V(G)/\{u,v\}$	Himpunan titik graf G selain titik u dan v	16
$\forall$	Untuk setiap	16

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang sangat sering dijumpai pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang ilmu Matematika ialah matematika diskrit. Matematika diskrit sendiri merupakan cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit. Kata diskrit yang dimaksud merujuk pada benda atau objek yang terdiri dari sejumlah berhingga elelemen yang berbeda atau elemen-elemen yang tidak bersambungan (Munir,2003). Teori graf sebagai salah satu cabang matematika diskrit pertama kali diperkenalkan oleh Leonardo Euler pada tahun 1736 melalui karya tulisnya yang berjudul "*Solution Problematis and Geometrian Situs Pertinentis*". Karya tulis ini menjawab teka taki jembatan Konigsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Konigsberg yang mempunyai 7 buah jembatan, dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama, tetapi tidak dilakukan. Leonardo Euler menyederhanakan jembatan Konigsberg dengan merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi, sehingga bentuk dari jembatan Konigsberg dapat direpresentasikan melalui graf (Hasmawati,2020).

Rinaldi Munir dalam bukunya mendefenisikan Graf G sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul (Munir,2003).

Hingga saat ini teori graf sebagai bagian dari matematika diskrit telah mengalami perluasan materi, salah satunya adalah dimensi partisi. Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan pada tahun 1998 oleh Chartrand dkk., yang mengelempokkan semua titik di graf G ke dalam suatu kelas partisi dan menetukan repsentasi setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut. Representasi tersebut berupa penentuan jarak dari setiap titik dari graf G terhadap kelas partisi yang telah dibentuk (Darmaji,2011).

Penelitian terkait dimensi partisi dari suatu graf telah banyak dilakukan oleh para peneliti. Akan tetapi dimensi partisi untuk sebarang graf belum dapat ditentukan hingga saat ini. Dalam hal ini, belum terdapat formula umum untuk dimensi partisi atas sebarang graf. Dimensi partisi untuk beberapa graf tertentu telah dikaji oleh banyak peneliti, misalnya oleh Tomescu dkk. menemukan dimensi partisi graf roda adalah $\left\lceil (2n)^{\frac{1}{3}} \right\rceil \leq pd(G) \leq p + 1$ dengan p merupakan bilangan prima terkecil sehingga $p(p-1) \geq n$.

Pada tahun 2021, Hasmawati dkk., melakukan penelitian terkait dimensi partisi pada graf kincir angin belanda. Dimensi partisi untuk graf tersebut adalah $pd(Amal(C_n)_m) = k$, untuk suatu $k \geq 3, n \geq 3$ dan $m \in I_k$. Adapun penelitian terkait dimensi partisi untuk graf yang telah dioperasikan, khususnya graf dengan operasi korona masih sedikit dikaji oleh para peneliti. Pada tahun 2012, Yogi dkk., memperoleh dimensi partisi graf korona antara graf siklus dengan graf lengkap adalah $pd(C_m \odot K_n) = 3$ untuk $n = 1$ dan $pd(C_m \odot K_n) = p$ untuk $n > 1$, dengan p merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi $\binom{p}{n} \geq m$. Selanjutnya pada tahun 2017, Purwaningsih dan Zulakmal menemukan dimensi partisi graf korona antara graf lintasan dengan graf bintang adalah $pd\left(P_m \odot K_{1,m}\right) = n$, untuk $m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ dan $pd\left(P_m \odot K_{1,m}\right) = n + 1$, untuk $m > \lfloor n/2 \rfloor$. Di tahun yang sama, Listiana memperoleh dimensi partisi pada graf hasil operasi korona antargraf lengkap adalah $pd(K_n \odot K_{n-1}) = 2n - 1$ untuk $n \geq 3$.

Berdasarkan penelurusan literatur yang dilakukan oleh penulis, penelitian mengenai dimensi partisi dari graf hasil operasi korona antara graf lengkap dengan graf roda belum dilakukan oleh para peneliti sebelumnya. Oleh karena itu, penulis memutuskan untuk melakukan penelitian dan mengkaji dimensi partisi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap dengan graf roda.

I.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang di atas antara lain :

1. Bagaimana mengkonstruksi himpunan partisi yang merupakan partisi pembeda dari graf hasil operasi korona antara graf lengkap dengan graf roda ?
2. Bagaimana menentukan dimensi partisi dari graf hasil operasi korona antara graf lengkap dengan graf roda ?

I.3 Batasan Masalah

Masalah pada penelitian ini dibatasi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n dengan graf roda berorde $n+2$, untuk $n \geq 3$.

I.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini ialah :

1. Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n dengan graf roda berorde $n+2,\ n \geq 3$.
2. Menentukan dimensi partisi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n dengan graf roda berorde $n+2, n \geq 3$.

I.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah dapat menambah pemahaman dan menjadi sumber referensi dalam mengembangkan ilmu matematika diskrit khususnya di bidang teori graf terkait dengan penentuan dimensi partisi pada graf hasil operasi korona antara graf lengkap dengan graf roda.

I.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari lima bagian, dengan masing-masing bagian dibagi ke dalam beberapa subbab. Adapun rincian sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mencakup latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini mencakup pemaparan secara singkat mengenai konsep dasar yang menunjang pembahasan masalah, yakni definisi-definisi dan istilah-istilah yang berkaitan dengan teori graf.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini mencakup metode penelitian, waktu dan tempat penelitian, dan prosedur penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yakni menentukan dimenasi partisi dari graf hasil operasi korona antara graf lengkap berorde n dengan graf roda berorde $n + 2$, $n \geq 3$.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini menyajikan kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditujukkan bagi peneliti selanjutnya untuk mengembangkan penelitian yang telah dikaji dalam tugas akhir ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas beberapa istilah penting dalam graf, terasuk jenis-jenis graf beserta operasinya, dan beberapa definisi, sifat, dan teorema yang terkait dengan konsep dimensi partisi graf. Selain itu, juga disajikan beberapa hasil penelitian yang telah diperoleh terkait penentuan dimensi partisi pada graf sederhana.

II.1 Dasar-Dasar Graf

Secara umum dikenal beberapa macam definisi, notasi, dan istilah dalam graf. Ada penulis dalam mendefinisikan graf memperbolehkan adanya sisi pararel (beberapa sisi yang menghubungkan dua titik) atau lup (*loop*) yakni sisi yang menghubungkan titik dengan titik itu sendiri. Dalam penyusunan skripsi ini, terkait definisi, notasi, dan istilah dalam graf lebih banyak merujuk pada buku “Pengantar dan Jenis-Jenis Graf” yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2020.

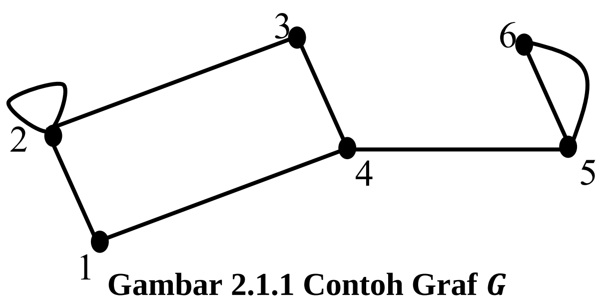
Definisi 2.1.1 Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi (*edge*).

Definisi 2.1 mengisyaratkan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sebuah graf dapat saja tidak mempunyai sisi satu buah pun, akan tetapi mengharuskan adanya titik minimal satu. Graf yang hanya terdiri atas titik-titik tanpa adanya sisi disebut graf trivial.

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, d, \dots, v, w,$ ..., atau dengan bilangan asli 1,2,3, ..., atau gabungan huruf dan bilangan asli. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dan titik v dapat dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau biasa dilambangkan dengan $e_1, e_2, \dots$. Jadi, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dan v maka

e dapat dinyatakan sebagai $e = (u, v)$ atau uv yang menyatakan sisi yang menghubungkan titik u dan v. (Munir,2003).

Contoh 2.1.1 Misalkan himpunan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $E(G) = \{12, 22, 14, 23, 34, 45, 56, 56\}$. Maka pasangan himpunan $G = \big(V(G), E(H)\big)$ merupakan graf karena $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan anggota E adalah pasangan dari elemen-elemen $V(G)$ yang juga berhingga. Bentuk graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.

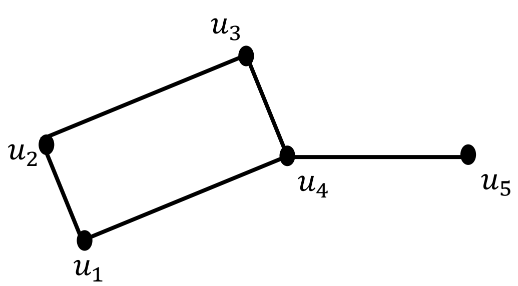


Gambar 2.1.1 Contoh Graf G

Defenisi 2.1.1 memberikan definisi graf secara umum. Dengan memberikan syarat tambahan pada Definisi 2.1.1, maka akan diperoleh graf sederhana (*Simple Graph*) seperti yang disajikan pada Defenisi 2.1.2

Definisi 2.1.2 Graf sederhana G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*).

Contoh 2.1.2 Misalkan himpunan $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(G_1) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5\}$. Bentuk graf G_1 dapat dilihat pada Gambar 2.1.2.



Gambar 2.1.2 Graf G_1

Pada Gambar 2.1.2, dapat dilihat bahwa $V(G_1)$ tidak kosong dan berhingga serta untuk setiap $u_i u_j$, di $E(G_1), u_i u_j = u_j u_i$ dan $u_i \neq u_j$ untuk $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$. Oleh karena itu, graf G_1 adalah salah satu contoh graf sederhana.

Definisi 2.1.3 Orde (*order*) dari graf G yang disimbolkan dengan p adalah banyaknya anggota dari $V(G)$. Adapun ukuran (*size*) dari graf G yang dinyatakan dengan simbol q adalah banyaknya anggota dari $E(G)$.

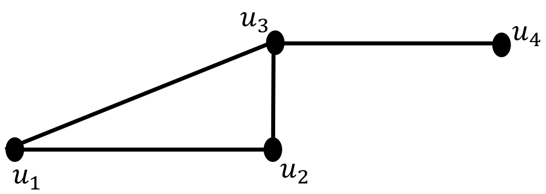
Contoh 2.1.3 Graf G_1 pada Gambar 2.1.2 adalah graf berorde lima dan berukuran lima.

Definisi 2.1.4 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa :

1. Titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j.
2. Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i dan titik v_j

Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah sisi dari suatu graf G dan v adalah titik graf G. JIka x_1, x_2, dan x_3 terkait dengan titik v , maka sisi x_1, x_2, dan x_3 dikatakan bertetangga.

Contoh 2.1.4 Misalkan himpunan $V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G_2) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, u_3u_4\}$. Bentuk graf G_2 dapat dilihat pada Gambar 2.1.3.

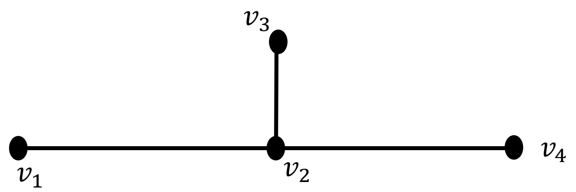


Gambar 2.1.3 Graf G_2 Berorde Empat

Pada Gambar 2.1.3, titik u_3 bertetangga dengan titik u_1, u_2, dan u_3. Tetapi titik u_4 tidak bertetangga dengan titik u_1 dan u_2. Sisi u_1u_2 terkait dengan titik u_1 dan titik u_2.

Definisi 2.1.5 Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan "$deg(v_i)$", adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $deg(v_i) = |N_G(v_i)|$. Derajat minimum dari graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{deg(v); v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{deg(v); v \in V(G)\}$.

Contoh 2.1.5 Graf G_3 pada Gambar 2.1.4 berikut memiliki $deg(v_1) = 1$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 1$, dan $deg(v_4) = 1$. Sedangkan untuk derajat minimum dan maksimumnya berturut-turut ialah $\delta(G_3) = 1$ dan $\Delta(G_3) = 3$.



Gambar 2.1.4 Graf G_3 Berorde Empat yang Memiliki Satu Titik Berderajat Tiga dan Tiga Titik Berderajat Satu

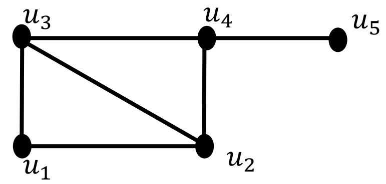
Definisi 2.1.6 Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut.

Apabila untuk setiap dua titik u dan v selalu terdapat lintasan yang memuat titik u dan v maka graf G dikatakan graf terhubung. Sebaliknya, apabila terdapat dua titik u dan v dan setiap lintasan pada graf G tidak memuat titik u dan v, maka graf G dikatakan graf tak terhubung.

Contoh 2.1.6 Perhatikan Graf G_3 pada Gambar 2.1.4. Karena untuk setiap titik $v_i, v_j \in V(G)$, dengan $i, j = \{1,2,3,4\}$ dan $i \neq j$, terdapat lintasan yang memuat titik v_i dan v_j maka graf G pada Gambar 2.1.4 adalah graf terhubung.

Definisi 2.1.7 Jarak dari titik u ke titik v dalam graf G dinotasikan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Jika G tidak memiliki lintasan dari u ke v, maka didefinisikan $d(u, v) = \infty$ (Alfarisi,2017).

Contoh 2.1.7 Diberikan graf G_4 seperti pada Gambar 2.1.5 berikut.

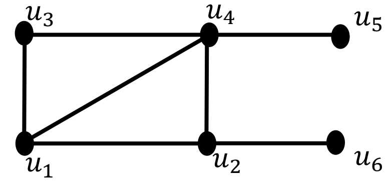


Gambar 2.1.5 Graf G_4 Berorde Lima yang Memiliki Lintasan Terpanjang Empat

Graf G_4 pada Gambar 2.1.5 memiliki lintasan terpanjang empat yang diperoleh melalui titik u_1 dan u_5. Perhatikan bahwa trdapat empat lintasan dari titik u_1 ke titik u_5. Litasan pertama adalah $u_1, u_1u_3, u_3, u_3u_4, u_4, u_4u_5, u_5$ yang memiliki panjang tiga. Litasan kedua adalah $u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_4, u_4, u_4u_5, u_5$ yang memiliki panjang tiga. Litasan ketiga adalah $u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3, u_3u_4, u_4, u_4u_5, u_5$ yang memiliki Panjang empat. Litasan keempat adalah $u_1, u_1u_3, u_3, u_3u_2, u_2, u_2u_4, u_4,$ u_4u_5, u_5 yang memiliki panjang empat. Karena jarak dari titik u_1 ke titik u_5 merupakan panjang lintasan terpendek dari titik u_1 ke titik u_5, maka jarak titik u_1 ke titik u_5 adalah $d(u_1, u_5) = 3$. Dalam hal ini, pada graf tersebut memiliki lintasan terpanjang empat yang diperoleh melalui titik u_1 dan u_5, akan tetapi jarak dari titik u_1 ke titik u_5 adalah tiga.

Definisi 2.1.8 Jika titik $u \in V(G)$ dan subhimpunan $S \subset V(G)$, maka jarak dari u ke S dinotasikan dengan $d(u, S)$ dan didefinisikan sebagai $d(u, S) = \min\{d(u, x) | x \in S\}$. Sehingga untuk setiap $u \in S, d(u, S) = 0$ (Darmaji,2011).

Contoh 2.1.8 Misalkan himpunan $V(G_5) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $E(G_5) = \{u_1u_2,\ u_1u_3,\ u_1u_4,\ u_2u_4,\ u_2u_6,\ u_3u_4,\ u_4u_5\}$ serta diberikan $S = \{u_1, u_2, u_3\}$. Bentuk graf G_5 dapat dilihat pada Gambar 2.1.6.



Gambar 2.1.6 Graf G_5 Berorde Enam

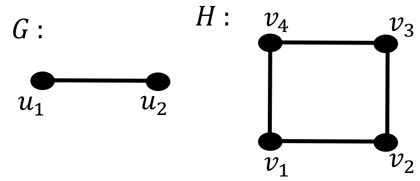
Pada Gambar 2.1.6 diperoleh, $d(u_6, S) = \min\{d(u_6, x) | x \in S\} = \min\{d(u_6, u_1), d(u_6, u_2), d(u_6, u_3)\} = \min\{2,1,3\} = 1$.

II.2 Operasi dalam Graf

Terdapat beberapa operasi yang dikenal dalam teori graf, diantaranya adalah operasi gabung, operasi tambah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi subdivisi, dan operasi korona. Akan tetapi, dalam penulisan ini, operasi yang digunakan hanyalah operasi tambah dan operasi korona, sehingga operasi yang disajikan pada subbab ini hanyalah operasi tambah dan operasi korona. Pembahasan operasi graf ini merujuk pada buku "Pengantar dan Jenis-Jenis Graf" yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2020.

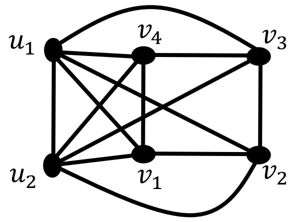
Definisi 2.2.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$, maka graf tambah antara G dan H ditulis $G + H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv: \forall\, u \in V(G), v \in V(H)\}$.

Contoh 2.2.1 Misalkan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{u_1, u_2\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2\}$, serta H adalah graf dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$. Maka gambar graf G dan H adalah sebagai berikut.



Gambar 2.2.1 Graf *G* dan Graf *H*

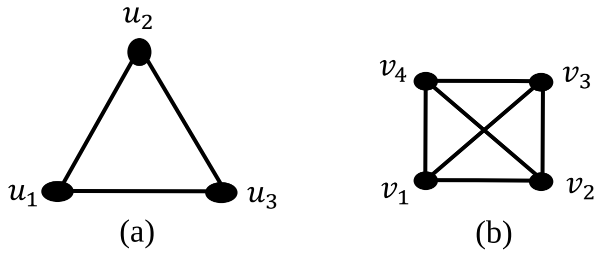
Graf jumlah $G + H$ mempunyai $V(G + H) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G + H) = \{u_1u_2, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\} \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4\}$.



Gambar 2.2.2 Graf Jumlah $G + H$

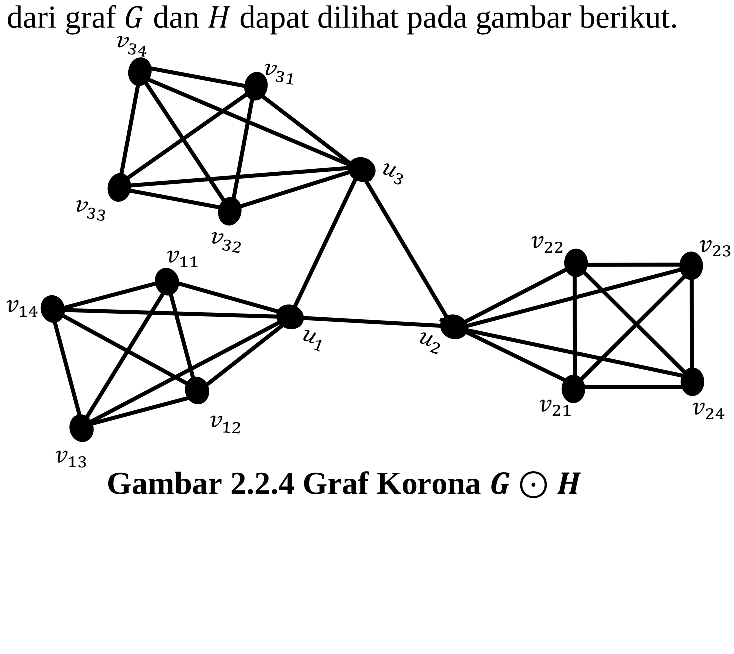
Definisi 2.2.2 Misalkan G adalah graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sebanyak n kali namakan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ dan mengaitkan titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i = 1,2, . . , n$ (Hasmawati,2020).

Contoh 2.2.2 Diberikan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_1u_3\}$ dan graf H adalah graf dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Bentuk graf G dan H dapat dilihat pada Gambar 2.2.3 berikut.



Gambar 2.2.3 (a) Graf G dan (b) Graf H

Karena graf G mempunyai tiga titik, maka graf H digandakan sebanyak tiga kali dan setiap titik di graf G dikaitkan dengan suatu titik di graf H. Hasil korona dari graf G dan H dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.2.4 Graf Korona $G \odot H$

Operasi korona memiliki sifat tidak komutatif apabila graf G tidak isomorfik dengan graf H. Hal ini dikarenakan untuk $G \odot H$ artinya graf H sebagai graf kedua harus digandakan sebanyak jumlah titik graf G, kemudian untuk titik ke-i dari graf G dihubungkan ke setiap titik di H_i berdasarkan Definisi 2.4.1. Sifat lain yang dimiliki graf hasil operasi korona adalah misalkan diberikan graf G dan H, maka graf hasil operasi korona $G \odot H,$ memenuhi :

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H_i)$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(H_i) \cup \{iu_i | u_i \in V(H_i)\}$$

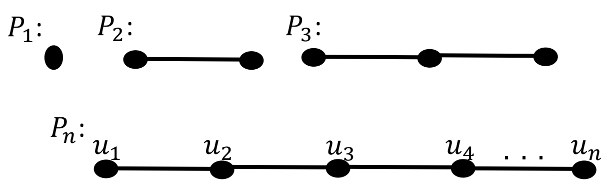
dengan H_i adalah penggandaan dari graf H (Maro,2017).

II.3 Jenis-jenis Graf

Pada teori graf dikenal berbagai jenis graf. Jenis-jenis graf tersebut diantaranya adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, graf roda, graf kipas, graf helm, graf web, graf gergaji, graf gir, graf jahangir, dan sebagainya. Pada penulisan ini graf yang akan dibahas hanyalah graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, dan graf roda. Graf roda dapat dikonstruksi melalui graf siklus C_n.

Definisi 2.3.1 Graf lintasan adalah graf sederhana yang kedua titik ujungnya berderajat satu disebut *pendant*, sedangkan titik yang lain berderajat dua. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n (Alfarisi,2017).

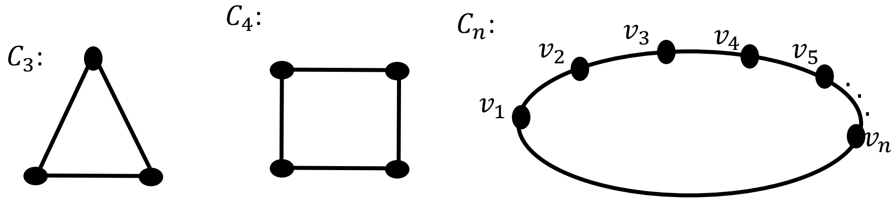
Contoh 2.3.1



Gambar 2.3.1 Graf Lintasan

Definisi 2.3.2 Misalkan $P_n: v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2, \ldots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n-1$. Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati,2020).

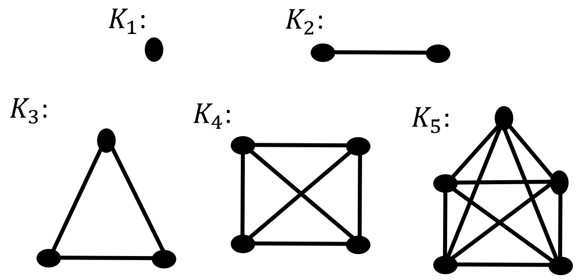
Contoh 2.3.2



Gambar 2.3.2 Graf Siklus

Definisi 2.3.3 Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga atau dengan kata lain untuk setiap $u, v \in V(G)$ berlaku $uv \in E(G)$. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Hasmawati,2020).

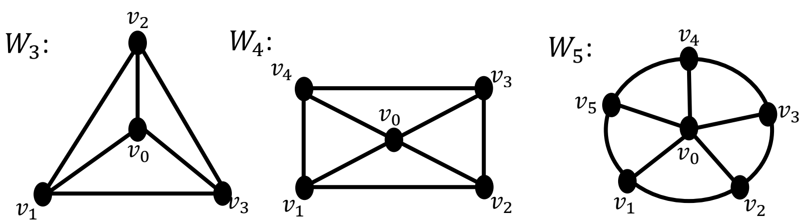
Contoh 2.3.3



Gambar 2.3.3 Graf Lengkap

Definisi 2.3.4 Graf roda (*Wheel*) adalah graf yang dikonstruksi dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x dan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus ($K_1 + C_n$). Graf roda berorde $n+1$ dinotasikan dengan W_n (Hasmawati,2020).

Contoh 2.3.4



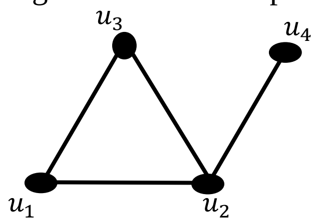
Gambar 2.3.4 Graf Roda

II.4 Dimensi Partisi

Pada subbab ini akan dibahas definisi, sifat, dan teorema yang terkait dengan konsep dimensi partisi graf. Beberapa definisi terkait dimensi partisi lebih banyak merujuk pada disertasi yang disusun oleh Darmaji pada tahun 2011.

Defenisi 2.4.1 Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$. Representasi dari $v \in V(G)$ terhadap $\prod$ dinotasikan $r(v|\prod)$ merupakan pasangan$-k$ terurut $\big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\big)$.

Contoh 2.4.1 Diberikan graf G berorde 4 seperti pada Gambar 2.5.1 berikut.



Gambar 2.4.1 Graf G berorde 4

Berdasarkan Gambar 2.4.1, diperoleh himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Pilih partisi terurut dari $V(G)$ yakni $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2\}, S_2 = \{u_3\}, S_3 = \{u_4\}$. Representasi untuk setiap $v \in V(G)$ terhadap $\prod$ ialah sebagai berikut.

- $r(u_1|\prod) = \{d(u_1, S_1), d(u_1, S_2), d(u_1, S_3)\} = \{0,1,2\}$
- $r(u_2|\prod) = \{d(u_2, S_1), d(u_2, S_2), d(u_3, S_3)\} = \{0,1,1\}$
- $r(u_3|\prod) = \{d(u_3, S_1), d(u_3, S_2), d(u_3, S_3)\} = \{1,0,2\}$
- $r(u_4|\prod) = \{d(u_4, S_1), d(u_4, S_2), d(u_4, S_3)\} = \{1,2,0\}$

Definisi 2.4.2 Partisi terurut $\prod$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$ jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ memiliki representasi terhadap $\prod$ yang berbeda, yakni berlaku $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$.

Contoh 2.4.2 Berdasarkan Contoh 2.4.1 diperoleh untuk setiap $i \neq j \in V(G)$ berlaku $r(u_i|\prod) \neq r(u_j|\prod)$, sehingga $\prod$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$.

Definisi 2.4.3 Partisi pembeda $\prod$ dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum. Adapun Dimensi partisi $pd(G)$ dari graf G adalah kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G.

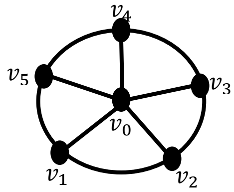
Contoh 2.4.3 Berdasarkan Contoh 2.4.2 $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2\}, S_2 = \{u_3\}, S_3 = \{u_4\}$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari $V(G)$ memiliki kardinalitas sedikitnya 3. Misalkan suatu partisi pembeda dari $V(G)$ dengan $|\prod| = 2$, sehingga diberikan $\prod^* = \{S_1^*, S_2^*\}$ bukan partisi pembeda dari $V(G)$ karena representasi $\prod^*$ pada G menghasilkan representasi yang sama, yaitu $r(u_1|\prod^*) = r(u_2|\prod^*) = (0,1)$, kontradiksi dengan pemisalan $\prod^*$ sebagai partisi pembeda. Oleh karena itu, $\prod$ merupakan partisi pembeda minimum dari G dengan kardinalitas $\prod$ adalah tiga. Maka diperoleh, dimensi partisi dari graf G pada Contoh 2.4.1 adalah $pd(G) = 3$.

Untuk kepentingan pembuktian dimensi partisi pada graf yang diteliti, maka disajikan beberapa definisi dan teorema yang akan membantu dalam pembahasan masalah pada penelitian ini.

Definisi 2.4.4 Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut (Hasmawati,2022) :

- $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)/\{u,v\}$
- Terdapat titik c sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$, $\forall s \in V(G)/\{u,v\}$.

Contoh 2.4.4 Diberikan graf W_5 dengan $V(W_5) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(W_5) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_0v_5, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$.



Gambar 2.4.2 Graf W_5

Berdasarkan Definisi 2.4.4, untuk setiap $i, j = 1,2,3,4,5$ dengan $i \neq j$, titik v_i dan titik v_j adalah titik setara karena terdapat titik v_0 sedemikian sehingga :

$$d(v_i, v_0) + d(v_0, s) = d(v_j, v_0) + d(v_0, s) = 2, \forall s \in V(W_5)/\{v_i, v_j\}$$

Teorema 2.4.1 Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. JIka $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara dalam G, maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$ (Hasmawati,2021).

Definisi 2.4.5 Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setingkat dalam graf G apabila memenuhi sifat – sifat berikut (Hasmawati,2021) :

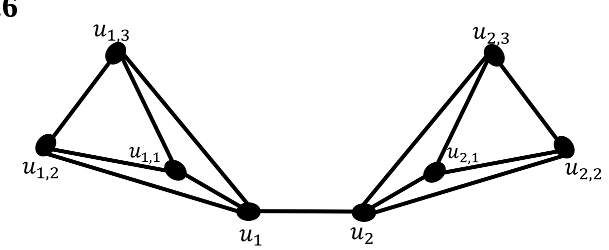
- $deg(u) = deg(v)$
- Jika $d(u, x) = k$, terdapat $y \in V(G)$ sehingga $d(u, x) = d(v, y) = k$ dan $|\{x \in V(G) | d(u, x) = k\}| = |\{y \in V(G) | d(v, y) = k\}|$

Teorema 2.4.2 Jika G adalah graf berorde $n \geq 3$ dan diameter d, maka $g(n, d) \leq pd(G) \leq n - d + 1$, dengan $g(n, d)$ merupakan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian hingga $(d + 1)^k \geq n$ (Hasmawati, 2022).

Teorema 2.4.3 Misalkan G adalah graf terhubung berorde n. Maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$ (Chartrand,Salehi,dan Zhang, 2000).

Teorema 2.4.4 Misalkan G dan H adalah graf terhubung, dengan diameter $diam(H) \leq 2$. Maka, dimensi partisi $pd(G \odot H) \leq pd(G) + pd(H)$.

Contoh 2.4.6



Gambar 2.4.3 Graf $K_2 \odot K_3$

Berdasarkan hasil penelitian Darmaji pada tahun 2011, dimensi partisi dari graf $K_2 \odot K_3$ pada Gambar 2.4.3 adalah $3 + 1 = 4$. Oleh karena itu, dapat dipastikan bahwa kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G adalah 4 dan dapat dipilih $\prod = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dengan $S_1 = \{u_1,\ u_2,\ u_{2,1}, u_{3,1}\}$, $S_2 = \{u_{1,1}, u_{3,2}\}$, $S_3 = \{u_{1,2}, u_{2,2}\}$, $S_4 = \{u_{1,3}, u_{2,3}, u_{3,3}\}$ sebagai partisi pembeda dari $V(G)$.

Pembuktian $\prod$ sebagai partisi pembeda dari $V(G)$ sebagai berikut.

$r(u_1|\prod) = \{d(u_1, S_1), d(u_1, S_2), d(u_1, S_3), d(u_1, S_4)\} = \{0,1,1,1\}$

$r(u_2|\prod) = \{d(u_2, S_1), d(u_2, S_2), d(u_2, S_3), d(u_2, S_4)\} = \{0,2,1,1\}$

$r(u_{1,1}|\prod) = \{d(u_{1,1}, S_1), d(u_{1,1}, S_2), d(u_{1,1}, S_3), d(u_{1,1}, S_4)\} = \{1,0,1,1\}$

$r(u_{1,2}|\prod) = \{d(u_{1,2}, S_1), d(u_{1,2}, S_2), d(u_{1,2}, S_3), d(u_{1,2}, S_4)\} = \{1,1,0,1\}$

$r(u_{1,3}|\prod) = \{d(u_{1,3}, S_1), d(u_{1,3}, S_2), d(u_{1,3}, S_3), d(u_{1,3}, S_4)\} = \{1,1,0,1\}$

$r(u_{2,1}|\prod) = \{d(u_{2,1}, S_1), d(u_{2,1}, S_2), d(u_{2,1}, S_3), d(u_{2,1}, S_4)\} = \{0,3,1,1\}$

$r(u_{2,2}|\prod) = \{d(u_{2,2}, S_1), d(u_{2,2}, S_2), d(u_{2,2}, S_3), d(u_{2,2}, S_4)\} = \{1,3,0,1\}$

$r(u_{2,3}|\prod) = \{d(u_{2,3}, S_1), d(u_{2,3}, S_2), d(u_{2,3}, S_3), d(u_{2,3}, S_4)\} = \{1,3,1,0\}$

$r(u_{3,1}|\prod) = \{d(u_{3,1}, S_1), d(u_{3,1}, S_2), d(u_{3,1}, S_3), d(u_{3,1}, S_4)\} = \{0,1,3,1\}$

$r(u_{3,2}|\prod) = \{d(u_{3,2}, S_1), d(u_{3,2}, S_2), d(u_{3,2}, S_3), d(u_{3,2}, S_4)\} = \{1,0,3,1\}$

$r(u_{3,3}|\prod) = \{d(u_{3,3}, S_1), d(u_{3,3}, S_2), d(u_{3,3}, S_3), d(u_{3,3}, S_4)\} = \{1,1,3,0\}$

Tabel 2.4 Hasil Penelitian Dimensi Partisi Pada Graf Sederhana

Graf	Dimensi Partisi	Keterangan
$G \cong P_m \odot K_n$, $m \geq 2$ dan $n \geq 4$	$pd(G) = n + 1\,; m \leq n + 2$ $pd(G) = n + 2\,; m \leq n + 3$	(Darmaji,2011)
$G \cong K_m \odot K_n$, $m \geq 2$ dan $n \geq 3$	$pd(G) = n + 1\,;$ $2 \leq m \leq \binom{n+1}{n}$ $pd(G) = n + 2\,;$ $\binom{n+1}{n} + 1 \leq m \leq \binom{n+2}{n} + 1$ $pd(G) \leq n + k\,;$ $\binom{n+k-1}{n} + 1 \leq m \leq \binom{n+k}{n}$	(Darmaji,2011)
$G \cong W_n, n \geq 4$	$\left\lceil (2n)^{\frac{1}{3}} \right\rceil \leq pd(G) \leq p + 1$ p adalah bilangan prima terkecil sehingga $p(p-1) \geq n$	(Tomescu dkk,2007)
$G \cong K_n \odot K_{n-1}$, $n \geq 3$	$pd(G) = 2n - 1, n \geq 3$	(Listiana,2017)
$G \cong P_m \odot K_{1,m}$	$pd(G) = n, m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ $pd(G) = n + 1, m > \lfloor n/2 \rfloor$	(Purwaningsih,2017)
$G \cong Amal(C_n)_m$, untuk suatu $k \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m \in I_k$	$pd(Amal(C_n)_m) = k$	(Hasmawati dkk,2021)
$G \cong C_m \odot K_n$,	$pd(G) = 3, n = 1$ $pd(G) = p, n > 1$, p merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi $\binom{p}{n} \geq m$	(Yogi dkk,2012)

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

III.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian pustaka (*library research*). Metode ini merupakan metode yang dilakukan dengan mengkaji beberapa literatur-literatur yang ada dengan tujuan menunjang dan memastikan penelitian yang dilakukan belum diteliti oleh para peneliti sebelumnya.

III.2 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan mulai tanggal 15 Januari 2022. Penelitian dilakukan secara daring dan luring. Penulis menggunakan sumber literatur yang tersedia di internet, perpustakaan dan Ruang Belajar jurusan matematika Universitas Hasanuddin.

III.3 Prosedur Penelitian

Secara rinci, prosedur penelitian ini dijabarkan sebagai berikut.

1. Mengumpulkan Data

   Peneliti mengumpulkan data dari beberapa literatur yang mendukung topik penelitian yang dikaji. Literatur tersebut bersumber dari buku, jurnal, artikel,maupun sumber lainnya yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

2. Penentuan Spesifikasi Penelitian

   Setelah dilakukan pengumpulan data, selanjutnya akan dilakukan spesifikasi penelitian. Spesifikasi yang dimaksud adalah penentuan dimensi partisi dari suatu graf. Adapun jenis graf yang akan diteliti adalah graf hasil korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde $n+2$ (W_{n+1}) , untuk $n \geq 3$.

3. Analisis Data

Langkah-langkah untuk menganalisis data dalam penelitian ini ialah :

a) Mendefinisikan dan menggambar graf hasil korona K_n dan W_{n+1}.

b) Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf hasil korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde $n+2$ (W_{n+1}) .

c) Merumuskan hasil pencarian dimensi partisi untuk graf hasil korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde $n+2$ (W_{n+1}) dari batas atas dan batas bawah yang diperoleh.

d) Merumuskan kesimpulan terkait dimensi partisi untuk graf hasil korona antara graf lengkap berorde n (K_n) dengan graf roda berorde $n+2$ (W_{n+1}).