# DIMENSI PARTISI GRAF JUMLAH ANTARA GRAF LENGKAP $K_1$ DENGAN GRAF GERGAJI $GR_n$

## SKRIPSI


**DERMAWAN SAPUTRA**
**H011191036**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**


**FEBRUARI 2023**

# DIMENSI PARTISI GRAF JUMLAH ANTARA GRAF LENGKAP $K_1$ DENGAN GRAF GERGAJI $GR_n$

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**DERMAWAN SAPUTRA**
**H011191036**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**
**MAKASSAR**
**FEBRUARI 2023**

# PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Dermawan Saputra |
| NIM | : H011191036 |
| Program Studi | : Matematika |
| Jenjang | : S1 |

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**Dimensi Partisi Graf Jumlah Antara Graf Lengkap $K_1$ Dengan Graf Gergaji $GR_n$**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 15 Februari 2023

Yang menyatakan,

Dermawan Saputra
NIM. H011191036

# LEMBAR PENGESAHAN

## DIMENSI PARTISI GRAF JUMLAH ANTARA GRAF LENGKAP $K_1$ DENGAN GRAF GERGAJI $GR_n$

**Disusun dan diajukan oleh**

**DERMAWAN SAPUTRA**

**H011191036**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal, 15 Februari 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

**Pembimbing Utama,**

**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
**NIP. 19680601 199512 2 001**

**Pembimbing Pertama,**

**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
**NIP. 19711003 199702 2 001**

**Ketua Program Studi Matematika,**

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN FAKULTAS MIPA

**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
**NIP. 19700807 200003 1 002**

# KATA PENGANTAR

*Bismillahirrahmanirrahim.* Segala puji hanya milik Allah *Subhanahu wata'ala*, atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi yang berjudul "Dimensi Partisi Pada Graf Jumlah Antara Graf Lengkap $K_1$ Dengan Graf Gergaji $GR_n$" dapat diselesaikan, sebagai syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Untuk menyelesaikan skripsi ini, proses yang harus penulis lalui sangat panjang, tantangan dan rintangan mulai dari persiapan hingga penyelesaian skripsi ini. Penyusunan skripsi ini tentunya tidak terlepas dari dukungan banyak pihak, baik secara spiritual, material maupun bantuan doa. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada orang tua tercinta yaitu Ibunda Sitti Mariani dan Keluarga Besar yang telah sabar membesarkan dan mendidik serta menjadi penyokong semangat penulis sehingga penulis bisa sampai pada titik ini. Pada kesempatan ini pula, penulis hendak menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa., M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Dr. Eng. Amiruddin selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
3. Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
4. Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math. selaku dosen pembimbing pertama yang dengan sabar dan sepenuh hati meluangkan waktunya di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberikan kontribusi serta motivasinya demi penulisan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Muh. Nur, S,Si., M.Si. selaku dosen penguji dan dosen penasehat akademik selama penulis menempuh Pendidikan S1 yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun baik dalam menempuh pendidikan S1 maupun dalam penyempurnaan skripsi ini.

6. Prof. Dr. Hasmawati, M.Si selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
7. Seluruh Dosen atau Tenaga Pendidik Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam telah mengajar, membimbing dan dengan semangat memberikan ilmu kepada penulis dalam proses pembelajaran.
8. Seluruh Staf Departemen Matematika dan Seluruh Staf Administrasi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin yang telah banyak membantu dan meringankan dalam administrasi dan persuratan selama penulisan skripsi ini.
9. Mira Aristi Azis selaku *Support System* terbaik yang memenuhi kebutuhan dopamine, serotonin, dan oksitosin penulis.
10. Muhammad Syamsul Bahri, Muhammad Rozzaq Hamidi dan Muhammad Ichsan H. Muslim selaku saudara, guru, dan 911 bagi penulis dalam proses Pendidikan S1 dan proses penyelesaian skripsi ini.
11. Seluruh teman-teman Matematika 2019 dan Statistika 2019 khususnya Toni, Ilham, Zidan, Ade, Sukma, Tasya, Irfa, Ervie, dan Yaya yang absurd namun tetap mendukung, memberikan bantuan, dan warna kepada penulis sejak masih mahasiswa baru hingga sampai pada titik ini.
12. Seluruh teman-teman Himika yang telah berjuang bersama selama KKN gel.108 dan selalu memberikan semangat selama penyusunan skripsi ini.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah membantu penulis dalam merampungkan penulisan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibdah dan mendapat balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu. *Aamiin Ya Rabbal 'Aalamiin.*

Makassar, 15 Februari 2023

Dermawan Saputra

## PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dermawan Saputra

NIM : H011191036

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**Dimensi Partisi Graf Jumlah Antara Graf Lengkap $K_1$ Dengan Graf Gergaji $GR_n$**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 15 Februari 2023

Yang menyatakan,

Dermawan Saputra

# ABSTRAK

Graf $G$ adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang anggotanya disebut titik $(vertex)$ dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi $(edge)$. Misalkan $G$ adalah graf sederhana dengan titik $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik $u$ dan titik $v$ dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah Panjang lintasan terpendek antara titik $u$ dan titik $v$. Untuk titik $v \in V(G)$ dan $S \subseteq V(G)$, jarak titik $v$ terhadap $S$ adalah $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Jika $\prod\ = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi terurutdari $V(G)$ maka representasi titik $v$ terhadap $\prod$ merupakan pasangan $-k$ terurut $r(v|\prod) = \big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\big)$. Partisi $\prod$ adalah partisi pembeda dari $G$ jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ untuk setiap titik $u, v \in V(G)$. Partisi pembeda $\prod$ dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum. Dimensi partisi dari $G$, dinotasikan dengan $pd(G)$ merupakan kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari $G$. Pada skripsi ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf jumlah antara graf lengkap $K_1$ dan graf gergaji $GR_n$ dengan menggunakan pernyataan matematika tentang dimensi partisi pembeda, titik setara, dan titik setingkat. Hasil dari penelitian ini adalah $pd(K_1 + GR_n) = n + 2$ untuk $n \in \mathbb{N}$.



Kata Kunci: teori graf, dimensi partisi, graf operasi jumlah, graf lengkap, graf gergaji, partisi pembeda, titik setara, titik setingkat.


| | | |
|---|---|---|
| Judul | : | Dimensi Partisi Pada Graf Jumlah Antara Graf Lengkap $K_1$ Dengan Graf Gergaji $GR_n$ |
| Nama | : | Dermawan Saputra |
| NIM | : | H011191036 |
| Program Studi | : | Matematika |

# ABSTRACT

*The graph $G$ is a pair $\left(V(G), E(G)\right)$, where $V(G)$ is a discrete set whose elements are called vertices, and $E(G)$ is the set of pairs of elements $V(G)$ whose elements are called edges. The distance between points $u$ and $v$ is denoted by $d(u,v)$ is the length of the shortest path between points $u$ and $v$. For $v \in V(G)$ and $S \subseteq V(G)$, the distance between $v$ and $S$ is $d(v,S) = min\{d(v,x)|x \in S\}$. If $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ is ordered partition of $V(G)$ then the point representation $v$ to $\prod$ is k-ordered pairs $r(v|\prod) = \left(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\right)$. The partition $\prod$ is the resolving partition of $G$ if $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ for all distinct $u,v \in V(G)$. The resolving partition $\prod$ with the minimum cardinality is called the minimum resolving partition. The partition dimension of $G$, denoted by $pd(G)$ is the cardinality of the minimum resolving partition of $G$. In this study, we will determine the partition dimension of the sum graph between the complete graph $K_1$ and the saw graph $GR_n$ by using mathematical statements about resolving partition, equivalent vertices, and level vertices. The result of this research is $pd(K_1 + GR_n\ ) = n + 2$ for $n \in \mathbb{N}$.*

Keywords: *graph theory, partition dimension, sum operation graph, complete graph, saw graph, equivalent vertices, level vertices.*

| | | |
|---|---|---|
| *Title* | : | *Partition Dimention of Sum Product of Complete Graph $K_1$ and Saw Graph $GR_n$* |
| *Name* | : | *Dermawan Saputra* |
| *Student ID* | : | *H011191036* |
| *Study Program* | : | *Mathematics* |

# DAFTAR ISI

# DAFTAR LAMBANG

| Lambang | Keterangan | Pemakaian pertama kali pada halaman |
|---|---|---|
| $G$ | Graf $G$ | 2 |
| $P_m \odot K_{1,m}$ | Graf lintasan corona graf bintang | 2 |
| $K_1 + mC_n$ | Graf lengkap tambah graf siklus | 2 |
| $\mathbb{R}$ | Bilangan real | 4 |
| $\in$ | Elemen dari suatu himpunan | 4 |
| $\leq$ | Kurang dari atau sama dengan | 4 |
| $\geq$ | Lebih dari atau sama dengan | 4 |
| $G(V, E)$ | Graf $G$ dengan pasangan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$ | 5 |
| $V(G)$ | Himpunan titik graf $G$ | 6 |
| $E(G)$ | Himpunan sisi graf $G$ | 6 |
| $N(v_i)$ | Himpunan tetangga titik $v_i$ | 7 |
| $deg(v_i)$ | Derajat titik $v_i$ pada graf $G$ | 7 |
| $\delta(G)$ | Derajat minimum graf $G$ | 7 |
| $\Delta(G)$ | Derajat maksimum graf $G$ | 7 |
| $d(u, v)$ | Jarak titik $u$ ke titik $v$ dalam graf $G$ | 8 |
| $d(u, S)$ | Jarak titik $u$ ke subhimpunan $S$ | 8 |
| $\subset$ | Subhimpunan | 8 |
| $K_n$ | Graf lengkap berorde $n$ | 9 |
| $P_n$ | Graf lintasan berorde $n$ | 9 |
| $GR_n$ | Graf gergaji $n$ | 10 |
| $\cup$ | Operasi gabung | 11 |
| $+$ | Operasi tambah | 11 |
| $A$ | Himpunan $\{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$ | 11 |

# DAFTAR GAMBAR

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Manusia tidak pernah aman dari masalah. Oleh karena itu, masalah di kehidupan sehari-hari adalah bagian dari manusia. Secara tidak langsung, masalah tersebut dapat mendorong perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan salah satu alat untuk mencari solusi dan mempermudah penyajian dan pemahaman masalah. Salah satu konsep dari matematika yang dapat digunakan adalah teori graf. Dengan merepresentasikan graf, masalah yang kompleks dapat disajikan dengan cara yang lebih sederhana, sehingga mudah dipahami, dianalisis, dan dicari solusinya.

Teori graf sebagai cabang matematika diskrit pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Leonardo Euler melalui tulisanya yang berjudul *"Problematic and Solution-Related Geometric Sites",* Leonard Euler melalui tulisannya itu mencoba memecahkan teka-teki jembatan Königsberg dengan membuktikan bahwa ada tujuh jembatan yang harus dilalui di kota Königsberg, dengan syarat setiap jembatan hanya dapat dilintasi satu kali dan menyimpulkan bahwa pembuktian tersebut tidak mungkin dilakukan. Dari peristiwa ini, Leonardo Euler mampu melahirkan cabang baru matematika diskrit yang sekarang kita sebut teori graf.

Graf merupakan pasangan himpunan $(V, E)$ yang terdiri dari himpunan titik *(vertex)* disimbolkan dengan $V$ dan himpunan sisi *(edge)* yang disimbolkan dengan $E$. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis (Munir, 2003).

Salah satu kajian yang terus berkembang pada teori graf adalah dimensi partisi pada suatu graf. Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan pada tahun 1998 oleh Chartrand dkk., yang mengelempokkan semua titik di graf $G$ ke dalam suatu kelas partisi dan menetukan repsentasi setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut. Representasi tersebut berupa penentuan jarak dari setiap titik dari graf $G$ terhadap kelas partisi yang telah dibentuk (Darmaji, 2011).

Penelitian tentang graf gergaji masih sangat sedikit dikaji. Sejauh ini, penelitian terkait graf gergaji baru ditemukan untuk dimensi metrik yang diteliti oleh Rizky Mauliddiyah pada tahun 2023 yaitu dimensi metrik graf gergaji dan dimensi metrik graf hasil operasi korona graf gergaji $GR_n$ dengan graf lengkap $K_1$. Sedangkan penelitian tentang dimensi partisi semakin mengalami perkembangan seiring berjalannya waktu. Beberapa penelitian terkait dimensi partisi salah satunya yaitu dimensi partisi graf lengkap pada tahun 2019 oleh Vivi Ramdhani, dan dimensi partisi dari beragam operasi graf diantaranya yaitu Purwaningsih pada tahun 2017 dengan dimensi partisi graf lintasan *corona* graf bintang $P_m \odot K_{1,n}$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 3$. Pada tahun 2021, Hasmawati dkk, melakukan penelitian terkait dimensi partisi pada graf kincir angin Belanda. Selanjutnya ada dimensi partisi graf hasil operasi *comb* graf lingkaran dan graf lintasan oleh Faisal, dkk., pada tahun 2019.

Dimensi partisi pada graf operasi jumlah masih sangat sedikit, untuk penelitian terkait graf operasi jumlah salah satunya adalah dimensi partisi pada graf hasil jumlah antara graf lengkap dengan graf siklus yaitu $K_1 + mC_n$, dengan $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ oleh Auliya pada tahun 2014.

Berdasarkan penelusuran literatur yang dilakukan, penelitian mengenai dimensi partisi dari graf gergaji, yaitu graf yang dikonstruksi dari graf lintasan berorde genap dengan graf trivial. Oleh karena itu, peneliti memilih untuk melakukan penelitian yang melibatkan graf lengkap $K_1$ dan graf gergaji, dan menuangkannya dalam tugas akhir yang berjudul ***"Dimensi Partisi Graf Operasi Jumlah Graf Lengkap $K_1$ dan Graf Gergaji $GR_n$"***

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan dimensi partisi dari graf operasi jumlah graf lengkap $K_1$ dan graf gergaji $GR_n$.

## 1.3. Batasan Masalah

Masalah yang dikaji pada penelitian ini dibatasi pada graf operasi jumlah graf lengkap $K_1$ berorde 1 dengan graf gergaji berorde $3(n+1)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

### 1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan masalah yang diangkat, tujuan penelitian ini adalah penentuan dimensi partisi dari graf operasi jumlah graf lengkap $K_1$ dan graf gergaji $GR_n$.

### 1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah dapat memberi dan meningkatkan pengetahun baru terkait topik yang dikaji dan menjadi sumber referensi baru bagi pembaca dan peneliti yang akan melakukan penelitian atau pengembangan matematika diskrit khususnya pada teori graf yang khususnya berkaitan dengan dimensi partisi.

### 1.6. Sistematika Penulisan

Untuk melihat secara jelas permasalahan yang dikaji, maka penyusunannya didasarkan pada sistematika penulisan dalam sebagai berikut.

**BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini mengulas latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

**BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini menjelaskan kajian-kajian teori yang berkaitan dengan masalah penelitian, yang selanjutnya dapat digunakan untuk proses analisis.

**BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini mencakup metode penelitian, waktu dan tempat penelitian, dan prosedur penelitian.

**BAB IV PEMBAHASAN**

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yakni menentukan dimensi partisi dari graf hasil operasi jumlah antara graf lengkap berorde 1 dengan graf gergaji berorde $3(n+1)$, dengan $n \in \mathbb{N}$.

**BAB V PENUTUP**

Pada bab ini menyajikan kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditujukkan bagi peneliti selanjutnya untuk mengembangkan penelitian yang telah dikaji dalam tugas akhir ini.

# BAB II

## TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas landasan materi terkait penelitian yang dilakukan sebagai pendukung untuk hasil akhir dari penelitian ini. Bab ini menjelaskan beberapa istilah penting dari graf seperti graf itu sendiri, jenis-jenis graf dan operasinya, beberapa definisi, sifat dan teorema yang berkaitan dengan konsep dimensi partisi graf. Selain itu, disajikan beberapa hasil penelitian yang telah diproleh dalam penentuan dimensi partisi graf.

### 2.1. Himpunan

Graf menggunakan konsep himpunan. Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang keanggotanya dapat didefinsikan dengan jelas. Dalam himpunan terdapat himpunan yang terbatas dan tidak terbatas.

**Definisi 2.1.1.** *Misalkan $X$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $R$.*

1. *Bilangan $a \in R$ dikatakan batas atas dari $X$ jika $x \leq a$, untuk setiap $x \in X$.*
2. *Bilangan $b \in R$ dikatakan batas bawah dari $X$ jika $x \leq b$, untuk setiap $x \in X$.*
3. *Himpunan $X$ dikatakan terbatas jika $X$ memiliki batas atas dan batas bawah. Himpunan $X$ dikatakan tidak terbatas jika $X$ tidak memiliki batas atas atau batas bawah.*

**Contoh 2.1.1.** Himpunan batas atas dan batas bawah

$A = \{x \in R | x \leq 1\}$

$B = \{x \in R | x \geq 1\}$

$C = \{x \in R\}$

Dari ketiga himpunan di atas, himpunan $A$ merupakan himpunan terbatas di atas, himpunan $B$ merupakan himpunan terbatas di bawah, dan himpunan $C$ merupakan himpunan tidak terbatas seperti pada himpunan bilangan riil.

**Teorema 2.1.1** *Misalkan $a, b \in R$, jika $a \leq b$ dan $a \geq b$, maka $a = b$. (Bartle dan Sherbert, 2000)*

## 2.2. Dasar-dasar Graf

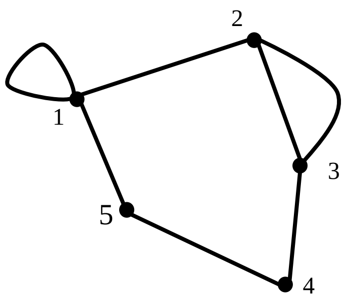
Graf secara umum dikenal beberapa definisi, notasi, dan istilah pada graf. Ada penulis yang mendefinisikan graf yang memungkinkan sisi parallel (beberapa sisi menghubungkan dua titik) atau lup (loop) yaitu sisi yang menghubungkan titik dengan titik itu sendiri.

**Definisi 2.2.1.** *Graf $G(V,E)$ adalah pasangan himpunan $(V,E)$ dengan $V$ adalah himpunan diskrit tidak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik, dan $E$ adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota $V$ yang disebut sisi.*

Himpunan titik di graf $G(V,E)$ dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi pada graf $G(V,E)$ dinotasikan dengan $E(G)$. Definisi 2.2.1 menegaskan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, tetapi $E(G)$ boleh kosong. Graf yang hanya terdiri dari titik-titik tanpa adanya sisi disebut graf trivial.

Titik pada graf dapat diberi tanda berupa huruf atau angka, seperti $a, b, c, \dots, u, v, \dots$, atau dengan bilangan asli 1,2,3, ..., atau gabungan huruf dan bilangan asli. Sedangkan untuk sisi pada graf dapat dinyatakan dengan pasangan $(u, v)$ atau bisa ditulis dalam notasi $uv$ yaitu sisi yang menghubungkan titik $u$ dan $v$. Sisi $uv$ dinotasikan dengan $e$ atau $e_i$. Jadi sisi $e_i = uv$ menyatakan sisi yang menghubungkan titik $u$ dan $v$.

**Contoh 2.2.1.** Misalkan graf $G$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{11, 12, 15, 23, 23, 34, 45\}$, maka pasangan himpunan $G = \big(V(G), E(H)\big)$ merupakan graf karena $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan anggota $E(G)$ adalah pasangan dari elemen-elemen $V(G)$ yang juga berhingga. Bentuk graf $G$ dapat dilihat pada Gambar 2.2.1 berikut.

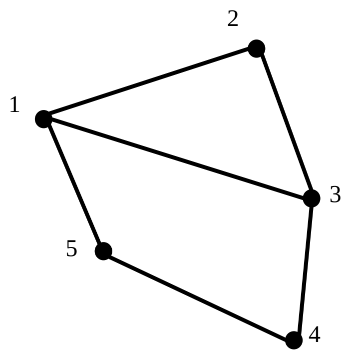



Gambar 2.2. 1 Graf G

**Definisi 2.2.2.** *Graf sederhana $G$ adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge).*

Objek penelitian ini akan berfokus pada graf hasil jumlah antara graf lengkap dan graf gergaji yang merupakan salah satu bentuk dari graf sederhana.

**Contoh 2.2.2.** Misalkan graf $G_1$ memiliki himpunan titik $V(G_1) = \{1,2,3,4,5\}$ dan himpunan sisi $E(G_1) = \{12,13,15,23,34,45\}$. Graf $G_1$ dapat dilihat pada Gambar 2.2.2 berikut.




Gambar 2.2. 2 Graf $\mathrm{G}_1$

Pada Gambar 2.2.2, $V(G_1)$ tidak kosong dan berhingga, serta untuk setiap $u_i u_j$ di $E(G_1)$, $u_i u_j = u_j u_i$ dan $u_i \neq u_j$ untuk $i, j = 1,2,3,4,5$. Oleh karena itu, graf $G_1$ merupakan salah satu contoh graf sederhana.

**Definisi 2.2.3.** *Orde dari graf $G$ yang dinyatakan dengan simbol $p$ adalah banyaknya anggota dari $V(G)$. Sedangkan, ukuran dari graf $G$ yang dinyatakan dengan simbol $q$ adalah banyaknya anggota dari $E(G)$.*

**Contoh 2.2.3.** Pada Gambar 2.2.2 Graf $G_1$ adalah graf berorde $5$ atau $p = 5$ dan berukuran 6 atau $q = 6$.

**Definisi 2.2.4.** *Misalkan G adalah suatu graf dan* $v_i, v_j \in V(G)$ *serta* $e \in E(G)$. *Jika* $e = v_i v_j$, *maka berlaku:*

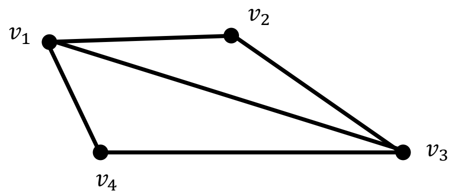
1. *Titik* $v_i$ *bertetangga (adjacent) dengan titik* $v_j$.

   Banyaknya tetangga dengan $v_i$ dinotasikan $|N_G(v_i)|$.

2. *Sisi x terkait (incident) dengan titik* $v_i$, *demikian pula untuk titik* $v_j$.

Banyaknya $e_1, e_2$, dan $e_3$ adalah sisi dari suatu graf $G$ dan $v$ adalah titik graf $G$. Jika $e_1, e_2$, dan $e_3$ terkait dengan titik $v$, maka sisi $e_1, e_2$, dan $e_3$ disebut bertetangga.

**Contoh 2.2.4.** Misalkan himpunan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$. Bentuk graf $G_2$ dapat dilihat pada Gambar 2.2.3 berikut.




Gambar 2.2. 3 Graf $G_2$

Pada Gambar 2.2.3, titik $v_1$ bertetangga dengan titik $v_2, v_3$, dan $v_4$. Sedangkan titik $v_2$ tidak bertetangga dengan titik $v_4$. Terlihat pula, bahwa sisi $v_1v_2$ terkait dengan titik $v_1$ dan titik $v_2$.

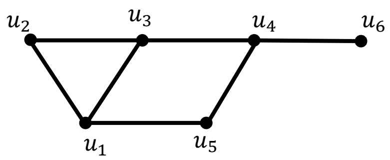
**Definisi 2.2.5.** *Derajat suatu titik* $v_i$ *dalam graf* $G$, *dinotasikan dengan* $deg(v_i)$, *adalah banyaknya sisi* $x \in E(G)$ *yang terkait dengan titik* $v_i$ *atau* $deg(v_i) = |N_G(v_i)|$. *Derajat minimum dari graf G dinotasikan* $\delta(G)$, *yaitu* $\delta(G)= \min \{deg(v):v \in V(G)\}$ *dan derajat maksimum dari graf G dinotasikan* $\Delta(G)$, *yaitu* $\Delta(G) = max\ \{deg(v); v \in V(G)\}$.

**Contoh 2.2.5.** Perhatikan graf $G_2$ pada Gambar 2.2.3. yang memiliki $deg(v_1) = 3$, $deg(v_2) = 2$, $deg(v_3) = 3$, dan $deg(v_4) = 2$. Sehingga diperoleh derajat minimumnya adalah $\delta(G_2) = 2$, dan derajat maksimumnya $\Delta(G_2) = 3$.

**Definisi 2.2.6.** *Lintasan pada graf $G$ adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut (Hasmawati, 2020).*

**Definisi 2.2.7.** *Jarak antara dua titik $u$ dan $v$, dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik $u$ ke $v$. Jika $G$ tidak memiliki lintasan dari $u$ ke $v$, maka jarak titik $u$ ke $v$ didefinisikan $d(u,v) = \infty$ (Darmaji, 2011).*

**Contoh 2.2.6.** Diberikan graf $G_3$ seperti pada Gambar 2.2.4 berikut.

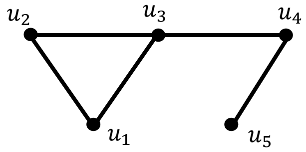



Gambar 2.2. 4 Graf $G_3$

Graf $G_3$ memperlihatkan bahwa terdapat lintasan dari $u_1$ ke titik $u_5$ yaitu lintasan $u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3, u_3u_4, u_4, u_4u_5, u_5$ dan lintasan $u_1, u_1u_3, u_3, u_3u_4$, $u_4, u_4u_5, u_5$, dengan panjang masing-masing adalah 4 dan 3. Jadi lintasan terpanjang dari $u_1$ ke titik $u_5$ adalah dengan lintasan dengan Panjang 4. Karena jarak dari titik $u_1$ ke titik $u_5$ merupakan panjang lintasan terpendek dari titik $u_1$ ke titik $u_5$, sehingga dapat dikatakan bahwa jarak titik $u_1$ ke titik $u_5$ adalah $d(u_1, u_5) = 3$. Jadi, jarak dari titik $u_1$ ke titik $u_5$ adalah tiga.

**Definisi 2.2.8** *Misalkan titik $u \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$, maka jarak dari $u$ ke $S$ dinotasikan $d(u,S)$ dan didefinisikan sebagai $d(u,S) = min\ \{d(u,x) | x \in S\}$ dan untuk setiap $u \in S, d(u,S) = 0$ (Darmaji, 2011).*

**Contoh 2.2.7** Misalkan himpunan $V(G_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan $E(G_4) = \{u_1u_2,\ u_1u_3,\ u_1u_5,\ u_2u_3,\ u_3u_4,\ u_4u_5,\ u_5u_6\}$ serta diberikan $S = \{u_2, u_3, u_4\}$. Bentuk graf $G_4$ dapat dilihat pada Gambar 2.2.5 berikut.




Gambar 2.2. 5 Graf $G_4$

Pada Gambar 2.2.5 diperoleh, $d(u_6, S) = min\{d(u_6, x)|x \in S\} = min\{d(u_6, u_2), d(u_6, u_3), d(u_6, u_4)\} = min\{3,2,1\} = 1$.

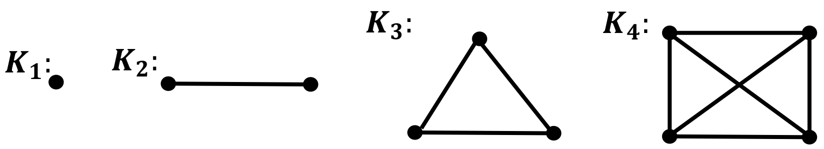
## 2.3. Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini, akan dibahas jenis-jenis graf yang digunakan untuk mengkonstruksi graf gergaji sebagai salah satu graf khusus yang digunakan pada penelitian ini.

**Definisi 2.3.1.** *Graf $G$ disebut graf lengap jika setiap titiknya bertetangga dengan titik lainnya. Graf lengkap dengan $n$ titik dinotasikan dengan $K_n$ (Roza, 2016).*

Graf lengkap merupakan salah graf khusus yang setiap titiknya bertetangga dengan titik lainnya, sehingga derajat untuk setiap titik pada graf lengkap adalah sama.

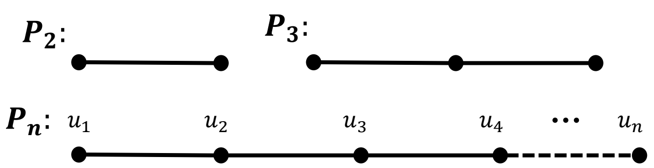
**`Contoh 2.3.1**




Gambar 2.3. 1 Graf Lengkap $K_1, K_2, K_4, K_5$

**Definisi 2.3.2.** *Misalkan $G : v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-2}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan yang berorde n dengan ukuran $n - 1$. Lintasan pada graf $G$ adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-2}, e_{n-1}, v_n$ dan $e_i = v_i v_{i+1}; i = 1,2, \ldots, n - 1$. Graf lintasan merupakan graf sederhana yang kedua titik ujungnya berderajat satu. Titik berderajat satu pada graf lintasan disebut pendant, dan titik yang lain berderajat dua. Graf lintasan dinotasikan dengan $P_n$ (Alfarisi, 2017).*

**Contoh 2.3.2**




Gambar 2.3. 2 Graf Lintasan $P_2, P_3, P_n$

## 2.4. Graf Gergaji

Graf gergaji merupakan graf yang dikonsntruksi melalui graf lintasan berorde genap dan graf trivial.

**Definisi 2.4.1** *Misalkan* $P_{2(n+1)}$ *graf lintasan berorde* $2(n+1)$ *dan* $(n+1)K_1$ *adalah graf* $K_1$ *adalah graf gabungan* $K_1$ *sebanyak* $n+1$ *dengan:*

$$V(P_{2(n+1)}) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2n+1}, u_{2n+2}\}$$

$$V\big((n+1)K_1\big) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}\}.$$

*Graf gergaji dinotasikan dengan* $GR_n$ *adalah graf yang berorde* $3n+3$ *dan berukuran* $4n+3$ *dengan himpunan titik dan himpunan sisi:*

$$V(P_{2(n+1)}) \cup V\big((n+1)K_1\big)$$

$$E\big(P_{2(n+1)}\big) \cup \{u_{2i-1}v_i, u_{2i}v_i\ ; i = 1,2,\dots,n+1\}.$$

*(Hasmawati, 2020).*

**Contoh 2.4.1** Graf Gergaji $GR_1$ memiliki himpunan titik

$$V(GR_1) = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}\} \cup \{v_1, v_2\}$$

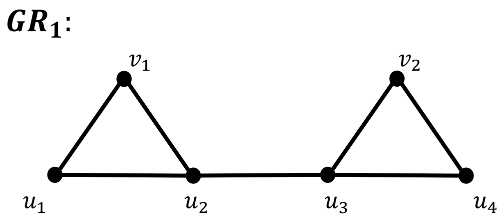
dengan

$$V\big(P_{2(1+1)}\big) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \text{ dan } V(2K_1) = \{v_1, v_2\},$$

dan himpunan sisi

$$E(GR_1) = \{(u_1u_2), (u_2u_3), (u_3u_4)\} \cup \{(u_1v_1), (u_2v_1), (u_3v_2), (u_4v_2)\}.$$

Berikut graf $GR_1$ seperti pada Gambar 2.2.3.



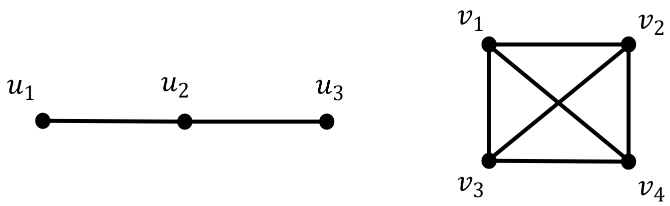

Gambar 2.4. 1 Graf Gergaji ($GR_1$)

## 2.5. Operasi pada Graf

Ada beberapa jenis operasi yang dikenal dalam teori graf, antara lain operasi gabung, operasi tambah, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi subdivisi, dan operasi korona. Operasi pada graf adalah salah satu cara untuk mendapatkan graf baru dengan mengkonstruksi graf $G$ dan graf $H$. Operasi graf yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi gabung dan operasi jumlah.

**Definisi 2.5.1** *Misalkan $G$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, dan $H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Graf gabung antara $G$ dan $H$, ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.*

**Contoh 2.5.1** Misalkan adalah graf dengan sebagai berikut.



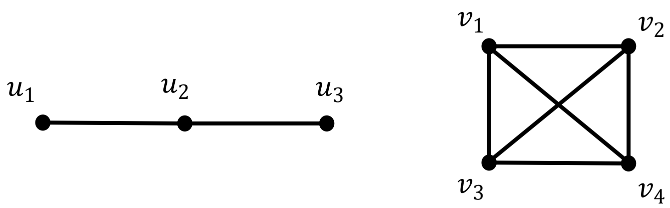

(a) (b)

Gambar 2.5. 1 Graf $G$ dan Graf $H$

Graf jumlah antara graf $G$ dengan graf $H$ diperoleh graf $G \cup H$ yang mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi

$$V(G \cup H) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(G \cup H) = \{u_1u_2, u_2u_3, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}.$$

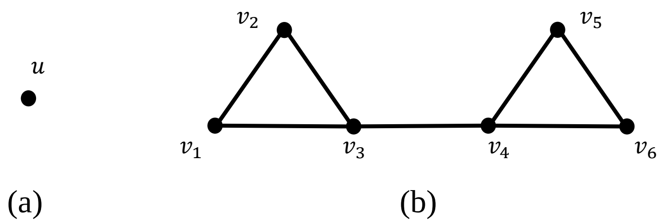
Graf $G \cup H$ dapat dilihat pada Gambar 2.5.2 berikut.




Gambar 2.5. 2 Graf gabung $G \cup H$

**Definisi 2.5.2** *Misalkan $G$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, dan $H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Graf tambah antara $G$ dan $H$, ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup A$, dengan $A = \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$ (Hasmawati, 2020).*

**Contoh 2.5.2** Diberikan graf $G$ dan graf $H$ sebagai berikut.




Gambar 2.5. 3 (a) Graf $G$ dan (b) Graf $H$

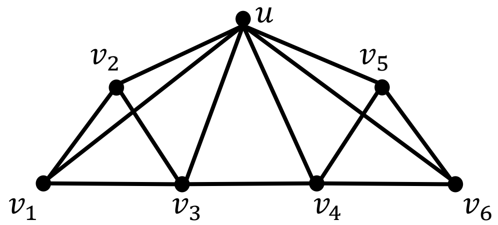
Graf jumlah antara graf $G$ dengan graf $H$ diproleh graf $G + H$ yang mempunyai himpunan titik

$$V(G + H) = \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G + H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\} \cup \{uv_1, uv_2, uv_3, uv_4, uv_5, uv_6\}.$$

Graf $G + H$ dapat dilihat pada Gambar 2.5.4 berikut.



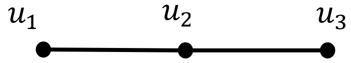

Gambar 2.5. 4 Graf jumlah $G + H$

## 2.6. Dimensi Partisi

Pada subbab ini akan dibahas definisi, sifat, dan teorema yang berkaitan dengan konsep dimensi partisi graf.

**Definisi 2.6.1** *Misalkan* $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *merupakan partisi terurut dari* $V(G)$ *dan* $v \in V(G)$. *Representasi dari* $v \in V(G)$ *terhadap* $\prod$ *dinotasikan* $r(v|\prod)$ *adalah pasangan* $k -$ *terurut* $\big(d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k)\big)$.

**Contoh 2.6.1** Diberikan graf $P$ berorde 3 seperti pada Gambar 2.6.1 berikut.



Gambar 2.6. 1 Graf $G$ berorde 3

Berdasarkan Gambar 2.6.1 di atas, diperoleh himpunan titik yaitu $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$. Pilih partisi terurut dari $V(G)$ yakni $\prod = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2\}, S_2 = \{u_3\}$. Representasi untuk setiap $v \in V(G)$ terhadap $\prod$ ialah sebagai berikut.

- $r(u_1|\prod) = \{d(u_1, S_1), d(u_1, S_2)\} = \{0,2\}$
- $r(u_2|\prod) = \{d(u_2, S_1), d(u_2, S_2)\} = \{0,1\}$
- $r(u_3|\prod) = \{d(u_3, S_1), d(u_3, S_2)\} = \{1,0\}$

**Definisi 2.6.2** *Partisi terurut $\prod$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$ jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ memiliki representasi terhadap $\prod$ yang berbeda, yakni berlaku $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$.*

**Contoh 2.6.2** Berdasarkan Contoh 2.6.1 diperoleh untuk setiap $i \neq j \in V(G)$ berlaku $r(u_i|\prod) \neq r(u_j|\prod)$, sehingga $\prod$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$.

**Definisi 2.6.3** *Partisi pembeda $\prod$ dengan kardinalitas terkecil disebut partisi pembeda minimum. Kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari $G$ disebut dimensi partisi $G$, dinotasikan $pd(G)$.*

**Contoh 2.6.3** Dari Contoh 2.6.1, $\prod = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2\}, S_2 = \{u_3\}$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari $V(G)$ memiliki kerdinalitas sedikitnya 2. Misalkan $\prod^*$ suatu partisi pembeda dari $V(G)$ dengan $|\prod^*| = 1$. Dalam hal ini $\prod^* = \{S_1^*\}$ dengan $S_1^* = \{u_1, u_2, u_3\}$. Jelas $\prod^*$ bukan partisi pembeda dari $V(G)$ karena untuk setiap $u \in V(G), r(u|\prod^*) = \{0\}$. Oleh karena itu, kardinalitas minimum dari himpunan partisi pembeda pada Contoh 2.6.1 adalah 2.

**Definisi 2.6.4** *Diberikan $G$ adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik $u$ dan $v$ disebut titik-titik yang setara dalam graf $G$ apabila memenuhi salah satu sifat berikut:*

1. $d(u, w) = d(v, w)$ *untuk setiap* $w \in V(G)\backslash\{u, v\}$

2. *Terdapat titik* $c$ *sehingga* $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$, $\forall s \in V(G)\backslash\{u,v\}$.

Pada definisi 2.6.4, Jika titik $u$ dan $v$ memenuhi kondisi (1), maka $u$ dan $v$ disebut titik setara kuat. Jika memenuhi kondisi (2), maka $u$ dan $v$ disebut titik setara lemah (Hamidi, 2022).

**Contoh 2.6.4** Pada Gambar 2.5.4, titik $v_1$ dan $v_2$ adalah titik setara kuat karena $\forall x \in \{u, v_3\}, d(v_1, x) = d(v_2, x) = 1$ dan $\forall\, y \in \{v_4, v_5, v_6\}, d(v_1, y) = d(v_2, y) = 2$. Sedangkan, titik $v_1$ dan $v_3$ adalah titik setara lemah karena terdapat titik $u$ sedemikian sehingga $d(v_1, u) + d(u, z) = d(v_3, u) + d(u, z) = 2, \forall\, z \in \{u, v_2, v_4, v_5, v_6\}$.

**Teorema 2.6.1** *Diberikan* $G$ *graf terhubung dengan himpunan partisi* $\prod$ *dari* $V(G)$. *Jika* $\prod$ *merupakan partisi pembeda graf* $G$ *dan titik* $u$ *dan* $v$ *merupakan titik-titik yang setara kuat dalam* $G$, *maka titik* $u$ *dan* $v$ *berada pada kelas partisi yang berbeda di* $\prod$.

**Teorema 2.6.2** *Diberikan* $G$ *graf terhubung dengan himpunan partisi* $\prod$ *dari* $V(G)$. *Jika* $\prod$ *merupakan partisi pembeda graf* $G$, *titik* $u$ *dan* $v$ *merupakan titik-titik yang setara lemah dalam* $G$, *maka* $u$ *dan* $v$ *atau tetangga* $u$ *dan tetangga* $v$ *berada pada kelas partisi yang berbeda di* $\prod$ *(Hamidi, 2022).*

**Definisi 2.6.5** *Diberikan* $G$ *adalah graf terhubung dan* $u, v \in V(G)$. *Titik* $u$ *dan* $v$ *disebut titik-titik yang setingkat dalam graf* $G$ *apabila memenuhi sifat – sifat berikut (Hasmawati, 2021):*

- $deg(u) = deg(v)$
- *Jika* $d(u,x) = k$, *terdapat* $y \in V(G)$ *sehingga* $d(u,x) = d(v,y) = k$ *dan* $|\{x \in V(G) | d(u,x) = k\}| = |\{y \in V(G) | d(v,y) = k\}|$.

**Contoh 2.6.5** Pada Gambar 2.5.2, titik $v_2$ dan $v_5$ adalah titik setingkat karena:

- $deg(v_2) = deg(v_5) = 3$

- Perhatikan bahwa untuk setiap $x_1 \in \{u, v_1, v_3\}, d(v_2, x_1) = 1$, terdapat $y_1 \in \{u, v_4, v_6\}$ sehingga $d(v_5, y_1) = 1$ dan $|\{u, v_1, v_3\}| = |\{u, v_4, v_6\}| = 3$. Kemudian untuk setiap $x_2 \in \{v_4, v_5, v_6\}, d(v_2, x_2) = 2$, terdapat $y_2 \in \{v_1, v_2, v_3\}$ sehingga $d(v_5, y_2) = 2$ dan $|\{v_4, v_5, v_6\}| = |\{v_1, v_2, v_3\}| = 3$.

Oleh karena itu, jika $d(v_2, w) = k$, terdapat $s \in V(G + H)$ sedemikian sehingga $d(v_2, w) = d(v_5, s) = k$ dan $|\{w|d(v_2, w) = k\}| = |\{s|d(v_5, s) = k\}|$.

**Teorema 2.6.3** *Diberikan $G$ graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. Misalkan pula titik $u$ dan $v$ titik-titik yang setingkat dalam $G$ dan terdapat $x, y \in V(G)$ sedemikian sehingga $d(u, x) = d(v, y) = k$. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf $G$ dan $k = min\{d(u, a)|\ a \in S, S \in \prod\}$, maka $u$ dan $v$ atau $x$ dan $y$ berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$ (Hamidi, 2022).*

**Teorema 2.6.4** *Jika $G$ adalah graf berorde $n \geq 3$ dengan diameter $d$, maka $g(n, d) \leq pd(G) \leq n - d + 1$, dengan $g(n, d)$ merupakan bilangan bulat positif terkecil $k$ sedemikian hingga $(d + 1)^k \geq n$.*

**Teorema 2.6.5** *Misalkan $G$ adalah graf terhubung berorde $n$. Maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$ (Chartrand,Salehi,dan Zhang, 2000).*

**Tabel 2.6 Hasil Penelitian Dimensi Partisi Pada Graf Sederhana**

| **Peneliti** | **Tahun** | **Graf** | **Dimensi Partisi** |
|---|---|---|---|
| Darmaji | 2011 | $G \cong P_m \odot K_n$,<br>$m \geq 2$ dan $n \geq 4$ | $pd(G) = n + 1\ ; m \leq n + 2$<br>$pd(G) = n + 2\ ; m \leq n + 3$ |
| Auliya | 2014 | $G \cong\ K_1 + mC_n$,<br>dengan $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. | $pd\ K_1 + mC_3 = m + 2, m \geq 2$<br>$pd\ K_1 + mC_4 = 3m - 4, m > 2$<br>$pd\ K_1 + mC_5 = 2m + 1, m \geq 2$ |
| Purwaningsih | 2017 | $G \cong P_m \odot K_{1,m}$ | $pd(G) = n, m \leq \lfloor n/2 \rfloor$<br>$pd(G) = n + 1, m > \lfloor n/2 \rfloor$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Faisal | 2019 | $G \cong C_n \rhd P_k$ | $pd(G) = pd(C_n) = 3$ |
| Ramdhani | 2019 | $G \cong K_n$ | $pd(G) = n$ |
| Hasmawati | 2021 | $G \cong Amal(C_n)_m$,<br>untuk suatu $k \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m \in I_k$ | $pd(G) = pd(Amal(C_n)_m) = k$ |
| Mauliddiyah | 2023 | $G \cong GR_n$, dan<br>$G \cong GR_n \odot K_1$, | $dim(G) = dim(GR_n) = 3$<br>$dim(G) = dim(GR_n \odot K_1) = 3$ |