

**DIMENSI METRIK PADA OPERASI KALI GRAF
LINTASAN DAN GRAF RODA**

SKRIPSI



NURJANNAH MAULINDA

H011181330

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

MEI 2023

DIMENSI METRIK PADA OPERASI KALI GRAF LINTASAN DAN GRAF RODA

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**



NURJANNAH MAULINDA

H011181330

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2023**

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh
bahwa tugas akhir yang buat dengan judul:

DIMENSI METRIK PADA OPERASI KALI GRAF LINTASAN DAN GRAF RODA

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah
dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 6 Juni 2023



NUR JANNAH MAULINDA

NIM. H011181330

HALAMAN PENGESAHAN

**DIMENSI METRIK PADA OPERASI KALI GRAF LINTASAN
DAN GRAF RODA**

Disusun dan diajukan oleh

NUR JANNAH MAULINDA

H011181330

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal sidang 6 juni 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pertama,

Prof. Dr. Hasmawati, M.Si

Nur Rohmah Oktaviani S.Si., M.Si

NIP. 19641231 199003 2 007

NIP. 19921006 202001 6 001

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si,
NIP. 19700807 200003 1 002



KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Rabbil Alamin, puji syukur atas kehadiran-Nya yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul “Dimensi metrik pada operasi kali graf lintasan dan graf roda” dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyusunannya, penulis memperoleh banyak inspirasi bantuan dari berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** Selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
2. **Nur Rohmah Oktaviani S.Si., M.Si.** Selaku dosen pembimbing pertama yang juga menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
3. **Dra. Nur Erawati, M.Si.** Selaku dosen penguji dan juga Penasehat Akademik yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
4. **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** Selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
5. **Para Dosen dan Staf Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan selama proses perkuliahan dan membantu berbagai persuratan untuk penyusunan skripsi ini;
6. Kedua orang tua **H. Alimuddin S.E. M.M. dan Alm. H. Salmah** serta seluruh keluarga penulis yang tak henti-hentinya mendoakan dan telah memberikan dukungan, kasih sayang, kepercayaan dan pengorbanan yang tiada terkira besarnya. Terima kasih telah menjadi bagian terpenting dan terindah bagi hidup penulis;
7. Sahabat **Petir Geng** yaitu **Hijrah, Nisa, Aqiela, Afni, Gresye, Ayu, dan**

- irfan** yang telah kebersamai selama perkuliahan, memberikan semangat, motivasi, bantuan, serta doa dalam mengerjakan skripsi ini;
8. Sahabat SMA **Gengg's** yaitu **Tiwi dan Icha** memberi hiburan serta semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini;
 9. Teman-teman seperjuangan **Matematika 2018**, dan **Integral 2018** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini;
 10. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per satu;
 11. *Last but not least*, kepada diri sendiri tetap bertahan, berjuang, kuat serta sabar menghadapi badai kehidupan dalam proses pengerjaan skripsi ini. Terima kasih karena tidak lagi larut dalam kesedihan dalam dua tahun terakhir. Terimakasih karena berani melangkah dengan semua ketakutan yang ada.

Akhir kata, penulis berharap kepada Allah subhanahu wa ta'ala agar membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat sebagai bahan pustaka dan penambah informasi khususnya bagi mahasiswa Universitas Hasanuddin. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini, masih banyak kekurangan sehingga saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan untuk menyempurnakan skripsi ini.

Makassar, 6 Juni 2023

Penulis.

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMIK**

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurjannah Maulinda
NIM : H011181330
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

“Dimensi Metrik pada Operasi Kali Graf Lintasan dan Graf Roda”

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 6 Juni 2023

Yang menyatakan

(Nurjannah Maulinda)

ABSTRAK

Graf G adalah pasangan himpunan yang himpunan pertama anggotanya disebut titik dan himpunan kedua adalah pasangan pasangan titik yang disebut sisi. Himpunan terurut W pada graf terhubung G disebut himpunan pembeda. Himpunan pembeda dengan banyak anggota minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G dan kardinalitas dari himpunan tersebut dinamakan dimensi metrik dari graf G , dinotasikan dengan $dim(G)$. Pada tugas akhir ini, dibahas mengenai dimensi metrik dari operasi kali graf lintasan berorde $n > 1$ dan graf roda berorde m , di mana $m = 3$ dan 4 . Hasil penelitian menyatakan bahwa dimensi metrik dari hasil operasi kali graf lintasan berorde n dengan $n > 1$ dan graf roda berorde m dengan $m = 3$ dan 4 adalah $dim(P_n \times W_3) = 3$ dan $dim(P_n \times W_4) = 3$

Kata Kunci : Himpunan Pembeda, Dimensi Metrik, Graf Lintasan, Graf Roda, Operasi Perkalian.

ABSTRACT

Graph G is a pair of sets where the first set is called a vertex and the second set is a pair of vertices called edges. The ordered set W on a connected graph G is called a distinguishing set. A distinguishing set with minimum members is called a minimum distinguishing set or basis of G and cardinality of the set is called metric dimension of graph G , denoted by $dim(G)$. In this final project, we discuss the metric dimensions of the times operation, between path graph with $n > 1$ order and wheel graph with m order, where $m = 3$ and 4 . The results of the study state that the metric dimensions of the multiplication result of an n -order path graph with $n > 1$ and an m -order wheel graph with $m = 3$ and 4 are $dim(P_n \times W_3) = 3$ and $dim(P_n \times W_4) = 3$

Keywords : Distinguishing Set, Metric Dimension, Path Graph, Wheel Graph, Multiplication Operation.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN KEONTENTIKAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	x
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	2
1.5 Manfaat Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Himpunan	4
2.2 Dasar dasar Graf	4
2.3 Jenis jenis Graf	6
2.4 Operasi dalam Graf	7
2.5 Dimensi Metrik	8
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	11
3.1 Metode dan Jenis Penelitian	11
3.2 Tahapan Penelitian	11
3.3 Alur Penelitian	12
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	13
4.1 Konstruksi Graf $P_n \times W_3$	13
4.2 Dimensi Metrik pada Hasil Operasi Kali Graf $P_n \times W_3$	13
4.3 Konstruksi Graf $P_n \times W_4$	15
4.4 Dimensi Metrik pada Hasil Operasi Kali Graf $P_n \times W_4$	16

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....	30
5.1 Kesimpulan	30
5.2 Saran	30
DAFTAR PUSTAKA.....	31

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.2.1 Graf ganda6
 Gambar 2.2.2 Graf semu6
 Gambar 2.3.1 Graf lintasan6
 Gambar 2.3.2 Graf roda7
 Gambar 2.4.1 Operasi kali Graf $P_2 \times W_3$ 7
 Gambar 2.5.1 Graf $P_2 \times W_3$ 9
 Gambar 2.5.1 Graf $P_3 \times W_3$ 10
 Gambar 3.3.1 Flowchart penelitian.....12
 Gambar 4.1.1 Graf hasil kali $P_n \times W_3$13
 Gambar 4.3.1 Graf hasil kali $P_n \times W_4$16
 Gambar 4.4.1 Graf $P_8 \times W_4$18

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf adalah pasangan himpunan, himpunan pertama anggotanya disebut titik, dan himpunan kedua anggotanya adalah pasangan pasangan titik. Salah satu topik kajian dalam graf adalah dimensi metrik.

Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1966, kajian tentang dimensi metrik melibatkan konsep jarak, jarak $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G . Himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G adalah *vektor* k (pasangan k -tuple). Representasi dari titik v pada w adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Setiap dua titik di G memiliki representasi berbeda. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut dimensi metrik dari G , dan dinotasikan dengan $dim(G)$. (Septia dan Rahadjeng, 2014)

Para peneliti telah mengkaji dimensi metrik dari beberapa graf tertentu, misalnya Chartrand dkk (2000) telah menentukan bahwa graf yang berdimensi 1 hanyalah graf lintasan. Lebih jauh lagi, mereka berhasil mengkarakterisasi semua graf dengan titik yang mempunyai $dim(G) = n - \frac{1}{2}$ dan $dim(G) = n - 1$. Irmayanti (2019) memperoleh nilai dimensi metrik pada graf buku ganda yaitu $dim(2B_n) = 2(n - 1)$ dan $dim(2B_{n,m}) = (n - 1) + (m - 1)$. Rahmi dan Sulakmal (2016) memperoleh nilai dari operasi kali graf lengkap terhadap graf lintasan dengan korona graf K_1 yaitu $dim((K_n \times P_m) \odot K_1) = 3$ untuk $n = 3$ dan $n - 1$ untuk $n \geq 4$. Putra dkk(2018) memperoleh nilai dimensi metrik dari graf $w_n + C_n$ untuk $n \in \{3,4\}$ yaitu $dim(w_n + C_n) = 6$ untuk $n = 3$ dan 4 untuk $n = 4$. Rahadjeng dan Septiana (2014) memperoleh nilai dimensi metrik pada graf lintasan yaitu $dim(P_n)$ adalah 1, graf lengkap/komplit yaitu $dim(K_n)$ adalah $n - 1$ untuk $n \geq 2$ dan dimensi metrik dari graf sikel yaitu $dim(C_n)$ adalah 2 untuk $n \geq 3$.

Beberapa hasil dari penelitian terbaru tentang dimensi metrik diantaranya : Saskia (2023) memperoleh nilai dimensi metrik graf hasil operasi kali graf

lengkap orde dua terhadap graf sarang lebah yaitu $\dim(K_2 \times HC(n)) = 3$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$. Munieroh (2023) memperoleh nilai dimensi metrik dari hasil operasi shackle graf siklus C_3 adalah $\dim(\text{shack}(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k)) = 2$ dengan salah satu himpunan pembedanya yaitu $W = \{v_1^1, v_3^k\}$ untuk $k \geq 2$. Itsnaini (2022) memperoleh nilai dimensi metrik dari amalgamasi titik pusat graf roda dengan graf siklus yaitu $\dim(\text{Amal}(W_m; C_m, v_0)) = 3$ untuk $m = 3, 4, 5$, $\lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor + 2$ untuk $m = 6 + 10k, 8 + 10k, k \geq 0$, $\lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor + 1$ untuk m lainnya .

Berdasarkan penelusuran literatur tersebut, terlihat bahwa banyak peneliti yang tertarik untuk meneliti topik dimensi metrik pada suatu graf. Penelitian mengenai dimensi metrik pada operasi kali graf lintasan dan graf roda belum dilakukan oleh para peneliti sebelumnya. Oleh karena itu dalam tugas akhir ini penulis berniat untuk mengkaji topik tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil untuk operasi kali graf lintasan dan graf roda.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan tugas akhir ini tentang penentuan dimensi metrik graf operasi kali pada lintasan berorde $n > 1$ dan graf roda berorde m , di mana $m = 3$ dan 4 .

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil untuk operasi kali graf lintasan dan graf roda. Kemudian, dari batas bawah terbesar dan batas atas terkecil tersebut dapat diperoleh dimensi metrik dari operasi kali graf lintasan dan graf roda.

1.5 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat yang diharapkan dalam penulisan tugas akhir ini adalah untuk menambah pemahaman tentang konsep teori graf khususnya dimensi metrik suatu graf.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Berikut disajikan beberapa konsep dasar, pengertian, sifat-sifat dan notasi terkait himpunan, konsep dasar graf, dan dimensi metrik.

2.1 Himpunan

Pengertian himpunan disajikan terlebih dahulu sebelum pengertian graf karena dalam pengertian graf termuat konsep tentang himpunan.

Definisi 2.1.1 Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang keanggotaannya dapat didefinisikan dengan jelas. Suatu himpunan dikatakan terbatas jika himpunan tersebut terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Anggota suatu himpunan bisa diskrit dan juga bisa kontinu. Himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kapital.

Misalkan B subhimpunan tak kosong dari \mathbb{R}

1. $a \in \mathbb{R}$ disebut batas atas dari B jika $x \leq a, \forall x \in B$
2. $b \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah dari B jika $x \geq b, \forall x \in B$
3. Himpunan B disebut terbatas jika himpunan B memiliki batas atas dan batas bawah.

2.2 Dasar Dasar Graf

Pada subbab ini di bahas definisi graf, jenis jenis graf, orde, ukuran, derajat, dan jarak dalam graf.

Definisi 2.2.1 Graf Sederhana

Graf G adalah pasangan himpunan $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota anggota V yang disebut sisi.

Dari definisi diatas $Graf G = (V, E)$, jika $u, v \in V$ dengan $u \neq v$ dan $uv = vu$ maka graf G merupakan **graf sederhana**

Orde (*order*) dari graf G dinyatakan dengan simbol p yakni banyaknya anggota dari $V(G)$ dan ukuran (*size*) dari G dinyatakan dengan simbol q yakni banyaknya anggota dari $E(G)$. Kardinalitas suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut, yang dinotasikan dengan " $|$ ". (Hasmawati,2020)

Titik u dan v disebut bertetangga (*adjacent*) satu sama lain dan titik u dikatakan terkait (*incident*) dengan sisi e , begitu pula halnya titik v terhadap sisi e . Jika $E(G) = \emptyset$, maka G disebut graf trivial.

Istilah yang digunakan dalam graf

1. Gelang (Loop)

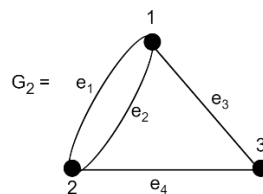
Menurut Munir (2005), suatu sisi dikatakan gelang apabila ujung sisinya berawal dan berakhir pada titik yang sama.

2. Sisi Ganda (Multiple Edges)

Pada sebuah graf, terdapat kemungkinan bahwa terdapat lebih dari satu titik yang bersisian dengan sepasang titik. sisi tersebut dinamakan sisi ganda.

Definisi 2.2.2 Graf Tidak Sederhana

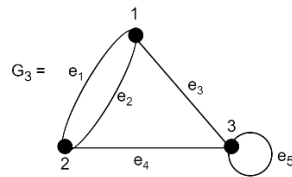
Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak sederhana. Terdapat dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda atau graf paralel (multigraph) dan graf semu (pseudograph). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung sisi gelang (loop). Misalkan graf ganda direpresentasikan seperti pada Gambar 2.2.1 sebagai G_2 . Untuk sisi - sisi ganda e_1 , dan e_2 yang menghubungkan sepasang titik – titik antara titik 1 dan 2 terdapat sisi ganda. (Munir,2016) .



Gambar 2.2.1 Graf Ganda

Selanjutnya, misalkan graf semu direpresentasikan seperti pada Gambar 2.2.2 sebagai G_3 . Untuk graf semu, gelanganya e_5 terletak pada titik 3. Graf semu

lebih umum digunakan dari pada graf ganda , karena keunikan sisi pada graf dapat terhubung titik itu sendiri.(Munir,2016)



Gambar 2.2.2 Graf Semu

2.3 Jenis jenis graf

Beberapa graf khusus yang dibahas pada subbab ini antara lain :

a. Graf Lintasan

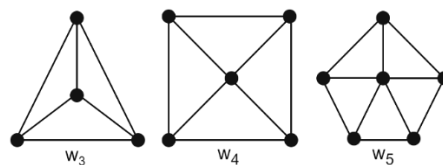
Definisi 2.3.1 Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari barisan titik dan sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ adalah sisi-sisi dari graf . Graf lintasan dinotasikan dengan P_n orde n dan jumlah sisi $n - 1$. Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan maksimal. (Hasmawati, 2020).



Gambar 2.3.1 Graf Lintasan

b. Graf roda

Definisi 2.3.2 Graf roda W_n adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x , dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan w_n .



Gambar 2.3.2 Graf Roda

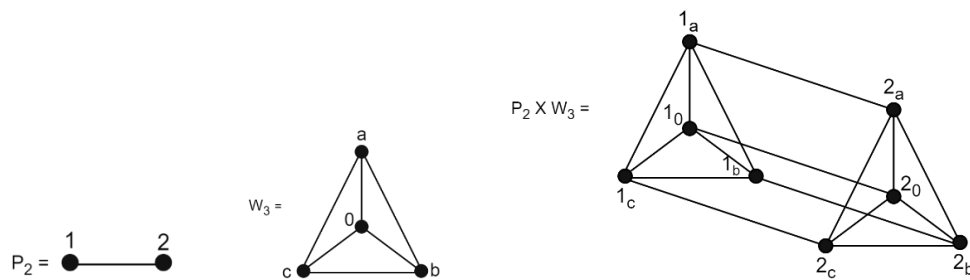
2.4 Operasi dalam Graf

Dalam graf terdapat beberapa operasi yang dapat ditemukan. Beberapa operasi graf yang sederhana antara lain yaitu operasi gabung, operasi penjumlahan graf dan operasi perkalian graf. Dan pada penelitian kali ini digunakan operasi kali.

Definsi 2.4.1 Graf kali $G \times H$ adalah graf dengan titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H)$ adalah himpunan $\{xy|x = u_1v_1, y = u_2v_2; u_1 = u_2 \text{ dan } v_1v_2 \in E(H) \text{ atau } v_1 = v_2 \text{ dan } u_1u_2 \in E(G)\}$ Hasmawati, 2020)

Contoh 2.4.1 Misalkan graf G adalah graf lintasan dengan $V(P_2) = \{1,2\}$ dan $E(P_2) = \{12\}$, serta H adalah graf dengan $V(W_3) = \{a, b, c, 0\}$ dan $E(W_3) = \{ab, bc, ca, 0a, 0b, 0c\}$.

Gambar graf P_2, W_3 , dan graf hasil kali $P_2 \times W_3$ sebagai berikut :



Gambar 2.4.1 operasi kali graf $P_2 \times W_3$

Graf kali $P_2 \times W_3$ mempunyai himpunan titik $V(P_2 \times W_3) = V(P_2) \times V(W_3) = \{1,2\} \times \{a, b, c, 0\} = \{1a, 1b, 1c, 1_0, 2a, 2b, 2c, 2_0\}$, dan mempunyai himpunan sisi $E(G \times H) = \{(1a, 1b), (1a, 1c), (1a, 1_0), (1a, 2a), (1b, 1c), (1b, 1_0), (1c, 1_0), (2a, 2b), (2a, 2c), (2a, 2_0), (2b, 2c), (2b, 2_0), (2c, 2_0)\}$

2.5 Dimensi Metrik

Pada Subbab 2.3 ini disajikan definisi, istilah-istilah dan hasil penelitian yang berkaitan dengan dimensi metrik.

Definisi 2.5.1 Misalkan himpunan terurut $S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan himpunan bagian dari $V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap S di G adalah $r(v|S) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan S disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap $u, v \in V(G), u \neq v$ mengakibatkan $r(u|S) \neq r(v|S)$ (Eka dan Rahadjeng, 2012).

Definisi 2.5.2 Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G . Banyaknya anggota atau kardinalitas dari basisnya (himpunan pembeda minimum) disebut dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$ (Wahyudi, dkk., 2011). Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik diberikan pada teorema yang disajikan di bawah ini.

Teorema 2.5.1. (Chartrand dkk, 2000) Jika suatu graf terhubung dengan orde n , maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$

Berdasarkan teorema tersebut dapat ditulis $G = P_n \times W_m$, $m = 3$ dan 4 , $G \neq P_n$, $dim(P_n \times W_m) \geq 2$

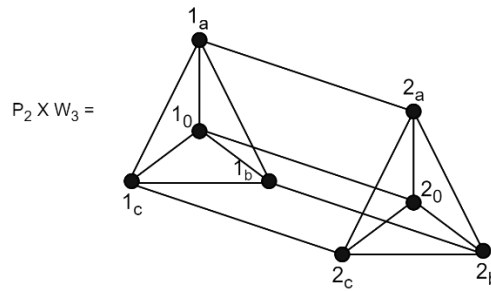
Teorema 2.5.2 (Shanmukha dkk, 2002) Jika W_m adalah graf roda dengan

$m \geq 3$, maka

$$dim(W_m) = \begin{cases} 2, & m = 4, 5 \\ 3, & m = 3, 6 \\ 3 + 2k, & m = 7 + 5k, 8 + 5k \\ 4 + 2k, & m = 9 + 5k, 10 + 5k, 11 + 5k, k \geq 0 \end{cases}$$

Dalam paper Carmen dkk (2005) dituliskan bahwa $dim(G) \leq dim(G \times P_n) \leq dim(G) + 1$, maka dapat ditulis $dim(W_m) \leq dim(P_n \times W_m) \leq dim(W_m) + 1$.

Contoh Diberikan graf G yaitu graf $P_2 \times W_3$ dengan himpunan titiknya adalah $V(P_2 \times W_3) = \{1_a, 1_b, 1_c, 1_0, 2_a, 2_b, 2_c, 2_0\}$



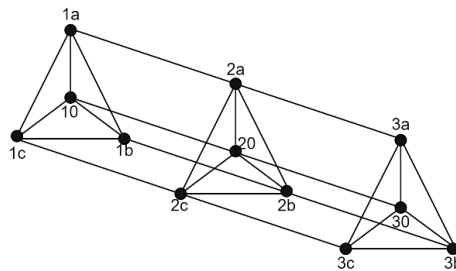
Gambar 2.5.1 Graf $P_2 \times W_3$

Dapat dipilih sub himpunan dari $V(G)$, yaitu $S = \{1_a, 1_0, 2_b\}$ dan diperoleh representasi titik:

$$\begin{aligned}
 r(1_a|S) &= [d(1_a, 1_a), d(1_a, 1_0), d(1_a, 2_b)] = [0, 1, 2] \\
 r(1_b|S) &= [d(1_b, 1_a), d(1_b, 1_0), d(1_b, 2_b)] = [1, 1, 1] \\
 r(1_c|S) &= [d(1_c, 1_a), d(1_c, 1_0), d(1_c, 2_b)] = [1, 1, 2] \\
 r(1_0|S) &= [d(1_0, 1_a), d(1_0, 1_0), d(1_0, 2_b)] = [1, 0, 2] \\
 r(2_a|S) &= [d(2_a, 1_a), d(2_a, 1_0), d(2_a, 2_b)] = [1, 2, 1] \\
 r(2_b|S) &= [d(2_b, 1_a), d(2_b, 1_0), d(2_b, 2_b)] = [2, 2, 0] \\
 r(2_c|S) &= [d(2_c, 1_a), d(2_c, 1_0), d(2_c, 2_b)] = [2, 2, 1] \\
 r(2_0|S) &= [d(2_0, 1_a), d(2_0, 1_0), d(2_0, 2_b)] = [2, 1, 1]
 \end{aligned}$$

Karena semua titik pada $P_2 \times W_3$ memiliki representasi yang berbeda terhadap S maka $S = \{1_a, 1_0, 2_b\}$ merupakan himpunan penentu bagi $P_2 \times W_3$ maka diperoleh $\dim(P_2 \times W_3) \leq 3$.

Diberikan graf G yaitu graf $P_3 \times W_3$ dengan himpunan titiknya adalah $V(P_3 \times W_3) = \{1_a, 1_b, 1_c, 1_0, 2_a, 2_b, 2_c, 2_0, 3_a, 3_b, 3_c, 3_0\}$



Gambar 2.5.2 Graf $P_3 \times W_3$

Dapat dipilih sub himpunan dari $V(P_3 \times W_3)$ yaitu $S = \{1_a, 1_0, 2_b\}$ dan diperoleh representasi titik:

$$\begin{aligned}
 r(1_a|S) &= [d(1_a, 1_a), d(1_a, 1_0), d(1_a, 2_b)] = [0,1,2] \\
 r(1_b|S) &= [d(1_b, 1_a), d(1_b, 1_0), d(1_b, 2_b)] = [1,1,1] \\
 r(1_c|S) &= [d(1_c, 1_a), d(1_c, 1_0), d(1_c, 2_b)] = [1,1,2] \\
 r(1_0|S) &= [d(1_0, 1_a), d(1_0, 1_0), d(1_0, 2_b)] = [1,0,2] \\
 r(2_a|S) &= [d(2_a, 1_a), d(2_a, 1_0), d(2_a, 2_b)] = [1,2,1] \\
 r(2_b|S) &= [d(2_b, 1_a), d(2_b, 1_0), d(2_b, 2_b)] = [2,2,0] \\
 r(2_c|S) &= [d(2_c, 1_a), d(2_c, 1_0), d(2_c, 2_b)] = [2,2,1] \\
 r(2_0|S) &= [d(2_0, 1_a), d(2_0, 1_0), d(2_0, 2_b)] = [2,1,1] \\
 r(3_a|S) &= [d(3_a, 1_a), d(3_a, 1_0), d(3_a, 2_b)] = [2,3,2] \\
 r(3_b|S) &= [d(3_b, 1_a), d(3_b, 1_0), d(3_b, 2_b)] = [3,3,1] \\
 r(3_c|S) &= [d(3_c, 1_a), d(3_c, 1_0), d(3_c, 2_b)] = [3,3,2] \\
 r(3_0|S) &= [d(3_0, 1_a), d(3_0, 1_0), d(3_0, 2_b)] = [3,2,2]
 \end{aligned}$$

Karena semua titik pada $P_3 \times W_3$ memiliki representasi yang berbeda terhadap S maka $S = \{1_a, 1_0, 2_b\}$ merupakan himpunan penentu bagi $P_3 \times W_3$ maka diperoleh $\dim(P_3 \times W_3) \leq 3$.

Dalam penelitian selanjutnya akan ditentukan dimensi metrik $P_n \times W_m$, $n \geq 4$ dan $m = 3$ dan 4 . Pembahasan hasil utama penelitian ini akan dikaji di Bab IV.