PENENTUAN TRACE DAN ANTI TRACE MATRIKS TOEPLITZ K-TRIDIAGONAL 3×3 BERPANGKAT INTEGER

SKRIPSI

JUMARDI HASAN

H011181325

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PENENTUAN TRACE DAN ANTI TRACE MATRIKS TOEPLITZ *K*-TRIDIAGONAL 3×3 BERPANGKAT INTEGER

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

JUMARDI HASAN
H011181325

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MARET 2023

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Penentuan Trace dan Anti Trace Matriks Toeplitz K-Tridiagonal 3×3 Berpangkat Integer

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 17 Maret 2023

METERAI TEMPEL

7452BAKX351107990

Jumardi Hasan

H011181325

PENENTUAN TRACE DAN ANTI TRACE MATRIKS TOEPLITZ *K*-TRIDIAGONAL 3×3 BERPANGKAT INTEGER

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
<u>Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.</u>	**<u>Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.</u>**
NIP. 196808031992021001	**NIP. 196806011995122001**

Pada Maret 2023

HALAMAN PENGESAHAN

PENENTUAN TRACE DAN ANTI TRACE MATRIKS TOEPLITZ *K*-TRIDIAGONAL 3 × 3 BERPANGKAT INTEGER

Disusun dan diajukan oleh:

JUMARDI HASAN
H011181325

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal sidang Maret 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.
NIP. 196808031992021001

Pembimbing Pertama

Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.
NIP. 196806011995122001

Ketua Program Studi Matematika

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah *subhanahu wa ta'ala* atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Penentuan Trace dan Anti Trace Matriks Toeplitz K-Tridiagonal 3×3 Berpangkat Integer".** Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapal **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika serta segenap dosen pengajar dan staff departemen yang telah membekali ilmu dan memberikan kemudahan-kemudahan kepada penulis dalam berbagai hall selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku penasihat akademik sekaligus anggota penguji dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S,Si., M.Si.** selaku anggota penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Kedua orang tua penulis yang telah mendidik, memotivasi, dan mendoakan penulis selama menjalani masa perkuliahan.
7. Seluruh pengurus maupun alumni **Mushalla Istiqamah BEM FMIPA Unhas, UKM LDK MPM Unhas, dan LDF se-Unhas** yang telah

memberikan dukungan, doa, dan motivasi selama menjalani kehidupan kampus di Universitas Hasanuddin.

8. Teman-teman **KM FMIPA 2018, Integral 2018, serta pengurus BEM FMIPA Unhas periode 2021/2022** atas pengalaman berharga selama menjalani masa perkuliahan.
9. Teman-teman matematika 2018 terkhusus **Muh. Akbar Syam, Muh. Lutfi, M. Aris, Ahmad Nurhidayat, Jeki Saputra, Catur Brilian Setiawan, Syamsul Alamsyah** yang senantiasa membersamai dan membantu penulis semasa perkuliahan.
10. Semua pihak yang telah membantu penulis dan belum sempat penulis sampaikan satu per satu.

Akhir kata, penulis berharap kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* agar membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan ke depannya.

Makassar, 17 Maret 2023

Jumardi Hasan

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Jumardi Hasan
NIM	: H011181325
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royaliti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penentuan Trace dan Anti Trace Matriks Toeplitz K-Tridiagonal 3×3 Berpangkat Integer

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal Maret 2023

Yang menyatakan

Jumardi Hasan

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk trace dan anti trace dari matriks Toeplitz K-tridiagonal 3×3 berpangkat integer. Penentuan trace dan anti trace pada penelitian ini dilakukan dengan menentukan bentuk umum matriks Toeplitz K-tridiagonal untuk pangkat integer positif dan integer negatif yang diperoleh dengan menggunakan metode diagonalisasi. Adapun untuk menentukan matriks yang mendiagonalkan matriks Toeplitz K-tridiagonal diperoleh dengan mencari basis dari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen. Penentuan trace diperoleh dengan menjumlahkan entri diagonal utama dan penentuan anti trace diperoleh dengan menjumlahkan entri anti diagonal dari bentuk umum matriks Toeplitz K-tridiagonal 3×3 berpangkat integer yang diperoleh.

Kata kunci: *Matriks Toeplitz tridiagonal, Matriks Toeplitz 2-tridiagonal, Trace, Anti Trace, Diagonalisasi.*

ABSTRACT

This research aims to determine the trace and anti-trace form of the integer rank 3×3 K-tridiagonal Toeplitz matrix. Determination of trace and anti-trace in this study is done by determining the general form of K-tridiagonal Toeplitz matrix for positive integer and negative integer powers obtained by using diagonalisation method. As for determining the matrix that diagonalises the K-tridiagonal Toeplitz matrix, it is obtained by finding the basis of the eigenvector corresponding to the eigenvalue. The trace determination is obtained by summing the main diagonal entries and the anti trace determination is obtained by summing the anti diagonal entries of the general form of the obtained integer-ranked 3×3 K-tridiagonal Toeplitz matrix.

Keywords: *Tridiagonal Toeplitz Matrix, 2-tridiagonal Toeplitz Matrix, Trace, Anti Trace, Diagonalisation.*

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu materi dasar dalam mempelajari ilmu matematika adalah aljabar. Aljabar adalah cabang matematika yang menggunakan simbol dan operasi matematika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian untuk menyelesaikan suatu masalah. Salah satu pembahasan dalam bidang aljabar yang terus berkembang adalah aljabar linear. Aljabar linear adalah bidang matematika yang mempelajari matriks, vektor, transformasi linier, dan persamaan linier.

Salah satu pembahasan dalam aljabar linear yang menarik untuk dibahas adalah matriks. Matriks juga sudah sering dijumpai pada cabang ilmu lain diantaranya bidang ilmu teknik informatika, ilmu biologi, kimia, ekonomi, dan masih banyak lagi. Secara umum, matriks dapat dikatakan sebagai suatu kumpulan angka-angka yang juga sering disebut elemen-elemen yang disusun secara teratur menurut baris dan kolom dengan ukuran tertentu.

Dalam teori matriks juga terdapat berbagai jenis matriks, salah satunya matriks Toeplitz. Pada dasarnya matriks Toeplitz mempunyai operasi yang sama dengan matriks biasa hanya saja matriks Toeplitz mempunyai struktur dan sifat yang khusus. Matriks Toeplitz adalah matriks simetris dimana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama juga sama.

Pembahasan mengenai matriks Toeplitz telah dikaji sebelumnya. Pada tahun 2014, (Siregar, Tulus, & Sawaluddin) dalam penelitiannya membahas tentang bentuk umum invers dari matriks Toeplitz menggunakan metode adjoin. Pada tahun 2018, (Slowik) dalam penelitiannya juga membahas tentang invers dan determinan dari matriks Toeplitz-Hessenberg. Pada tahun 2020, (Sukmawati) dalam penelitiannya yang berjudul “Sifat Nilai Eigen dan Invers Matriks Toeplitz” membahas mengenai sifat khusus nilai eigen dan syarat cukup invers matriks Toeplitz. Kemudian pada tahun 2021, (Rasmawati, dkk) dalam penelitiannya membahas tentang bentuk umum dari determinan matriks Toeplitz *k*-Tridiagonal.

Dalam matriks terdapat beberapa operasi matriks, diantaranya yaitu trace matriks. Trace matriks adalah penjumlahan elemen-elemen diagonal utama pada suatu matriks. Trace dari matriks berpangkat sering digunakan pada beberapa bidang matematika, khususnya Analisis Jaringan (*Network Analysis*), Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks, dan Persamaan Differensial. (Brezinski, Fika, & Mitrouli, 2012).

Pembahasan mengenai trace telah diteliti oleh peneliti sebelumnya. Pada tahun 2008, Higham dalam bukunya yang berjudul *"Functions of Matrices : Theory and Computation"* membahas salah satu cara untuk menghitung trace dari matriks berpangkat n adalah dengan menjumlahkan semua nilai eigen matriks berpangkat n. Selanjutnya pembahasan mengenai trace matriks berpangkat n telah dibahas oleh (Pahade & Jha, 2015) dalam penelitiannya yang berjudul *"Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices"*, dimana penentuan trace pada matriks berpangkat ini didasarkan pada perkalian matriks dan diperoleh bentuk umum dari trace berpangkat integer positif. Pada tahun 2018 Gormantara dalam penelitiannya yang berjudul "Penentuan Trace dan Anti Trace Pada Matriks 2×2 Berpangkat Integer Positif *"*, yang membahas bentuk umum trace dan anti trace matriks 2×2 dan perluasannya pada matriks blok. Kemudian (Prajapati & Thadani, 2018) dalam penelitiannya yang berjudul *"Trace of Negative Integer Power of Real 2×2 Matrices"*, yang membahas mengenai bentuk umum dari trace matriks berpangkat integer negatif. Selanjutnya penelitian mengenai trace diteliti lagi dengan menggunakan jenis matriks lainnya. Pada tahun 2019 (Rahmawati, dkk) dalam penelitiannya membahas bentuk umum trace dari matriks Toeplitz simetris 3×3 dengan pangkat bilangan bulat positif . Kemudian pada tahun 2019 (Aryani, dkk) dalam penelitiannya membahas bentuk umum dari trace matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 dengan pangkat bilangan bulat positif. Selanjutnya pada tahun 2021 (Olii, dkk) dalam penelitiannya juga membahas bentuk umum dari trace matriks Toeplitz 2-tridiagonal 3×3 dengan pangkat bilangan bulat positif.

Berdasarkan uraian di atas, maka akan dilakukan penelitian yang lebih mendalam terkait trace dari matriks khusus yaitu matriks Toeplitz yang dituangkan dalam bentuk tulisan skripsi dengan judul :

“Penentuan Trace dan Anti Trace Matriks Toeplitz K-Tridiagonal Berpangkat Integer”

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana menentukan trace dan anti trace pada matriks Toeplitz k-tridiagonal 3×3 berpangkat integer positif ?
2. Bagaimana menentukan trace dan anti trace pada matriks Toeplitz k-tridiagonal 3×3 berpangkat integer negatif?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada matriks Toeplitz *k*-tridiagonal dengan nilai $k = 1$ dan $k = 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penelitian ini bertujuan untuk :

1. Menentukan bentuk umum trace dan anti trace pada matriks Toeplitz *k*-tridiagonal 3×3 berpangkat integer positif.
2. Menentukan bentuk umum trace dan anti trace pada matriks Toeplitz *k*-tridiagonal 3×3 berpangkat integer negatif.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dalam menambah pengetahuan penulis tentang cara menentukan trace dan anti trace pada matriks berpangkat integer khususnya untuk matriks Toeplitz *k*-tridiagonal 3×3 serta dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait trace dan anti trace pada jenis matriks lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri atas lima bab, sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini menjelasskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

BAB II : TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini menjelaskan tentang teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, trace dan anti trace, invers dan determinan, nilai eigen dan vektor eigen, serta diagonalisasi pada suatu matriks.

BAB III : METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini membahas tentang waktu dan tempat penelitian, metode penelitian dan diagram alir.

BAB IV : HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi tentang pembahasan dari diagram alir penelitian dan hasil yang diperoleh dari rumusan masalah.

BAB V : PENUTUP

Pada bab ini membahas tentang kesimpulan dari hasil dan pembahasan serta saran untuk penelitian kedepannya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Determinan dan Invers Matriks

Definisi 2.4 *Misalkan* $A = (a_{ij})$ *berukuran* $n \times n$. *Determinan dari A, dinotasikan* $\det(A)$ *atau* $|A|$, *adalah jumlah semua perkalian elementer bertanda dari* A, *yaitu*

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

dengan $j_{1,}, j_2, \dots n$ *adalah permutasi* n *bilangan asli yang pertama.*

Jika nilai determinan suatu matriks itu nol maka matriks tersebut singular dan jika nilai determinan suatu matriks itu tidak nol, berarti matriks tersebut nonsingular.

Contoh 2.1 Diberikan matriks dengan ukuran 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (2 \times 1 \times 5) + (3 \times 6 \times 3) + (5 \times 7 \times 4) - (3 \times 1 \times 5) - (4 \times 6 \times 2) - (5 \times 7 \times 3)$$

$\det(B) = 36.$

Definisi 2.5 *Misalkan A adalah matriks bujur sangkar dan jika ada matriks B dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga* $AB = BA = I$, *maka A dikatakan mempunyai invers (nonsingular) dan B disebut invers dari A.* (Anton & Rorres, 2014).

Invers dari sebuah matriks hanya satu dan berlaku sifat $(A^{-1})^{-1} = A$. Matriks yang tidak mempunyai invers adalah matriks singular.

Definisi 2.6 *Jika A adalah matriks bujur sangkar. Minor dari elemen* a_{ij}, *dinotasikan dengan* M_{ij}, *didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari matriks A. Bilangan* $(-1)^{i+j} M_{ij}$ *disebut sebagai kofaktor dari elemen* a_{ij} *dan dinotasikan dengan* C_{ij} . (Anton & Rorres, 2014).

Contoh 2.6 Tentukan minor dari elemen a_{11}, a_{21}, dan a_{33} dan kofaktor yang bersesuaian dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

Jawab

Minor dari elemen a_{11}, a_{21}, a_{33} adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

dan kofaktor yang bersesuaian dengan minor adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 11$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -18$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = -5$$

Definisi 2.7 *Misalkan A adalah matriks yang berukuran* $n \times n$. *Determinan dari matriks A dapat dihitung dengan mengalikan elemen-elemen pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, di mana untuk setiap* $1 \leq i \leq n$ *dan* $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i) (Anton & Rorres, 2014).

Definisi 2.8 *Misalkan A adalah matriks yang berukuran* $n \times n$ *dan* C_{ij} *adalah kofaktor dari* a_{ij}, *maka matriks*

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. (Anton & Rorres, 2014).

Definisi 2.9 *Transpose dari matriks kofaktor disebut adjoint dari matriks A dan dinotasikan dengan* $adj(A)$. (Anton & Rorres, 2014).

Teorema 2.1 *Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka invers dari A, dinotasikan A^{-1}, adalah:*

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \operatorname{adj}(\mathrm{A}) \qquad (2.1)$$

Bukti:

Pertama akan dibuktikan bahwa

$$A\,adj(A) = \det(A)\,I$$

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{j1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{j2} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{jn} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari $A\,adj(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}. \qquad (2.2)$$

Jika $i = j$, maka (2.2) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i dari A (definisi 2.7) dan jika $i \neq j$, maka semua a dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A, sehingga nilai dari (2.2) adalah nol. Oleh karena itu,

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\,I. \qquad (2.3)$$

\Karena A mempunyai invers, $\det(A) \neq 0$, persamaan (2.3) dapat ditulis kembali sebagai

$$A\left[\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right] = I. \qquad (2.4)$$

Dengan mengalikan kedua sisi dari kiri dengan A^{-1} pada persamaaan (2.4) diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Contoh 2.7 Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

Jawab

Matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & -13 \\ -18 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

dan adjoint dari A adalah

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 11 & -18 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -13 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A) = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} 11 & -18 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -13 & 9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{27} & \frac{2}{3} & \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{13}{27} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{27} \end{bmatrix}.$$

2.2 Trace dan Anti Trace Matriks

Definisi 2.10 *Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka trace A, dinotasikan tr(A), didefinisikan sebagai jumlah entri pada diagonal utama A.* (Anton & Rorres, 2014).

Misalkan A berukuran n × n, atau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \qquad (2.5)$$

Contoh 2.8 Misalkan diberikan matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

maka

$$tr(A) = 2 + 5 + 8 = 15$$

Definisi 2.11 *Misalkan* $A = (a_{ij})$ *adalah matriks berukuran* $n \times n$. *Anti diagonal dari A adalah semua elemen* a_{ij} *dengan* $i + j = 1 + n$.

Definisi 2.12 *Jika A adalah matriks bujur sangkar. Anti trace dari matriks A, dinotasikan dengan tr*$tr_{anti}(A)$*, didefinisikan sebagai jumlahan dari elemen-elemen anti diagonal A.* (Anton & Rorres, 2014).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr_{anti}(A) = a_{1n} + a_{2,n-1} + \cdots + a_{n-1,2} + a_{n1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1,n-k}. \qquad (2.6)$$

Contoh 2.9 Misalkan diberikan matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

maka

$$tr_{anti}(A) = 4 + 5 + 8 = 17.$$

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.15 *Jika A adalah sebuah matriks* $m \times n$, *maka subruang* R^n *direntangkan oleh vektor-vektor baris A disebut ruang baris A, dan subruang* R^m *direntangkan oleh vektor-vektor kolom A disebut ruang kolom A. Ruang solusi sistem homogen dari persamaan* $Ax = 0$, *yang merupakan sebuah subruang dari* R^n, *disebut dengan ruang nol A.* (Anton & Rorres, 2014).

Definisi 2.16 *Jika A adalah sebuah matriks berukuran* $n \times n$, *maka sebuah vektor tak nol* $\vec{x}$ *di* R^n *dinamakan vektor eigen dari A jika* Ax *adalah kelipatan skalar dari* x, *yaitu:*

$$Ax = \lambda x.$$

Skalar λ *ini dinamakan nilai eigen dari A, sedangkan* $\vec{x}$ *dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan* λ. (Santosa, 2009).

Contoh 2.11

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3x.$$

Nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$, diperoleh melalui persamaan

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax = \lambda I x$$

$$(\lambda I - A)x = 0. \qquad (2.7)$$

Persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \qquad (2.8)$$

Persamaan ini dinamakan persamaan karakteristik.

Teorema 2.2 *Jika A adalah matriks yang berukuran $n \times n$, pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen satu sama lain:*

1. *λ adalah nilai eigen dari A.*
2. *Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai solusi nontrivial.*
3. *Ada sebuah vektor tak nol x di R^n sehingga $Ax = \lambda x$.*
4. *λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $det(\ \lambda I - A) = 0$.* (Anton & Rorres, 2014).

Vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor-vektor tak nol pada ruang solusi dari $(\lambda I - A)x = 0$. Ruang solusi ini disebut ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.13

Tentukan basis untuk ruang eigen dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Jawab

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-0 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$$

Maka nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1, \lambda = 2$ dan $\lambda = 3$.

Berdasarkan persamaan (2.7), diperoleh bentuk

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = 1$, maka

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh penyelesaian $x_1 = -x_3, x_2 = 0$, dan $x_3 = x_3$ sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah:

$$x = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

Untuk $\lambda = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh penyelesaian $x_1 = 2x_2$, $x_2 = x_2$, dan $x_3 = 0$, atau

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah basis ruang eigen yang bersesuaian untuk $\lambda = 2$.

Untuk $\lambda = 3$, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh penyelesaian $x_1 = x_3$, $x_2 = 2x_3$, dan $x_3 = x_3$, atau

$$x = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis ruang eigen yang bersesuaian untuk $\lambda = 3$.

2.4 Hubungan Nilai Eigen dan Trace Matriks

Pada bagian ini dijelaskan mengenai hubungan nilai eigen terhadap trace matriks. Misalkan diberikan matriks A berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_n$ maka berlaku

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

dan karena nilai eigen dari matriks berpangkat $A^k, \forall\, k = 2, 3, \dots n$ adalah ${\lambda_1}^k, {\lambda_2}^k, \dots , {\lambda_n}^k$, maka

$$Tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \quad , \forall\, k = 2, 3, \dots .$$

2.5 Diagonalisasi

Definisi 2.17 *Misalkan A dan B adalah matriks bujur sangkar. Matriks B dikatakan similar (mirip) dengan A jika terdapat matriks invertible P sehingga* $B = P^{-1}AP$. (Anton & Rorres, 2014).

Definisi 2.18 *Matriks persegi A dikatakan dapat didiagonalkan (diagonalizable) jika terdapat matriks P yang invertible sedemikian sehingga* $P^{-1}AP$ *adalah diagonal dan P dikatakan mendiagonalkan (diagonalize) matriks A.* (Anton & Rorres, 2014).

Contoh 2.14

Tentukan matriks P yang mendiagonalkan matriks A dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jawab

Berdasarkan contoh (2.13), nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 1, \lambda = 2$ dan $\lambda = 3$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$ adalah

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$ adalah

$$p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ adalah

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dengan menulis matriks P dengan kolom i, ke-i adalah p_i, $i = 1,2,3$, diperoleh

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karena P^{-1} ada, yaitu

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dan

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

maka P dikatakan mendiagonalkan A.

Secara umum, untuk menentukan matriks berpangkat n memerlukan pengerjaan yang lama jika dilakukan secara manual. Tetapi menghitung matriks berpangkat, sangat sederhana ketika matriks tersebut merupakan matriks diagonal. Untuk menunjukkan hal tersebut, misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi, P mendiagonalisasi A, yaitu

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

pangkat kuadrat dari matriks tersebut menjadi:

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = D^2$$

atau

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P.$$

Secara umum, jika k adalah bilangan bulat positif, maka dengan persamaan yang sama dapat ditunjukkan

$$P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} = D^k$$

atau ditulis kembali menjadi

$$A^k = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1} = PD^kP^{-1}$$

$$A^k = PD^kP^{-1}. \qquad (2.9)$$

Contoh 2.15

Tentukan A^5 dengan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jawab

Diperoleh matriks P yang mendiagonalisasi matriks A sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (2.9), diperoleh

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10944 & 10912 & 10912 \\ 10912 & 10944 & 10912 \\ 10912 & 10912 & 10944 \end{bmatrix}.$$

2.6 Matriks Toeplitz

Definisi 2.13 *Matriks Toeplitz* (T_n) *adalah matriks berukuran n x n dengan* $T_n = (t_{kj} = t_{k-j}; k, j = 0,1, \dots, n-1)$ *dengan* t_{kj} *adalah elemen pada baris ke-k dan kolom ke-j.* (Gray, 2006).

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Matriks ini diberi nama matriks Toeplitz sebagaimana penemunya yaitu Otto Toeplitz, seorang matematikawan berkebangsaan Jerman di awal abad 20.

Adapun sifat matriks Toeplitz yaitu sebagai berikut:

1. Berbentuk matriks bujursangkar yang berorde n.
2. Semua unsur pada diagonal utama bernilai sama, dinotasikan dengan $a_{ij} = a_{ji} = t_{i-j}$ untuk $i = j$ dan $i, j = 1,2,3, \dots, n$.

3. Semua unsur pada subdiagonal atau unsur di atas diagonal dan di bawah diagonal bernilai sama, dinotasikan dengan $t_{ij} = t_{i-j}$ untuk $i \neq j$ dan $i, j = 1,2,3, \dots, n$.

Contoh 2.10 Berikut contoh matriks Toeplitz.

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 1 & 3 \\ 10 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Salah satu jenis matriks Toeplitz adalah matriks Toeplitz k-tridiagonal yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.14 *Matriks Toeplitz k-tridiagonal dinotasikan* $A_n^{(k)}, k = 1,2, \dots, n$ *dengan*

$$A_n^{(k)} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

dimana

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ b, & i - j = k \\ c, & j - i = k \\ 0, & untuk\ i, j\ yang\ lain. \end{cases}$$

Nilai k menunjukkan suatu skalar yang menentukan entri dari matriks Toeplitz k-tridigional.

Untuk $k = 1$, maka:

$$A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$A_3^{(1)} = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$A_4^{(1)} = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 \\ 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$A_5^{(1)} = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & a & c & 0 \\ 0 & 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$A_6^{(1)} = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & 0 & \dots & \dots \\ 0 & b & a & c & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & b & a & c & 0 \\ \dots & \dots & 0 & b & a & c \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

Matriks tersebut dinamakan matriks Toeplitz tridiagonal.

Untuk $k = 2,$ maka:

$$A_3^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_4^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_5^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 \\ b & 0 & a & 0 & c \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_6^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_n^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 & \dots & \dots \\ b & 0 & a & 0 & c & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & b & 0 & a & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Matriks tersebut dinamakan matriks Toeplitz 2-tridiagonal.

Untuk $k = 3,$ maka:

$$A_4^{(3)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_5^{(3)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_6^{(3)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A_n^{(3)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots & \dots \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Matriks tersebut dinamakan matriks Toeplitz 2-tridiagonal.

2.7 Binomial Newton

Definisi 2.15 *Misalkan n dan r adalah bilangan bulat non negatif dengan $n \geq r$. Koefisien binomial $\binom{n}{r}$ didefinisikan dengan*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Teorema 2.3 *Jika n suatu bilangan bulat non negatif maka*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r}y^r.$$

Bukti

Untuk $n = 0$ maka $(x+y)^0 = 1.$

Asumsikan pernyataan benar untuk $n - 1 > 0.$

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} x^{n-1-r}y^r$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan pernyataan benar untuk n. Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y)\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-1-r}y^r \\
&= x\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-1-r}y^r + y\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-1-r}y^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-1-r}y^{r+1} + \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-r}y^r \\
&= \binom{n-1}{n-1}y^n + \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n-1}{r}x^{n-1-r}y^{r+1} \\
&\quad \binom{n-1}{0}x^n + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-r}y^r \\
&= x^n + \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n-1}{r}x^{n-1-r}y^{r+1} + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-r}y^r + y^n
\end{aligned}
$$

Ganti $r+1$ dengan r pada suku kedua, diperoleh

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r-1}x^{n-r}y^r + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}x^{n-r}y^r + y^n$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n + \sum_{r=1}^{n-1}\left\{\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}\right\}x^{n-r}y^r + y^n \\
&= x^n + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r + y^n \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r.
\end{aligned}
$$

Pernyataan benar untuk n. Dengan demikian teorema tersebut terbukti.