PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF TIMBANGAN

SKRIPSI

ARYUNIDA AZIS

H011181305

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
OKTOBER 2022

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF TIMBANGAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ARYUNIDA AZIS
H011181305

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
OKTOBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah :

Nama : Aryunida Azis

NIM : H011181305

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Pelabelan Graceful pada Graf Timbangan

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 04 Oktober 2022

Yang menyatakan,

Aryunida Azis

NIM. H011181305

LEMBAR PENGESAHAN

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF TIMBANGAN

Disusun dan diajukan oleh:

ARYUNIDA AZIS

H011181305

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 04 Oktober 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19700807 200003 1 002	**NIP. 19680803 199202 1 001**

Ketua Program Studi Matematika

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puja dan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Pelabelan Graceful pada Graf Timbangan”**, sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin;
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin;
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah menyediakan waktu, tenanga, dan pikiran untuk membimbing penulis dari awal hingga selesainya skripsi ini;
4. Bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. selaku dosen pembimbing pertama yang juga telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dari awal hingga selesainya skripsi ini;
5. Bapak Prof. Dr. Budi Nurwahyu, M.S. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
6. Ibu Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji dan juga Penasehat Akademik yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripai ini, serta telah memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis selama menjalani pendidikan di Program studi Matematika Fakultas MIPA UNHAS;

7. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan;
8. Bapak/Ibu pegawai/staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini;
9. Kedua orang tua dan keluarga tercinta yang telah banyak memberikan bantuan dan dukungannya, baik secara materi maupun moral selama penulis duduk di bangku perkuliahan;
10. Teman – teman TADIKA serta seluruh mahasiswa MATEMATIKA 2018 yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan selalu memberikan semangat selama penyusunan skripsi ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis selama penyusunan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 04 Oktober 2022

Aryunida Azis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aryunida Azis

NIM : H011181305

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, meyetetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** ***(Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF TIMBANGAN

Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database),* merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 04 Oktober 2022

Yang menyatakan,

Aryunida Azis

ABSTRAK

Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf (titik atau sisi) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Misal *G(V,E)* suatu graf dan f : V(G) $\rightarrow \{0,1,2,\dots,|\mathrm{E(G)}|\}$. Graf G disebut memiliki pelabelan graceful jika f adalah suatu fungsi injektif dan $|\mathrm{f(x)} - \mathrm{f(y)}|$ berbeda untuk setiap sisi $xy \in \mathrm{E(G)}$. Suatu graf yang dapat dilabeli secara graceful disebut graf graceful. Dalam penelitian ini dikaji pelabelan graceful pada graf timbangan yang dinotasikan $S_{1,r}(C_3)$ dan graf timbangan yang diperumum dinotasikan dengan $S_{1,r}(C_n)$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf timbangan $S_{1,r}(C_3)$ untuk setiap $r \in \mathbb{N}$ adalah graf graceful dan graf timbangan yang diperumum $S_{1,r}(C_n)$ untuk setiap $r \in \mathbb{N}, n \equiv 1 \; atau \; 3 \; mod \; (4)$ adalah graf graceful.

Kata kunci : *Pelabelan graceful, Graf timbangan, Graf timbangan yang diperumum.*

ABSTRACT

Graph labeling is a function that maps the elements of the graph (vertex or edge) with a number (usually a positive integer). Let *G(V,E)* be a graph and f : V(G)$\rightarrow \{0,1,2,\dots,|E(G)|\}$. Graph G is said to have graceful labeling if f is an injective function and $|f(x) - f(y)|$ is different for all edges of $xy \in E(G)$. A graph that can be labeled gracefully is called a graceful graph. In this research, we examined the graceful labeling on the double pan balance graph denoted by $S_{1,r}(C_3)$ and the generalized double pan balance graph denoted by $S_{1,r}(C_n)$. The results showed that the double pan balance graph $S_{1,r}(C_3)$ for all $r \in \mathbb{N}$ is a graceful graph and the generalized double pan balance graph $S_{1,r}(C_n)$ for all $r \in \mathbb{N}, n \equiv 1 \; or \; 3 \; mod \; (4)$ is a graceful graph.

Keyword : *Graceful labelling, double pan balance graph, Generalized double pan balance graph.*

Judul	: Pelabelan Graceful pada Graf Timbangan
Nama	: Aryunida Azis
NIM	: H011181305
Program Studi	: Matematika

DAFTAR ISI

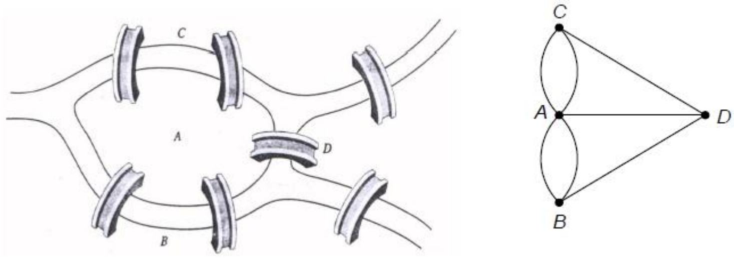
DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang berperan penting di dalam kehidupan karena dapat digunakan untuk membantu memecahkan masalah di berbagai bidang ilmu lainnya seperti bidang Ekonomi, Fisika, Kimia, dan lain-lain. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa matematika menjadi ilmu pengetahuan yang paling sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari, baik secara langsung maupun tidak langsung. Dalam matematika, terdapat berbagai macam cabang ilmu matematika seperti, Analisis Riil, Teori Peluang, Teori Graf, dan lain-lain. Cabang ilmu tersebut dapat digunakan untuk memecahkan masalah dengan cara memodelkan permasalahan tersebut ke bentuk model matematika lalu menyelesaikannya sesuai dengan cabang ilmu yang berhubungan dengan model tersebut. Penentuan jalan dengan jarak terpendek dari kota A ke kota B merupakan salah satu contoh persoalan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan salah satu cabang ilmu matematika, yaitu teori graf.

Teori graf diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736, oleh Leonard Euler. Pada saat itu, di Konigsberg terdapat 7 jembatan yang digunakan untuk menghubungkan 4 daratan yang dipisahkan oleh sungai. Warga di kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada daratan yang sama. Euler membuktikan bahwa hal tersebut tidak dapat dilakukan (Hasmawati, 2020:7). Dalam pembuktiannya, Euler merepresentasikan keadaan jembatan di kota Konigsberg seperti Gambar 1.1.



(a) (b)

Gambar 1.1 (a) Ilustrasi jembatan dan (b) Representasi jembatan ke bentuk graf

(Sumber : Rossen, 2003:578)

Berkat hal yang dilakukan oleh Euler, terdapat suatu cabang ilmu matematika yang baru yaitu teori graf. Dalam perkembangannya, teori graf dapat dibagi menjadi beberapa bidang kajian, yaitu teori Ramsey, dimensi metriks, pewarnaan graf dan pelabelan graf.

Wallis (2001:11) menyatakan bahwa pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf (titik atau sisi) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat tak negatif). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labelling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) dan jika domain dari fungsi adalah gabungan himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Pelabelan graceful merupakan salah satu jenis pelabelan yang terkenal. Pelabelan graceful didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf G yang memenuhi fungsi injektif dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,\ldots,|E(G)|\}$ sedemikian sehingga jika sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang terkait langsung maka setiap sisi tersebut akan mendapat label yang berbeda. Suatu graf yang memenuhi aturan pelabelan graceful disebut graf graceful (Muarrifah, 2008:5). Dengan demikian, pelabelan graceful termasuk bentuk pelabelan titik karena domainnya merupakan titik, sedangkan label pada sisinya merupakan akibat dari adanya label titik yang berbeda semua.

Beberapa kajian terdahulu mengenai pelabelan graceful untuk kelas graf tertentu telah dibahas oleh peneliti lain seperti Rosa (1967:349-355) telah membuktikan bahwa graf sikel C_n merupakan graf graceful untuk $n \equiv 0$ atau 3 (mod 4). Golomb (1972:23-37) telah membuktikan bahwa graf lengkap K_n merupakan graf graceful untuk $n \leq 4$ dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ merupakan graf graceful.. Kaloko dan Ahyaningsih (2016:20-28) membuktikan bahwa graf superstar $S_{m,n}$ merupakan graf graceful. Amri dan Harahap (2017:1-5) membuktikan bahwa graf 8-bintang dengan C_3 yang merupakan suatu graf yang dibangun dari 2 graf lingkaran C_3 dimana salah satu simpul dari graf lingkaran menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang S_n untuk $n\, genap$ merupakan graf graceful. Manulang dan Sugeng (2018:14-19) membuktikan bahwa graf obor O_n untuk $n \geq 3$ merupakan graf graceful. Jeshinta, dkk (2019:60-64) membuktikan bahwa deret dari salinan isomorfik graf bintang yang terhubung dengan dua graf tangga merupakan graf graceful. Amri dan Sugeng (2020:66-74) membuktikan bahwa graf ilalang (S_n, r) untuk $3 \leq r \leq 5$ merupakan graf graceful. Pasaribu, dkk (2021:103-114) membuktikan bahwa graf U-Bintang $(U(S_n))$ untuk $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ merupakan graf graceful.

Truszczyński (1984:377-387) membuat *conjecture* yang menyatakan bahwa “Setiap graf unisiklik merupakan graceful kecuali graf unisiklik dengan C_n dimana $n \equiv 1$ atau $2\, mod\, (4)$”. Hingga saat ini belum banyak hasil yang mendukung *Truszczynski’s conjecture* dikarenakan masih kurangnya hasil penelitian yang berkaitan dengan graf unisiklik. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian pelabean graceful pada kelas graf unisiklik yaitu pada graf timbangan, dan selanjutnya penelitian tersebut akan dituangkan dalam bentuk skripsi yang berjudul :

“Pelabelan Graceful pada Graf Timbangan”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah yang akan diselesaikan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menunjukkan apakah graf timbangan $\left(\mathrm{S}_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{C}_3)\right)$ dan graf timbangan yanng diperumum $\left(\mathrm{S}_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{C}_\mathrm{n})\right)$ merupakan graf graceful atau bukan.
2. Bagaimana mengkonstruksi pelabelan graceful untuk graf timbangan $\left(\mathrm{S}_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{C}_3)\right)$ dan graf timbangan yang diperumum $\left(\mathrm{S}_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{C}_\mathrm{n})\right)$.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah mengkontruksi pelabelan graceful pada graf timbangan $\left(\mathrm{S}_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{C}_3)\right)$ untuk setiap $r \in \mathbb{N}$ dan graf timbangan yang diperumum $\left(\mathrm{S}_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{C}_\mathrm{n})\right)$ untuk setiap $r \in \mathbb{N}, n \equiv 1\ dan\ 3\ mod(4)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf timbangan $\left(S_{1,r}(C_3)\right)$ dan graf timbangan diperumum $\left(S_{1,r}(C_n)\right)$ merupakan graf graceful dan cara mengkonstruksi pelabelan graceful apabila graf timbangan $\left(S_{1,r}(C_3)\right)$ dan graf timbangan yang diperumum $\left(S_{1,r}(C_n)\right)$ merupakan graf graceful.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Sebagai sarana untuk menambah pemahaman dan pengetahuan pembaca mengenai pelabelan graceful.
2. Sebagai sarana bagi penulis untuk mengembangkan ilmu yang telah dipelajari dan kemudian dituangkan dalam bentuk karya ilmiah.
3. Sebagai referensi atau tambahan ilmu pengetahuan bagi peneliti lain untuk mengembangkan penelitian-penelitian pada kajian pelabelan graf khususnya pelabelan graceful.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi graf, terminologi graf, jenis-jenis graf, fungsi (pemetaan), serta penjelasan mengenai pelabelan graf yang akan digunakan.

2.1 Pengertian Graf

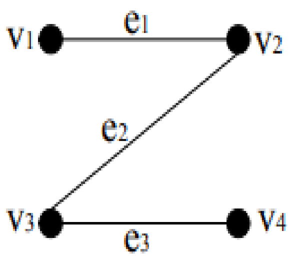
Teori graf diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736, oleh Leonard Euler.

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan (V,E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi* (Hasmawati, 2020:12).

Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan *V(G)* dan himpunan sisi dari graf G dinotasikan dengan *E(G)*, sehingga graf G dapat dinotasikan dengan *G=(V(G),E(G))*. Banyaknya anggota dari *V(G)* disebut sebagai **orde *(order)*** dari graf G dan dilambangkan dengan *p(G)*, sedangkan banyaknya anggota dari *E(G)* disebut sebagai **ukuran *(size)*** dari graf G dan dilambangkan dengan *q(G)*. **Kardinalitas** himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut dan dinyatakan dalam simbol harga mutlak "| |". Jadi, apabila *p(G)* merupakan orde dari graf G dan *q(G)* merupakan ukuran dari graf G, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungankan u dan v ditulis $e = (u, v) \in E(G)$. Selanjutnya, penulisan sisi (u, v) akan ditulis uv (Hasmawati, 2020:13-14).

Contoh 1:

G:



Gambar 2.1 Graf G

Berdasarkan Gambar 2.1, himpunan titik dan himpunan sisi graf G adalah: $V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$, dimana $e_1 = V_1V_2$, $e_2 = V_2V_3$, dan

$e_3 = V_3V_4$. Jadi, *order* dari graf G adalah $p(G) = |V(G)| = 4$ dan *size* dari graf G adalah $q(G) = |E(G)| = 3$.

2.2 Terminologi Graf

Dalam graf terdapat beberapa terminologi (istilah) yang digunakan dalam graf. Adapun beberapa terminologi yang akan digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 *Misalkan G adalah suatu graf dan* $v_i, v_j \in V(G)$ *serta* $x \in E(G)$. *Jika* $x = v_iv_j$, *maka titik* v_i *dikatakan bertetangga (adjacent) dengan titik* v_j (Hasmawati, 2020:15).

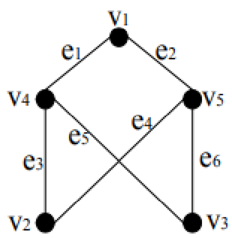
Definisi 2.2.2 *Misalkan G adalah suatu graf dan* $v_i, v_j \in V(G)$ *serta* $x \in E(G)$. *Jika* $x = v_iv_j$, *maka sisi* x *dikatakan terkait (incident) dengan titik* v_i *demikian pula untuk titik* v_j (Hasmawati, 2020:15).

Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dapat dinotasikan dengan $N_G(v)$ yang didefinisikan sebgai berikut:

$$N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$$

Contoh 2:

G:



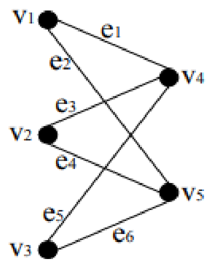
Gambar 2.2 Graf G berorde 5 dan berukuran 6

Berdasarkan Gambar 2.2, titik v_5 bertetangga dengan v_1, v_2, dan v_3 atau $N_G(v_5) = \{v_1, v_2, v_3\}$, tetapi titik v_3 tidak bertetangga dengan v_2 dan v_1. Sisi e_2 terkait dengan titik v_1 dan v_5.

Definisi 2.2.3 *Derajat suatu titik* v_i *dalam graf G, dilambangkan "d(*v_i*)" adalah banyaknya sisi* $x \in E(G)$ *yang terkait dengan titik* v_i *atau* $d(v_i) = |N_G(v_i)|$ (Hasmawati, 2020:21).

Contoh 3:

G:



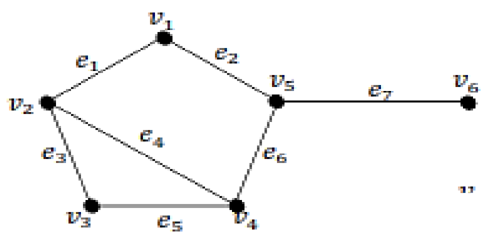
Gambar 2.3 Graf G berorde 5

Berdasarkan Gambar 2.3, untuk titik v_1 derajat yang dimiliki yaitu $d(v_1) = |\{v_4, v_5\}| = 2$, dan untuk titik v_4 derajat yang dimiliki yaitu $d(v_4) = |\{v_1, v_2, v_3\}| = 3$.

Definisi 2.2.4 *Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik V(G)={ $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots, v_n$}, dan himpunan sisi E(G)={ e_i: $e_i = v_i v_j$ $untuk\ \ i, j$}.* ***Jalan*** $\boldsymbol{Wl_k}$ *pada graf G dengan panjang k adalah barisan titik dan sisi: $v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}$, i=0,1,2,...,k-1. Jadi, panjang suatu jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jalan disebut* ***tertutup*** *jika $v_0 = v_k$. Jalan yang setiap sisinya berbeda disebut* ***jalur (trail)****. Jalan tertutup yang setiap titiknya berbeda disebut* **siklus**. *Jika $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \ldots, k\}$, maka W disebut* ***lintasan*** (Hasmawati, 2020:34-35).

Contoh 4:

G:



Gambar 2.4 Graf G berorde 6

Pada Gambar 2.4, himpunan titik yaitu $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi yaitu $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, diperoleh:

1) Graf G memiliki suatu jalan yaitu W:= $\{v_2, e_1, v_1, e_2, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_6, v_5, e_7, v_6\}$.
2) Panjang jalan W adalah 8.

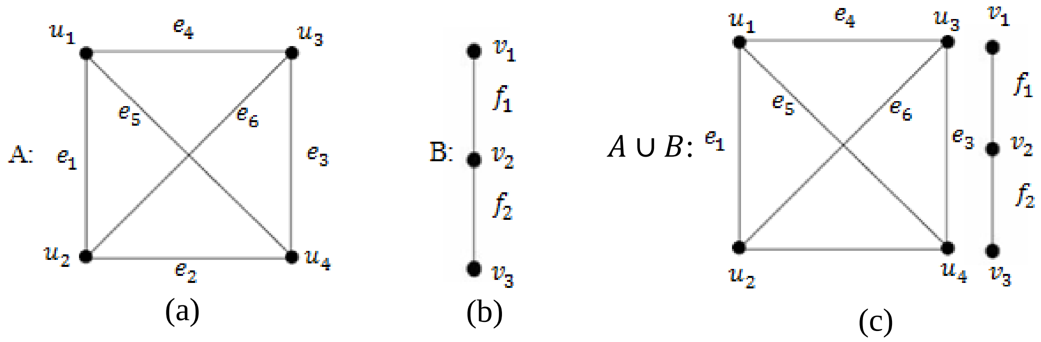
3) Salah satu jalur pada graf G adalah $v_6, e_7, v_5, e_2, v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_5, v_2$.
4) Salah satu lintasan pada graf G adalah $v_2, e_1, v_1, e_2, v_5, e_7, v_6$.
5) Salah satu siklus pada graf G adalah $v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_4, v_2$.

2.3 Operasi Gabung (Union) Pada Graf

Operasi graf yang akan digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah operasi gabung pada graf.

Definisi 2.3.1 *Misalkan A adalah graf dengan himpunan titik V(A) dan himpunan sisi E(A) dan B adalah graf dengan himpunan titik V(B) dan himpunan sisi E(B). Maka, graf gabung (union graph) antara A dan B ditulis $A \cup B$, adalah graf dengan himpunan titik $V(A \cup B) = V(A) \cup V(B)$ dan himpunan sisi $E(A \cup B) =$* $E(A) \cup E(A)$ (Hasmawati, 2020:28).

Contoh 5:



Gambar 2.5 (a) Graf A, (b) Graf B, dan (c) Graf $A \cup B$

Berdasarkan Gambar 2.5(a), himpunan titik graf A yaitu $V(A) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan sisinya yaitu $E(A) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dan pada Gambar 2.5(b) himpunan titik graf B yaitu $V(B) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisinya yaitu $E(B) = \{f_1, f_2\}$, sedangkan pada Gambar 2.5(c) diperoleh gabungan dari graf A dan graf B dengan himpunan titik yaitu $V(A \cup B) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisinya yaitu $E(A \cup B) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, f_1, f_2\}$.

2.4 Jenis-jenis Graf

Dalam graf terdapat berbagai jenis graf yang telah dikelompokkan secara khusus. Adapun beberapa jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

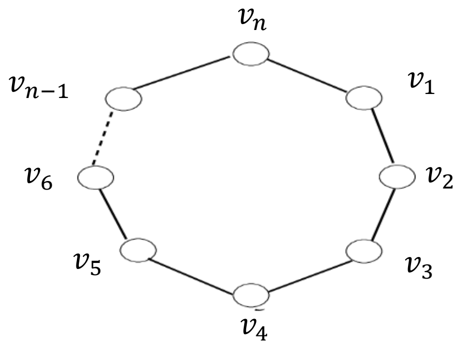
Definisi 2.4.1 *Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dinotasikan dengan P_n apabila berorde n* (Hasmawati, 2020:43).

Graf lintasan P_n ditunjukkan pada Gambar 2.6.

Gambar 2.6 Graf lintasan P_n

Definisi 2.4.2 *Misalkan $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang n-1. Siklus C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik V(C_n)=V(P_n) dan himpunan sisi E(C_n) $= E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$* (Hasmawati, 2020:43).

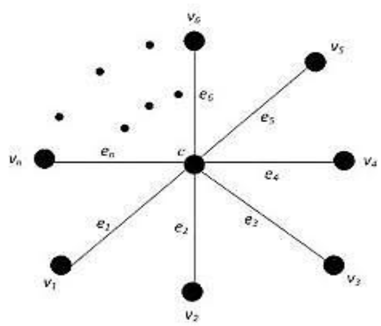
Graf sikus C_n ditunjukkan pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf Siklus C_n

Definisi 2.4.3 *Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n-1 dan n-1 titik berderajat satu* (Hasmawati, 2020:98).

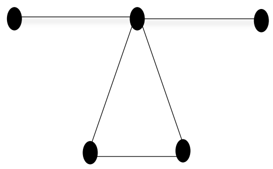
Graf bintang S_n ditunjukkan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf Bintang S_n

Definisi 2.4.4 *Graf unisiklik adalah graf terhubung yang memuat tepat satu lingkaran* (Gallian, 2021:13).

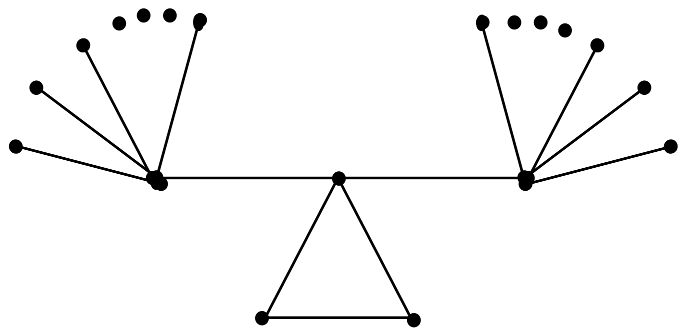
Salah satu contoh graf unisiklik ditunjukkan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf unisiklik

Definisi 2.4.5 *Graf Timbangan $S_{1,r}(C_3)$ (Graf timbangan C_3 sebagai tumpuan timbangan, dengan satu buah graf S_r di kanan dan kirinya sebagai lengan timbangan) adalah gabungan graf C_3 (graf lingkaran dengan 3 buah simpul) dengan 2 graf bintang S_r (graf bintang dengan r buah simpul), dimana antara pusat S_r, C_3, dan pusat S_r yang lain dihubungkan dengan sebuah lintasan* (Sari, dkk., 2013).

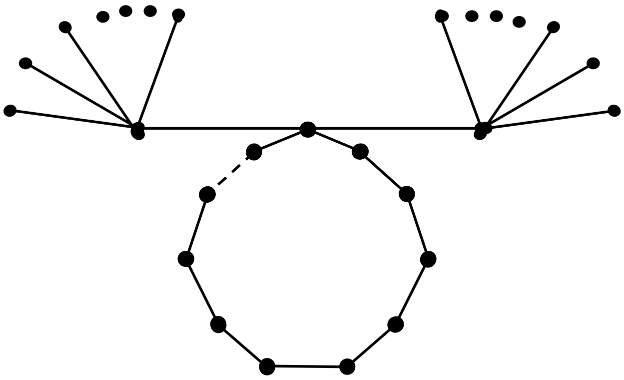
Adapun bentuk umum graf timbangan $S_{1,r}(C_3)$ akan ditunjukkan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf timbangan $S_{1,r}(C_3)$

Definisi 2.4.6 *Graf Timbangan yang diperumum $S_{1,r}(C_n)$ adalah gabungan graf sikel C_n untuk $n > 3$ dengan 2 graf bintang S_r (graf bintang dengan r buah simpul), dimana antara pusat S_r, C_n, dan pusat S_r yang lain dihubungkan dengan sebuah lintasan.*

Adapun bentuk umum dari graf timbangan yang diperumum $S_{1,r}(C_n)$ akan ditunjukkan pada Gambar 2.11.

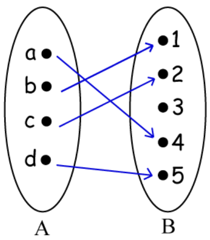


Gambar 2.11 Graf Timbangan yang diperumum $S_{1,r}(C_n)$

2.5 Pemetaan

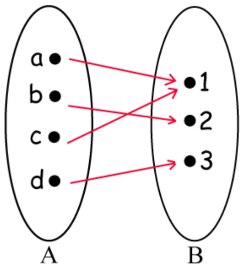
Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A ke tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan $f: A \to B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan (kodomain). Secara umum, pemetaan dibagi menjadi 3 golongan yang diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.5.1 *Pemetaan* $f: A \to B$ *disebut injektif jika dan hanya jika* $\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$



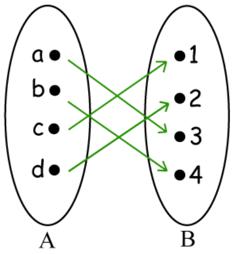
Gambar 2.12 Pemetaan injektif

Definisi 2.5.2 *Pemetaan* $f: A \to B$ *disebut surjektif jika dan hanya jika* $\forall y \in B, terdapat\ x \in A\ sedemikian\ sehingga\ y = f(x)$



Gambar 2.13 Pemetaan surjektif

Definisi 2.5.3 *Suatu pemetaan disebut korespondensi satu-satu (bijektif) jika pemetaan tersebut merupakan pemetaan injektif dan pemetaan surjektif.*



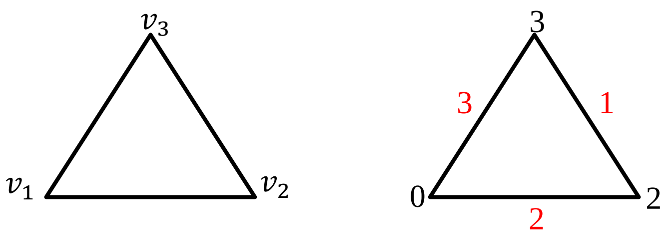
Gambar 2.14 Pemetaan bijektif

2.6 Pelabelan Graceful

Menurut W.D. Wallis (2001:11), pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf (titik atau sisi) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat tak negatif). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labelling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) dan jika domain dari fungsi adalah gabungan himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Definisi 2.6.1 *Misal G(V,E) suatu graf dan f : V(G) →* $\{0,1,2,\ldots,|E(G)|\}$*. Graf G disebut memiliki pelabelan graceful jika f adalah suatu fungsi injektif dan* $|f(x)-f(y)|$ *berbeda untuk setiap sisi* $xy \in E(G)$*. Suatu graf yang dapat dilabeli secara graceful disebut graf graceful* (Gallian, 2021:5).

Adapun pelabelan graceful pada graf sikel (C_3) yang diberikan pada Gambar 2.15.



Gambar 2.15 Pelabelan graceful graf sikel C_3

Jika pelabelan pada diatas diubah menjadi fungsi, maka diperoleh

$$f(v_1)=0 \qquad f(v_2)=2 \qquad f(v_3)=3$$

Sebagai akibat dari pelabelan titik diatas maka diperoleh:

$$|f(v_1)-f(v_2)|=|0-2|=2$$

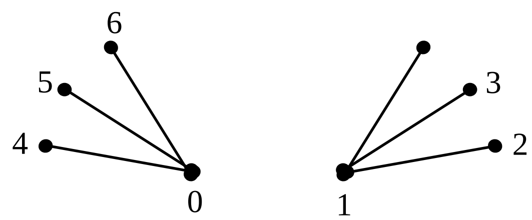
$|f(v_2) - f(v_3)| = |2 - 3| = 1$

$|f(v_3) - f(v_1)| = |3 - 0| = 3$

Karena $f: V \to \{0,1,2,3\}$ injektif dan $|f(x) - f(y)|$ berbeda untuk setiap $xy \in E(C_3)$ maka graf sikel C_3 memiliki pelabelan graceful. Oleh karena itu, graf sikel C_3 merupakan graf graceful.

Pada pelabelan graceful setiap titik diberikan label dari $0,1,2, \ldots, |E(G)|$, maka terdapat $|E(G)| + 1$ nilai untuk melabelkan setiap titiknya. Pada graf yang memiliki $|V(G)| < |E(G)| + 1$, tidak semua label yang ada harus digunakan (Rosa, 1967:349-355). Sebagai contoh graf sikel (C_3) yang diberikan pada Gambar 2.15 terlihat bahwa label 1 tidak digunakan dalam melabelkan titik pada graf C_3.

Pelabelan graceful tidak mungkin dikonstruksikan pada graf yang memiliki $|V(G)| > |E(G)| + 1$. Contohnya gabungan duah buah graf bintang S_4 pada Gambar 2.16.



Gambar 2.16 Gabungan dua buah graf bintang S_4

Graf pada Gambar 2.16 memiliki $|V(G)| = 8$ dan $|E(G)| = 6$ sehingga titiknya akan diberi label dari $\{0,1,2, \ldots, 6\}$. Dapat dilihat bahwa terdapat satu titik yang tidak memiliki label. Jadi, dapat disimpulkan bahwa graf dengan $|V(G)| > |E(G)| + 1$ tidak memiliki pelabelan graceful.