PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF PRISMA SEGITIGA

SKRIPSI

AKIDAH AMALIAH

H011181304

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

FEBRUARI 2023

PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF PRISMA SEGITIGA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

AKIDAH AMALIAH

H051181003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
FEBRUARI 2023

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma Segitiga

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun

Makassar, 17 Februari 2023

Akidah Amaliah
NIM H011181304

LEMBAR PENGESAHAN

PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF PRISMA SEGITIGA

Disusun dan diajukan oleh:

AKIDAH AMALIAH

H011181304

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 17 Februari 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.
NIP. 19680601 199512 2 001

Pembimbing Pertama

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si
NIP. 19700807 200003 1 002

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji hanya milik Allah *Subhanallahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya yang telah diberikan kepada penulis sampai saat ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada baginda Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wa sallam*. *Alhamdulillaahirobbil'aalamiin*, berkat rahmat dan kemudahan yang diberikan oleh Allah *Subhanallahu Wa Ta'ala*, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma Segitiga**" sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis telah melewati perjuangan panjang dan pengorbanan yang tidak sedikit. Namun berkat rahmat dan izin-Nya serta dukungan dari berbagai pihak yang turut membantu sehingga akhirnya tugas akhir ini dapat terselesaikan di waktu yang terbaik menurut Allah swt. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setinggi-tingginya dan penghargaan yang tak terhingga kepada **Ayahanda M.Arafah** dan **Ibunda Maryam J.** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dengan limpahan cinta, kasih sayang dan doa yang tak henti dilangitkan kepada penulis, kakak penulis yaitu **Yahya Arafah** serta adik-adik tercinta penulis yaitu **Intan Nuraini** dan **Nurul Marhama** yang selalu menyemangati dan mendoakan penulis, serta seluruh keluarga besar penulis yang selalu mendoakan dan memberikan bantuan baik dalam bentuk moral ataupun material.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin berserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.

3. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika sekaligus pembimbing pertama penulis yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, pengetahuan, motivasi dan bimbingan di tengah kesibukannya..
4. **Ibu Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing utama penulis yang telah ikhlas meluangkan waktu dan pemikirannya untuk memberikan arahan, pengetahuan, motivasi dan bimbingan di tengah kesibukannya.
5. **Ibu Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.** dan **Ibu Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku tim penguji yang telah memberikan saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penyusunan tugas akhir ini.
6. **Bapak/Ibu Dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas** atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah diberikan kepada penulis.
7. **Jeki, Nando** dan **Snuf** yang menjadi pembimbing kedua penulis. Terimakasih telah mendengarkan masalah-masalah penulis dan memberikan solusi dalam megerjakan tugas akhir ini.
8. Sahabat “KOSER”, **Juni, Vivi**, **Ica,** dan **Pitto** yang selalu ada dalam setiap keadaan. Terimakasih telah menjadi sahabat terbaik yang senantiasa mengajak ke jalan yang benar, memberikan motivasi, doa dan semangat dalam mengerjakan tugas akhir ini.
9. Sahabat terbaik penulis, **Nanas** yang juga selalu menemani penulis dalam setiap keadaan, mengajarkan arti kuat dan terus bertahan serta membuka sudut pandang penulis.
10. **Kak Dandung** yang selalu memberikan semangat dan membantu penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini.
11. Teman-teman **INTEGRAL 2018**, terkhusus kepada **Lutfi, Jalil, ail, Ell, Fatur, Fuad, Irfan ,Marsya, Ninis, Ikki, Ana, Afni, Aqiela** dan **Hijrah** Terimakasih telah memberikan warna dalam dunia perkuliahan dan mengajarkan arti persaudaraan. Pengalaman berharga telah penulis dapatkan dari teman-teman selama berproses bersama.
12. Keluarga besar **HIMATIKA FMIPA UNHAS**, terimakasih atas seluruh pengalaman, pembelajaran serta telah menjadi keluarga penulis selama masa perkuliahan.

13. **Keluarga Mahasiswa FMIPA Unhas**, terima kasih untuk cerita, pengalaman dan ilmu yang sangat berharga selama penulis berproses di KMF. Terkhusus kepada **Pengurus BEM FMIPA Unhas Periode 2021/2022** semoga selalu dengan slogan "Takkan Pudar".
14. Teman-teman **Matematika 2018** terima kasih atas kebersamaan selama menjalani pendidikan di Departemen Matematika. Terkhusus kepada **Dhea** dan **Cica** yang selalu membantu penulis selama perkuliahan.
15. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih setinggi-tingginya untuk segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis semoga bernilai ibadah di sisi Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam skripsi ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga tulisan ini memberikan manfaat untuk pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Makassar, 17 Februari 2023

Akidah Amaliah

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Akidah Amaliah
NIM	: H011181304
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif** (***Non-exclusive Royalty- Free Right***) atas tugas akhir saya yang berjudul:

"Pelabelan Rata-Rata pada Graf Prisma Segitiga"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal, 17 Februari 2023

Yang menyatakan

(Akidah Amaliah)

ABSTRAK

Pelabelan rata-rata adalah sebuah pemetaan yang bersifat injektif yang memetakan titik di graf dengan bilangan bulat *f: V(G)→ {0,1,2,…,q}* dimana q adalah banyaknya sisi sedemikian sehingga label sisi $f^*(uv) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$ berbeda. Graf yang memiliki pelabelan rata-rata disebut graf rata-rata. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan pola pelabelan sedemikian sehingga graf prisma segitiga adalah graf rata-rata. Dalam menentukan pola pelabelan pada graf prisma segitiga $(\mathrm{P}_{3,n})$ dilakukan dengan memberi pelabelan titik pada graf prisma segitiga $(\mathrm{P}_{3,1})$ sampai $(\mathrm{P}_{3,15})$. Hasil yang diperoleh yaitu graf prisma segitiga $(\mathrm{P}_{3,n})$ adalah graf rata-rata untuk setiap n bilangan bulat positif.

Kata Kunci: Graf prisma segitiga, Pelabelan rata-rata, Graf rata-rata.

ABSTRACT

The mean labeling is an injective mapping that maps points in the graph with integer f: V(G)→ {0,1,2,…,q} where q *is the number of edges such that the edge labels* $f^*(uv) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$ *different. A graph that has an mean label is called an mean graph. This study aims to determine the labeling pattern so that the triangular prism graph is the mean graph. In determining the labeling pattern on the triangular prism graph* $(\mathrm{P}_{3,n})$ *is done by labeling the points on the triangular prism graph* $(\mathrm{P}_{3,1})$ *to* $(\mathrm{P}_{3,15})$*. The result obtained is that the triangular prism graph* $(\mathrm{P}_{3,n})$ *is the mean graph for every* n *positive integers.*

Keywords*: Triangular prism graph, Mean labeling, Mean graph.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf awal mulanya berasal dari solusi masalah jembatan Konigsberg yang terletak diseberang sungai Pregolya yang diperkenalkan oleh ahli matematika terkenal dari Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Dalam karyanya yang berjudul “Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis”, Euler menjawab teka-teki jembatan Konigsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Konigsberg mempunyai 7 buah jembatan dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama tidak dapat dilakukan. Sekeras apapun penduduk kota mencoba, tidak ada yang dapat berjalan di rute yang melintas setiap jembatan ini tepat satu kali. Euler menyederhanakan jembatan Konigsberg dengan merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi.

Graf adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya di sebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan-pasangan anggota V yang disebut sisi.

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf yang diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1960. Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf dengan bilangan bulat. Jika domain pemetaan adalah himpunan titik maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain pemetaan adalah himpunan sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Jika domain pemetaan adalah himpunan sisi dan titik maka pelabelan disebut pelabelan total. Hingga saat ini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, salah satunya adalah pelabelan rata-rata.

Konsep pelabelan rata-rata diperkenalkan oleh Somasundaram dan Ponraj. Pelabelan rata-rata adalah sebuah pemetaan yang bersifat injektif yang memetakan titik di graf dengan bilangan bulat $f\colon V(G) \to \{0,1,2,\ldots,q\}$ dimana q adalah banyaknya sisi sedemikian sehingga label sisi $f^*(uv) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$ berbeda.

Pelabelan rata-rata telah dibahas dalam beberapa jurnal diantaranya, A. Lourdusam, dkk. (2011) yang membahas tentang pelabelan rata-rata pada graf *cyclic snakes.* Revathi (2013), membahas tentang pelabelan rata-rata pada beberapa graf. Gayathri dan Sulochana (2017), membahas tentang pelabelan rata-rata pada graf tidak terhubung. Kaneria dan Meghpara (2015), membahas tentang pelabelan rata-rata pada beberapa graf siklus.

Dari beberapa hasil penelitian diatas, masih minim dikaji oleh para peneliti mengenai pelabelan rata-rata pada graf, sehingga penulis tertarik untuk mengkaji pelabelan rata-rata pada graf yang belum dikaji sebelumnya seperti pada graf prisma segitiga yang dituangkan dalam judul skripsi ini.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pola pelabelan rata-rata pada graf prisma segitiga.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya mengkaji pelabelan rata-rata pada graf prisma segitiga $(P_{3,n})$ dimana n adalah bilangan bulat positif.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pola pelabelan sedemikian sehingga graf prisma segitiga adalah graf rata-rata.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

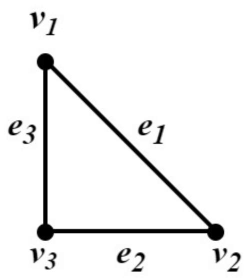
1. Menambah wawasan mengenai teori graf, khususnya pelabelan rata-rata.
2. Sebagai media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.
3. Menjadi pustaka bagi matematikawan yang ingin membahas mengenai pelabelan rata-rata.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf

Teori graf pertama kali di perkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Graf dinotasikan dengan *G*, himpunan titik di graf *G* dinyatakan dengan *V(G)* dan himpunan sisi di graf *G* dinyatakan dengan *E(G).* Secara formal definisi graf dituliskan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 *Graf adalah pasangan himpunan* (V, E) *, dengan* V *adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota* V *yang disebut sisi. Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut: Graf G = (V(G),E(G)) dengan V(G)={u:u disebut titik} dan E(G)={(u,v):u,v ϵ V(G)}* (Hasmawati, 2020).



Gambar 2. 1 Graf *G*

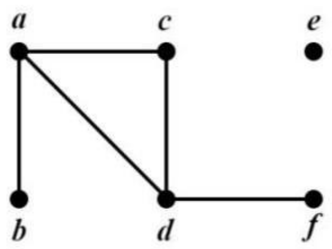
Pada Gambar 2.1 himpunan titik pada graf *G* adalah $\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$ dan $e_3 = v_1v_3$.

2.2 Terminologi Dasar Graf

Dalam teori graf, terdapat beberapa istilah yang sering digunakan yang berkaitan dengan graf. Berikut beberapa terminologi dasar graf.

Definisi 2.2.1 *Banyaknya anggota V(G) dari suatu graf di sebut orde, sedangkan banyaknya anggota E(G) dari suatu graf di sebut ukuran (size)* (Hasmawati, 2020).

Definisi 2.2.2 *Derajat suatu titik* v_i *dalam graf G, dilambangkan "d(*v_i*)" adalah banyaknya sisi* $x \epsilon E(G)$ *yang terkait dengan titik v. Derajat minimum dari suatu* *graf G dinotasikan dengan* $\delta(G)$, *yaitu* $\delta(G) = min\ \{d(v): v \in V(G)\}$ *dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan dengan* Δ*(G), yaitu* $\Delta(G) = max\ \{d(v): v \in V(G)\}$ (Hasmawati, 2020).



Gambar 2. 2 Graf *G*

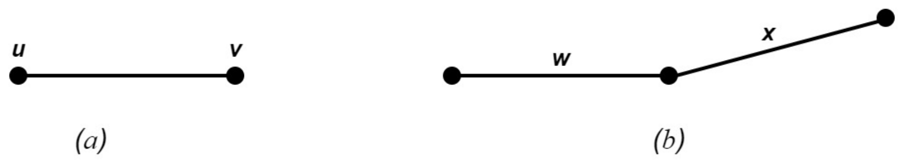
Pada Gambar 2.2 derajat titiknya adalah:

d(a)= 3   *d(b)= 1*   *d(c)= 2*

d(d)= 2   *d(e)= 0*   *d(f)= 1.*

Dari derajat titik tersebut dapat disimpulkan bahwa derajat titik minimum pada Gambar 2.2 tersebut adalah *δ(G)= 0* dan derajat titik maksimum adalah Δ*(G)=3* (Rahayuningsih, 2018).

Definisi 2.2.3 *Dua titik u dan v dari graf G bertetangga jika ada sisi uv yang menghubungkannya, kemudian titik u dan v dikatakan bersisian dengan sisi tersebut. Demikian pula dua sisi berlainan w dan x bertetangga jika mereka mempunyai titik yang sama* (Wilson,1996).



Gambar 2. 3 (*a*) Titik Bertetangga, (*b*) Sisi Bertetangga

Pada Gambar 2.3 (*a*) titik *u* bertetangga dengan titik *v* karena terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut sedangkan pada gambar (*b*) sisi *w* bertetangga dengan sisi *x* karena kedua sisi tersebut mempunyai titik yang sama.

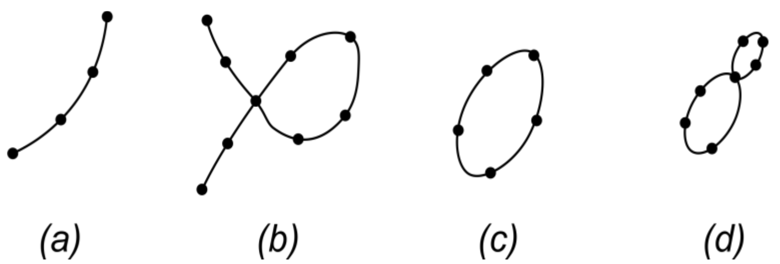
Definisi 2.2.4 *Jalan (walk) pada graf G didefinisikan sebagai barisan titik dan sisi berhingga yang berselang-seling dengan bentuk:*

$$W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3 \ldots v_{n-1}, e_n, v_n.$$

Jalan pada graf dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga:

1. Setiap sisi e_i bersisian dengan v_{i-1} dan v_i.
2. Tidak ada sisi yang muncul lebih dari satu kali dalam sebuah jalan.
3. Sebuah titik mungkin muncul lebih dari satu kali.
4. Sebuah titik dianggap sebagai jalan yang panjangnya 0.

Jalan yang memiliki v_0 sebagai titik awal dan v_n sebagai titik akhir disebut jalan dari v_0 ke v_n atau secara singkat jalan $v_0 - v_n$. Jika titik dari jalan tersebut berlainan maka disebut lintasan. Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama di sebut siklus (Vasudev, 2006).

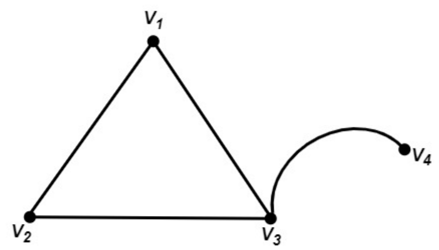


Gambar 2. 4 Jalan *(walk)*

2.3 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penelitian ini.

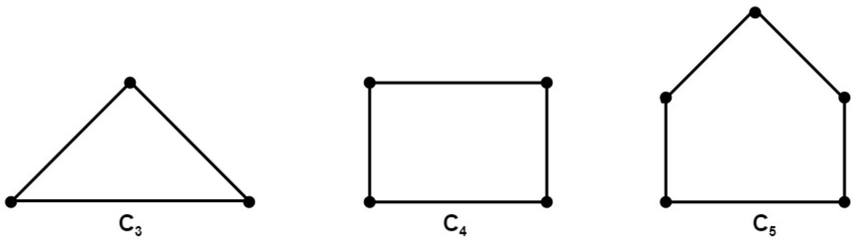
Definisi 2.3.1 *Graf G dikatakan sederhana jika setiap sisi* $uv = vu$ *dan* $u \neq v$ *untuk setiap u,v ϵ V(G)* (Hasmawati, 2020).



Gambar 2. 5 Graf Sederhana

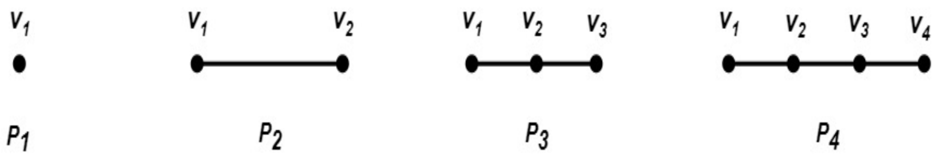
Graf sederhana merupakan graf yang tidak mempunyai loop atau sisi ganda. Loop yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama sedangkan dua titik yang dihubungkan lebih dari satu sisi disebut sisi ganda.

Definisi 2.3.2 *Graf siklus dengan panjang n adalah graf dengan n titik* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *dan sisi* $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. *Graf siklus dengan n titik disimbolkan dengan* C_n *dimana setiap titiknya berderajat 2 dan n ≥ 3* (Vasudev, 2006).



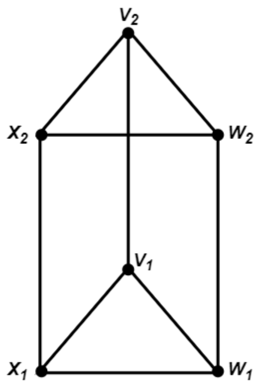
Gambar 2. 6 Graf Siklus

Definisi 2.3.3 *Graf lintasan dengan panjang n adalah graf dengan n titik* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *dan sisi* $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$. *Graf lintasan dengan n titik disimbolkan dengan* P_n (Chartrand dan Zhang, 2012).



Gambar 2. 7 Graf Lintasan

Definisi 2.3.4 *Graf prisma adalah graf hasil kali kartesius* $C_m \times P_n$, *dimana* C_m *graf lingkaran dengan* m *titik dan* P_n *adalah sebuah lintasan dengan n titik. Graf prisma dinotasikan dengan* $P_{m,n}$ (Hartina, 2018).

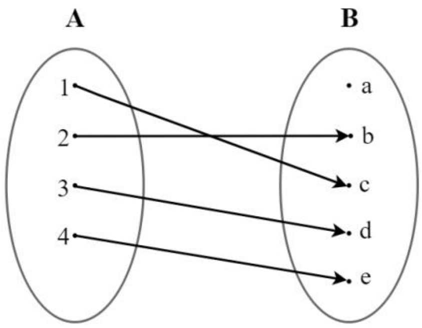


Gambar 2. 8 Graf Prisma *($P_{3,2}$)*

2.4 Pemetaan

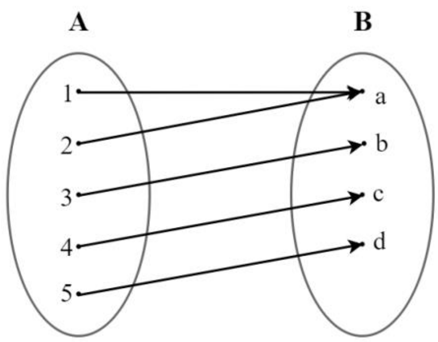
Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A ke tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan $f : A \to B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan (kodomain). Secara umum pemetaan dibagi menjadi 3 macam sebagai berikut:

Definisi 2.4.1 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah sebuah pemetaan dari A ke B. Pemetan* f *disebut injektif jika untuk setiap* $x_1 \neq x_2$ maka $f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$.



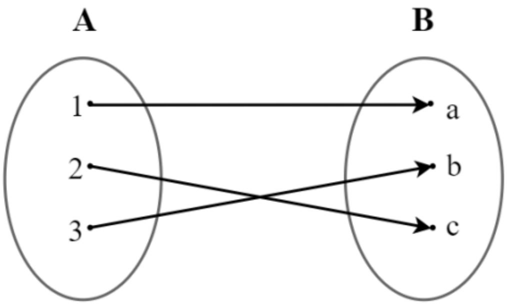
Gambar 2. 9 Pemetaan Injektif

Definisi 2.4.2 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah sebuah pemetaan dari A ke B. Pemetaan f disebut surjektif jika* $f(A) = B$*; yaitu jika range* $R(f) = B$.



Gambar 2. 10 Pemetaan Surjektif

Definisi 2.4.3 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah sebuah pemetaan dari A ke B. Pemetaan f disebut bijektif jika pemetaan f merupakan pemetaan injektif dan surjektif* (Bartle dan Sherbert 2011).



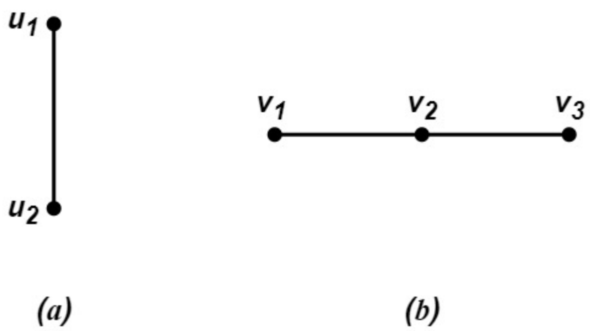
Gambar 2. 11 Pemetaan Bijektif

2.5 Perkalian kartesius

Dalam matematika, kita selalu mencoba untuk mendapatkan struktur baru dari sesuatu. Ini juga berlaku untuk bidang graf, dimana kita dapat menghasilkan banyak graf baru dari kumpulan graf tertentu. Salah satu cara untuk menghasilkan graf baru adalah dengan menggunakan operasi perkalian kartesius. Pada subbab ini akan dibahas operasi perkalian kartesius pada graf.

Definisi 2.5.1 *Hasil kali kartesius dua graf G dan H dilambangkan dengan* $G \times H$ *adalah sebuah graf dengan himpunan titik* $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, *yaitu himpunan* $\{(g,h) | g \in V(G), h \in V(H)\}$ *dan himpunan sisi* $G \times H$ *terdiri dari semua pasangan* $\{(g_1,h_1),(g_2,h_2)\}$ *dari titik dengan* $(g_1,g_2) \in E(G)$ *dan* $h_1 = h_2$ *atau* $g_1 = g_2$ *dengan* $(h_1,h_2) \in E(H)$ (Hedge dan Dara, 2016).

Misalkan diberikan graf P_2 dan P_3 sebagai berikut:



Gambar 2. 12 (a) Graf P_2 dan (b) Graf P_3

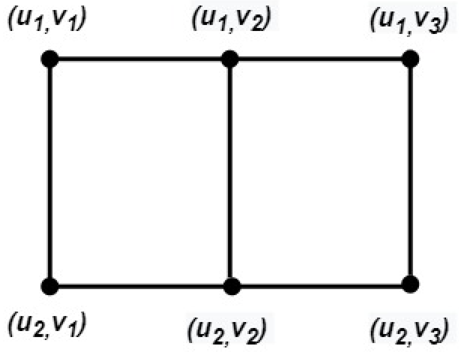
Himpunan titik pada graf P_2 adalah $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(P_2) = \{u_1u_2\}$, sedangkan himpunan titik pada graf P_3 adalah $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(P_3) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$. Perkalian kartesius dari graf P_2 dengan P_3 adalah $P_2 \times P_3$ dengan himpunan titik sebagai berikut:

$$V(P_2 \times P_3) = \{(u_i, v_j)\}|u_i \epsilon\, V(P_2)\ \forall i\ \epsilon\ \{1,2\}\ dan\ v_j\ \epsilon\ V(P_3)\ \forall i\ \epsilon\ \{1,2,3\}.$$

Himpunan sisinya adalah:

$$E(P_2 \times P_3) = \{(u_1, v_1)(u_1, v_2), (u_1, v_2)(u_1, v_3), (u_1, v_1)(u_2, v_1),$$
$$(u_1, v_2)(u_2, v_2), (u_1, v_3)(u_2, v_3), (u_2, v_1)(u_2, v_2), (u_2, v_2)(u_2, v_3)\}.$$

Titik (u_1, v_1) bertetangga dengan (u_1, v_2) karena $u_1 = u_1$ dan $(v_1, v_2)\ \epsilon\ E(P_3)$ demikian juga dengan (u_1, v_2) bertetangga dengan (u_1, v_3) karena $u_1 = u_1$ dan $(v_2, v_3)\ \epsilon\ E(P_3)$. Graf $P_2 \times P_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 13 Graf $P_2 \times P_3$

2.6 Pelabelan Rata-Rata

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf yang diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1960. Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan rata-rata yang digunakan pada tugas akhir ini.

Definsi 2.6.1 *Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf dengan bilangan bulat* (Kurniasari dan Heri, 2010).

Jika domain pemetaan adalah himpunan titik maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain pemetaan adalah himpunan sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Jika domain pemetaan adalah himpunan sisi dan titik maka pelabelan disebut pelabelan total.

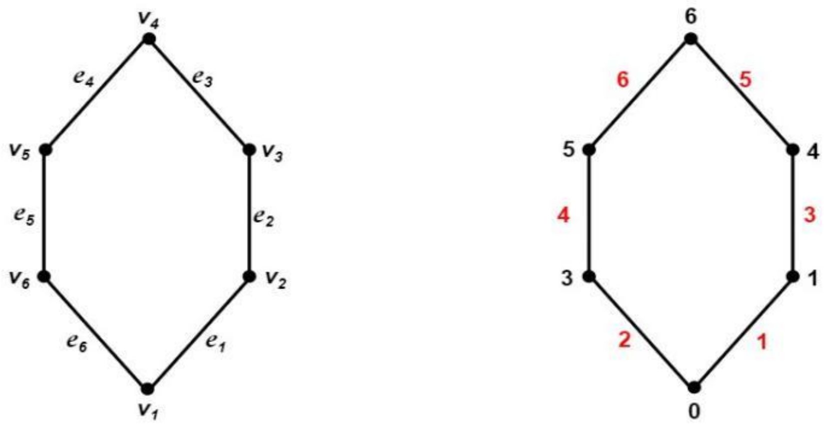
Saat ini sudah banyak jenis pelabelan graf yang dikembangkan. Salah satunya yaitu pelabelan rata-rata. Adapun definisi pelabelan rata-rata secara formal adalah sebagai berikut.

Definsi 2.6.2 *Misal G(V,E) suatu graf dan* $f : V(G) \to \{0,1,2,\ldots,q\}$ *dimana q adalah banyaknya sisi pada G, pemetaan f disebut pelabelan rata-rata pada G jika* f *injektif dan terdapat pemetaan* $f^*: E(G) \to \{1,2,\ldots,q\}$ *didefinisikan sebagai:*

$$f^*(uv) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$$

bijektif untuk setiap uv. Graf dikatakan graf rata-rata jika memiliki pelabelan rata-rata (Maheswari dan Srividya, 2019).

Contoh:



Gambar 2. 14 Pelabelan rata-rata pada graf C_6

Pada Gambar 2.14 graf C_6 dengan label titik sebagai berikut:

$$f(v_1) = 0 \qquad f(v_2) = 1 \qquad f(v_3) = 4$$
$$f(v_4) = 6 \qquad f(v_5) = 5 \qquad f(v_6) = 3.$$

Berdasarkan label titik tersebut dapat dilihat bahwa f bersifat injektif karena setiap anggota domain memiliki pasangan yang berbeda di kodomain. Sebagai akibat maka diperoleh label sisi sebagai berikut:

$$f^*(v_1v_2) = \left\lceil \frac{f(v_1)+f(v_2)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{0+1}{2} \right\rceil = 1$$

$$f^*(v_2v_3) = \left\lceil \frac{f(v_2)+f(v_3)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1+4}{2} \right\rceil = 3$$

$$f^*(v_3v_4) = \left\lceil \frac{f(v_3) + f(v_4)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{4+6}{2} \right\rceil = 5$$

$$f^*(v_4v_5) = \left\lceil \frac{f(v_4) + f(v_5)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{6+5}{2} \right\rceil = 6$$

$$f^*(v_5v_6) = \left\lceil \frac{f(v_5) + f(v_6)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{5+3}{2} \right\rceil = 4$$

$$f^*(v_6v_1) = \left\lceil \frac{f(v_6) + f(v_1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3+0}{2} \right\rceil = 2\,.$$

Berdasarkan label sisi tersebut dapat dilihat bahwa f^* bijektif karena setiap anggota domain memiliki pasangan yang berbeda di kodomain dan range = kodomain , sehingga dapat disimpulkan bahwa graf C_6 adalah graf rata-rata.