DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI *CORONA* GRAF GERGAJI GR_n DENGAN GRAF LENGKAP K_1

SKRIPSI

RIZKY MAULIDDIYAH
H011181015

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
JANUARI 2023

DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI *CORONA* GRAF GERGAJI GR_n DENGAN GRAF LENGKAP K_1

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

RIZKY MAULIDDIYAH
H011181015

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
JANUARI 2023

HALAMAN PENGESAHAN

DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI *CORONA* GRAF GERGAJI GR_n DENGAN GRAF LENGKAP K_1

Disusun dan diajukan oleh:

RIZKY MAULIDDIYAH

H011181015

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 19 Januari 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19711003 199702 2 001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rizky Mauliddiyah
NIM	: H011181015
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi *Corona* Graf Gergaji GR_n dengan Graf Lengkap K_1

Adalah karya tulisan saya sendiri bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 19 Januari 2023

Yang menyatakan,

Rizky Mauliddiyah
NIM. H011181015

KATA PENGANTAR

Segala puji hanya milik Allah *Subhanahu wata'ala*, Pemilik ilmu di langit dan di bumi, Rabb seluruh alam semesta. Syukur Alhamdulillah, atas limpahan anugrah dari-Nya, penulisan tugas akhir yang berjudul "Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi *Corona* Graf Gergaji GR_n Dengan Graf Lengkap K_1" dapat terselesaikan.

Tujuan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada program studi matematika fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam universitas hasanuddin. Dalam penyelesaian skripsi ini proses yang dihadapi penulis sangat panjang, dari tantangan dan hambatan yang datang mulai dari penyusunan hingga skripsi ini dapat dirampungkan. Penyusunan skripsi ini tentunya tidak lepas dari dukungan oleh berbagai pihak, baik dalam bentuk moriil, material, maupun bantuan dalam doa. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih secara tulus dan tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta penulis yaitu ayahanda **Samsul Duha** dan Ibunda **Siti Aisiyah** yang telah mendidik dan manjadi penyokong semangat penulis dengan penuh kasih sayang, kesabaran tak berbatas dan penuh ketulusan hati. Rasa terima kasih kepada dua adikku terkasih Fadil dan Syifa, yang menjadi salah satu alasan penulis tetap bersemangat dalam merampungkan skripsi ini.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang setulus-tulusnya penulis ucapkan kepada:

1. Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si, selaku Ketua Departeman Matematika
2. Prof. Dr. Hasmawati, M.Si, selaku dosen pembimbing utama, terima kasih banyak atas rasa sabar yang telah diberikan dalam membimbing penulis dan waktu, tenaga, pikiran yang telah diluangkan untuk penulis dalam penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math, selaku dosen pembimbing pertama, terima kasih banyak atas waktu, tenaga, pikiran, dan semangat yang telah diberikan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si, dan Ibu Nur Rohmah Oktaviani P., S.Si., M.Si, selaku dosen penguji sekaligus panasehat akademik yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.

5. Seluruh Tenaga Pendidik/Dosen Departemen Matematika yang telah mengajar, membimbing dan mencurahkan ilmunya kepada penulis selama proses perkuliahan.
6. Seluruh Staf Administrasi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin yang telah banyak membantu dan meringankan perihal administrasi dan persuratan selama penulisan skripsi ini.
7. Seluruh sahabat-sahabatku rekan seperjuangan sesama perkuliahan, terima kasih telah menjadi *support system* untuk penulis dengan versi kalian masing-masing.
8. Sahabat-sahabatku PI Solid 2022 dan pembina MPM 2022, *Jazakunnallahu khayran* atas kebersamaan, motivasi, pengalaman dalam mengemban amanah bersama dan pelajaran hidup yang penulis dapatkan.
9. Segenap keluarga UKM KPI Unhas XI, PENDEKAR 2020, Muta'awwinat 2021, dan Ansharullah 2022 UKM LDK MPM Unhas yang telah memberikan banyak hal baru, ilmu baru serta pengalaman yang tak terlupakan bagi penulis.
10. Terimakasih kepada keluarga Matematika 2018 yang telah banyak membantu, menemani penulis semasa perkuliahan.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah membantu penulis dalam merampungkan penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga dengan segala kerendahan hati, penulis berharap adanya kritik dan saran yang bersifat membangun sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat untuk penulis dan para pembaca khususnya bagi Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. *Aamiin Ya Rabbal 'Aalamiin.*

Makassar, 19 Januari 2023

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rizky Mauliddiyah
NIM	: H011181015
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin. **Hak Bebas Royalti Nonekslusif (*Non-exclusif Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi *Corona* Graf Gergaji GR_n dengan Graf Lengkap K_1

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 19 Januari 2023

Yang menyatakan,

(Rizky Mauliddiyah)

ABSTRAK

Dimensi metrik merupakan kardinalitas dari himpunan penentu minimum pada suatu graf G, dinotasikan $\dim(G)$. Penentuan dimensi metrik melibatkan konsep jarak pada suatu graf. Penelitian mengenai topik dimensi metrik menggunakan hasil operasi antara dua buah graf telah banyak diteliti. Dalam Penelitian $\dim(GR_n \odot K_1)$, terlebih dahulu ditentukan dimensi metrik graf gergaji secara umum. Lebih lanjut, akan dikaitkan dengan teorema yang membahas penentuan batas bawah dimensi metrik graf $GR_n \rhd P_2$ yang sebelumnya telah dibuktikan bahwa graf $GR_n \odot K_1$ isomorfik dengan graf $GR_n \rhd P_2$. Penentuan dimensi metrik graf GR_n dan dimensi metrik graf $GR_n \odot K_1$ dilakukan dengan menggunakan metode induksi matematika, sehingga diperoleh $dim(GR_n) = 2$ dan $dim(GR_n \odot K_1) = 2$.

Kata Kunci: *Dimensi Metrik, Graf Gergaji, Isomorfik, Induksi matematika*

Judul	: Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi *Corona* Graf Gergaji GR_n dengan Graf Lengkap K_1
Nama	: Rizky Maulidiyah
NIM	: H011181015
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

The metric dimension of a graph is the cardinality of the minimum defining set in a graph G, denoted by $dim(G)$. The determination of the metric dimension involves the concept of distance in a graph. There have been many studies on the topic of metric dimension using the result of an operation between two graphs. In this research, firstly obtained the metric dimension of saw graphs in general. Following that, the theorem that discuss about determining the lower bound of the metric dimension of graph $GR_n \rhd P_2$ will be used to determine the metric dimension of graph $GR_n \odot K_1$, which later proven that the two graph are isomorphic. The determination of the metric dimension of graph GR_n and the metric dimension of graph $GR_n \odot K_1$ are conducted using the mathematical induction method, so that $dim(GR_n) = 2$ and $dim(GR_n \odot K_1) = 2$ are obtained.

***Keywords**: Metric dimension, Saw graph, Isomorphic, Mathematical Induction.*

Title : *Metric Dimension of Corona Operation Product Graph of Saw Graph GR_n with Complete Graph K_1*

Name : Rizky Mauliddiyah

Student ID : H011181015

Study program : *Mathematic*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

Simbol	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
G	Graf G	1
$dim\ (G)$	Dimensi metrik graf G	1
u	Titik u	1
v	Titik v	1
$d(u,v)$	Jarak antara titik u dan v pada graf G	1
n, m	Nilai yang menunjukkan jumlah	1
$\geq$	Lebih besar dari atau sama dengan	2
P_m	Graf lintasan berorde m	2
$\odot$	Operasi *corona*	2
K_n	Graf lengkap berorde n	2
GR_n	Graf gergaji berorde n	2
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil	4
$\in$	Elemen dari suatu himpunan	4
B	Himpunan B	4
X	Anggota dari suatu himpunan	4
a	Batas atas himpunan B	4
B	Batas bawah himpunan B	4
$\forall$	Untuk setiap	4
$V(G)$	Himpunan titik graf G	4
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	4
(v, w)	Titik v dan titik w yang bertetangga	5
uv	Titik u dan titik v yang bertetangga	5
$\neq$	Tidak sama dengan	5
v_i	Titik ke-i	5
e	Sisi	5
$\mathrm{N_G(v)}$	Himpunan tetangga suatu titik	5
$\lvert\ \rvert$	Kardinalitas himpunan	6
$\delta(G)$	Derajat minimum graf G	6
$\Delta(G)$	Derajat maksimum graf G	6
$deg(v)$	Derajat titik v	7

θ	Pemetaan satu-satu	8
$\cup$	Operasi penggabungan pada himpunan	10
$\{\ \}$	Himpunan kosong	12
H	Graf H	12
$\rhd$	Operasi *comb*	12
S	Himpunan S	13
$\subseteq$	Himpunan bagian dari	13
$r(u\|S)$	Representasi titik u terhadap himpunan S	14
$\leq$	Lebih kecil dari atau sama dengan	14
Cn	Graf Siklus berorde n	15
$\cong$	Isomorfik	17

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu pokok bahasan matematika diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang. Sebagai contoh, dalam pembuatan *game* robotik, graf memegang peranan penting terutama pada penggunaan untuk navigasi, dimana robot harus menerjemahkan titik sebagai lokasi dan jarak sebagai sisi. Dalam teori graf dikenal operasi antara dua graf atau lebih, seperti operasi *corona*, kartesius, gabung, normal, tambah, dan *comb* (Faisal dkk, 2019). Graf sendiri merupakan pasangan himpunan terurut (V, E), dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan-pasangan yang tidak terurut dari anggota V yang disebut sisi (Daming,dkk, 2020). Objek visual dari graf dapat dinyatakan dengan simpul, noktah, bulatan, titik (*vertex*), sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi (*edge*), atau garis.

Salah satu kajian yang terus berkembang dalam teori graf adalah masalah dimensi metrik (*metric dimension*). Konsep dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Slater pada tahun 1975 sebelum akhirnya pada tahun 1976, F. Harary dan R. A. Milter juga mengenalkan konsep dimensi metrik pada artikel yang ditulis yaitu *On the Metric Dimension of A Graph*. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari basis pada suatu graf G yang dinotasikan dengan $\dim(G)$. Penentuan dimensi metrik melibatkan konsep jarak pada graf. Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf terhubung G, jarak dari u ke v adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G yang dinotasikan dengan $d(u,v)$. Dimensi metrik dapat diaplikasikan pada berbagai bidang seperti pemodelan senyawa kimia, navigasi robot, dan pengkodean.

Saat ini, sudah banyak penelitian mengenai topik dimensi metrik seperti pada tahun 2000, Chartrand dkk telah menunjukkan bahwa graf G yang hanya berdimensi 1 ialah graf lintasan. Adapun selanjutnya mereka berhasil mengkarakteristik semua graf G dengan n titik yang mempunyai $dim(G) = n - 1$, dan $\dim(G) = n - 2$. Peneliti lainnya, Bača dkk (2011) telah mengkaji dimensi metrik dari beberapa kelas graf reguler. Pada tahun 2012, Septiana dan Rahadjeng telah menentukan dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit. Khoiriah dan Kusmayadi (2018) telah menentukan dimensi metrik lokal pada graf antiprisma dan graf matahari. Secara berurut dimensi metrik lokal graf antiprisma dengan $n \geq 3$ adalah 3, dan dimensi metrik lokal graf matahari dengan $n \geq 3$ adalah 1 untuk n ganjil dan 2 untuk n genap

Selain itu, Pada tahun 2017, Maya & Kapita telah menentukan dimensi metrik pada hasil operasi *corona* dua buah graf. Selanjutnya, pada tahun 2011, Iswadi dkk melakukan penelitian yang menghasilkan teorema-teorema dalam penentuan dimensi metrik graf hasil operasi *corona* secara umum. Namun, teorema-teorema tersebut tidak dapat digunakan apabila graf yang diambil adalah graf lengkap K_1 dikarenakan ada kondisi yang tidak terpenuhi dimana teorema tersebut mengatakan untuk graf H paling sedikit berorde dua. Selain itu, belum ada penelitian yang membahas mengenai graf gergaji, yaitu suatu graf yang dikonstruksikan dari graf lintasan berorde genap dengan graf trivial. Hal ini membuat peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang melibatkan graf gergaji dan graf lengkap K_1. Penelitian tersebut kemudian dituangkan dalam tugas akhir yang berjudul *"Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Corona Graf Gergaji GR_n dan Graf Lengkap K_1"*.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan dimensi metrik dari graf gergaji GR_n ?
2. Bagaimana menentukan dimensi metrik graf hasil operasi *corona* graf gergaji GR_n dan graf lengkap K_1?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitiaan ini, masalah yang dikaji dibatasi pada graf hasil operasi *corona* graf gergaji berorde $3n + 3$ dengan graf lengkap K_1 berorde $m = 1$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijelaskan, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi dimensi metrik pada graf gergaji GR_n.
2. Menentukan dimensi metrik graf hasil operasi *corona* graf gergaji GR_n dan graf lengkap K_1.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu penulis berharap dapat memberi pengetahuan baru bagi pembaca mengenai topik yang dikaji dan bisa menjadi referensi bagi peneliti yang akan melakukan penelitian kedepannya berkenaan pada teori graf untuk dimensi metrik khususnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab II akan diuraikan tentang landasan materi dari penelitian yang dilakukan, sebagai pendukung hasil akhir dari penelitian tersebut. Adapun bab ini dimulai dengan menjelaskan konsep dasar graf yang berisi definisi-definisi, sifat, teorema dan lemma yang terkait dengan penelitian tersebut. Kemudian, menjelaskan beberapa graf khusus, operasi graf, dimensi metrik dan titik setara dan titik setingkat.

Pada bab ini bahasan yang di uraikan mengacu pada buku, jurnal-jurnal dan artikel yang telah dikumpulkan. Namun secara umum bahasan dari bab ini lebih dominan pada buku pengantar dan jenis-jenis graf.

2.1 Konsep Dasar Graf

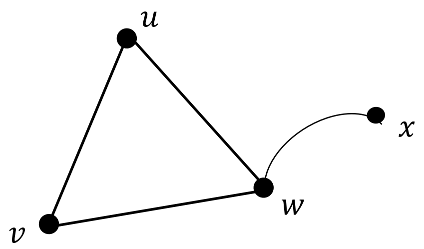
Graf menggunakan konsep himpunan. Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang keanggotaannya dapat didefiniskan dengan jelas. Suatu himpunan dikatakan terbatas jika himpunan tersebut terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Misalkan B subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$. $a \in \mathbb{R}$ disebut batas atas dari B jika $x \leq a, \forall\, x \in B.$ Sebaliknya $b \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah dari B jika $x \geq b, \forall\, x \in B$. Jika B terbatas di atas dan di bawah, maka B dikatakan terbatas (Subhan,2017).

Definisi 2.1.1 *Graf sedehana G adalah pasangan $(V(G)), (E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge).*

Definisi 2.1.2 *Jika terdapat lebih dari satu sisi yang berkaitan dengan sepasang titik pada graf maka sisi tersebut disebut sisi ganda (parallel edges). Loop adalah sisi yang kedua titik ujungnya sama.*

Definisi 2.1.3 *Graf sederhana adalah graf yang tidak memenuhi loop atau sisi-sisi yang paralel. Pada graf sederhana, sebuah sisi dengan titik v dan w dinotasikan dengan (v, w) (Epp,2011).*

Contoh 2.1.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{uv, uw, vw, wx\}$. Berikut graf G seperti pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1 Graf Sederhana G

Pada Gambar 2.1.1 dapat dilihat bahwa $V(G)$ tidak kosong dan berhingga untuk setiap uv di $E(G), uv = vu$ dan $u \neq v$.

Definisi 2.1.4 *Jika terdapat sisi $e = \{u, v\} = \{v, u\} = uv$, maka sisi e dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v disebut titik yang berhubungan langsung atau bertetangga (adjacent). Sedangkan u dan e serta v dan e disebut (incident) (Chartrand & Lesniak, 1996).*

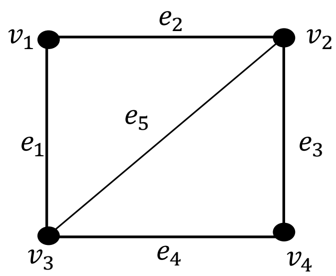
Definisi 2.1.5 *Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i, v_j$, maka dikatakan bahwa :*

1. Titik v_i bertetangga (adjacent) dengan titik v_j.

2. Sisi x terkait (incident) dengan titik v_i, demikian pula untuk titik v_j.

Misalkan $\mathrm{x_1, x_2}$, dan $\mathrm{x_3}$ adalah sisi dari suatu graf G dan v adalah titik graf G. Jika $\mathrm{x_1, x_2}$, dan $\mathrm{x_3}$ terkait dengan simpul v, maka sisi $\mathrm{x_1, x_2}$, dan $\mathrm{x_3}$ dikatakan bertetengga. Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $\mathrm{N_G(v)}$ yang didefinisikan sebagai $\mathrm{N_G(v) = \{u|uv \in E(G)\}}$ (Hasmawati,2020).

Contoh 2.1.2 Diberikan graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Berikut graf G_1seperti pada Gambar 2.1.2.



Gambar 2.1.2 Graf G_1

Pada Gambar 2.1.2 titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3, dan v_4 , tetapi v_4 tidak bertetangga dengan titik v_1. Sisi $e_1$terkait dengan titik v_1 dan titik v_3, sehingga dapat ditulis $N_G(v_1) = \{v_2, v_3\}, N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}, N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}, N_G(v_4) = \{v_2, v_3\}$.

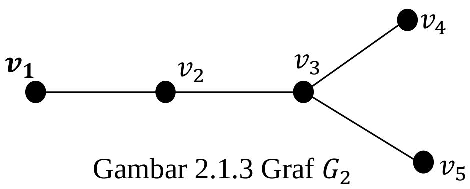
Definisi 2.1.6 *Misalkan $G = (V, E)$ dan V adalah himpunan titik-titik dalam graf G, kardinalitas dari V didefinisikan sebagai banyaknya titik dalam V, dan dinotasikan dengan $|V|$.*

Definisi 2.1.7 *Orde suatu graf adalah banyaknya titik pada graf G.*

Definisi 2.1.8 *Derajat dari titik v pada graf G adalah banyaknya garis di graf G yang terkait dengan v, dinotasikan $deg_G v$ atau $deg\, v$. Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung (Chartrand & Oellerman,1993).*

Derajat minimun dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$ yaitu $\delta(G)$ = min $\{d(v): v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G, dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G)$ = max $\{d(v): v \in V(G)\}$. Suatu graf jika $\delta(G) = \Delta(G)$ maka disebut graf reguler.

Contoh 2.1.3 Diberikan graf terhubung G_2 seperti pada Gambar 2.1.3. Akan ditentukan orde, dan derajat dari graf tersebut.



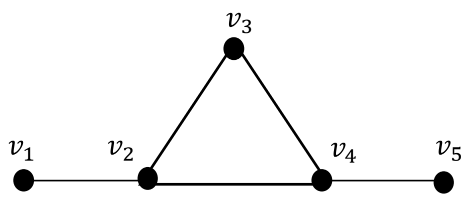
Gambar 2.1.3 Graf G_2

Graf terhubung G_2 pada gambar 2.1.3 memiliki himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5\}$. Berdasarkan pada Definisi 2.1.7 graf G_2 pada Gambar 2.1.3 memiliki orde yaitu 5 titik dan berdasarkan Definisi 2.1.8 untuk derajat graf G_2 adalah $deg(v_1) = 1$, $deg(v_2) = 2, deg(v_3) = 3, deg(v_4) = 1, deg(v_5) = 1$. Derajat minimum dan maksimum graf G_2 berturut-turut yaitu $\delta(G_2) = 1$ dan $\Delta(G_2) = 3$.

Definisi 2.1.9 *Misalkan u dan v adalah dua titik dalam graf G. Jarak titik u dan v ditulis $d(u, v)$ yang memenuhi:*

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, \text{jika } u = v \\ k, \text{jika panjang lintasan } u - v \text{ adalah } k \\ \infty, \text{jika tidak ada lintasan dari } u \ ke \ v. \end{cases}$$

Contoh 2.1.4 Diberikan graf terhubung G_3 seperti pada Gambar 2.1.4. Akan ditentukan jarak dari graf tersebut.

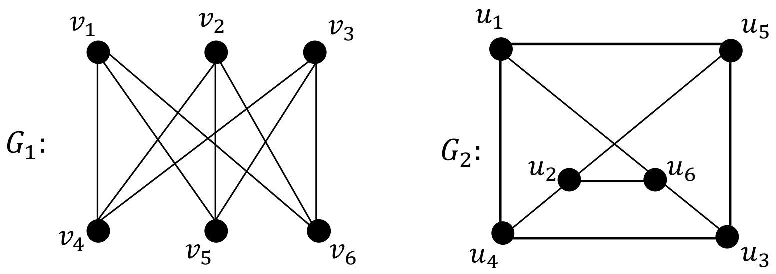


Gambar 2.1.4 Graf G_3

Pada Gambar 2.1.4 graf G_3 dengan himpunan titik titik $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_{4,} v_3v_4, v_4v_5\}$. Berdasarkan Definisi 2.1.9 jarak yang diperoleh dari graf G_3 adalah $d(v_1v_1) = 0$, $d(v_1v_2) = 1$, $d(v_2v_2) = 0$, $d(v_2v_3) = 1$, $d(v_2v_4) = 1$, $d(v_3v_3) = 0$, $d(v_3v_4) = 1$, $d(v_4v_4) = 0$, $d(v_4v_5) = 1$, $d\ (v_5v_5) = 0$.

Definisi 2.1.10 *Diberikan dua graf $(V(G_1), E(G_1))$ dan $\big(V(G_2), E(G_2)\big)$. Suatu pemetaan satu-satu θ dari $(V(G_1)$ ke dalam $(V(G_2)$ dikatakan isomorphismee dari$(V(G_1), E(G_1))$ ke $\big(V(G_2), E(G_2)\big)$, apabila memenuhi untuk setiap $u, v \in V(G_1)$ dengan $(u, v) \in V(G_1)$ jika hanya jika $(\theta(u), \theta(v) \in (G_2)$. Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfisma, jika ada isomorf antara G_1 dan G_2.*

Contoh 2.1.10 Diberikan dua graf G_1 da G_2 pada Gambar 2.1.5 adalah graf yang isomorf.



Gambar 2.1.5 dua graf yang isomorf

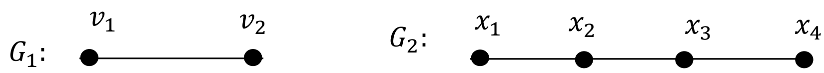
Pada Gambar 2.1.5, G_1 dan G_2 dikatakan isomorf karena terdapat pemetaan satu-satu antara itik-titik graf G_1 dan titik-titik graf G_2, sehingga setiap dua titik yang bertetangga di G_1 yakni prapeta dua titik, dua titik yang merupakan petanya juga bertetangga di G_2. Misalkan diberi dua graf $G_1 = \big(V(G_1), E(G_1)\big)$ dan $G_2 = \big(V(G_2), E(G_2)\big)$, dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ dan $V(G_2) = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}$ seperti pada Gambar 2.1.5. Definisikan pemetaan θ sebagai berikut: $\theta(v_1) = u_1, \theta(v_2) = u_2, \theta(v_3) = u_3, \theta(v_4) = u_4, \theta(v_5) = u_5, \theta(v_6) = u_6$.
Dapat diperiksa bahwa : $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_4) = u_4$ bertetangga, juga v_1 dan v_4 bertetangga; $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_5) = u_5$ bertetangga, juga v_1 dan v_5 bertetagga; $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_6) = u_6$ bertetangga, juga v_1 dan v_6 bertetangga. Demikian pula dengan $\theta(v_2) = u_2$ bertetangga dengan $\theta(v_4) = u_4$, $\theta(v_5) = u_5$, dan $\theta(v_6) = u_6$, juga v_2 bertetangga dengan $v_4, v_{5,}$ dan v_6. Hal yang sama terjadi pada titik v_3. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa setiap $(u, v) \in E(G_1)$ jika hanya jika $(\theta(u), \theta(v) \in (G_2)$. Jadi terdapat isomorfisma antar G_1 dan G_2. Dengan kata lain G_1isomorf dengan G_2.

2.2 Jenis-Jenis Graf Khusus

Terdapat beberapa jenis graf khusus yang digunakan pada tugas akhir berikut ini :

Definisi 2.2.1 *Misalkan P_n : v_1, e_1, v_2, e_2 ... v_{n-1}, e_{en-1}, v_n adalah lintasan berorde n dengan panjang $n - 1$. Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi v_1, e_1, v_2, e_2 ... v_{n-1}, e_{en-1}, v_n dan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n - 1$. Graf yang* *hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan apabila berorde n, dinotasikan dengan P_n. Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan maksimal.*

Contoh 2.2.1 Diberikan graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E(G_1) = \{v_1v_2\}$ serta G_2 dengan $V(G_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E(G_2) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$. Maka $G_1 = P_2$ dan $G_2 = P_4$ seperti pada gambar 2.2.1.

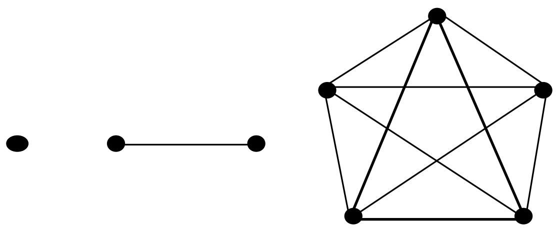


Gambar 2.2.1 Graf Lintasan P_2, P_4

Definisi 2.2.2 *Graf G disebut graf lengkap jika setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n.*

Graf lengkap adalah salah satu graf khusus yang setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, derajat untuk setiap titik pada graf lengkap adalah sama.

Contoh 2.2.2

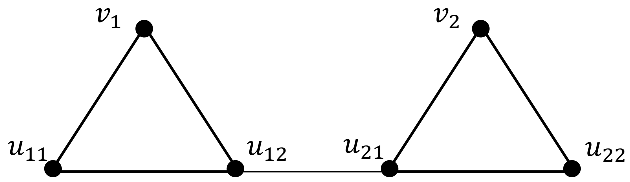


Gambar 2.2.2 Graf Lengkap K_1, K_2, K_5

Definisi 2.2.3 *Misalkan graf lintasan $P_{2(n+1)}$ dengan $V\left(P_{2(n+1)}\right)$ = $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_{2n+1}, u_{2n+2}\}$ dan $V((n+1)K_1)$ = $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$. Graf Gergaji dinotasikan GR_n adalah graf yang berorde $3n+3$ dan memiliki ukuran $4n+3$ dengan himpunan titik $V(GR_n)$ = $V\left(P_{2(n+1)}\right) \cup V((n+1)K_1)$ dan himpunan sisi $E(GR_n)$ = $E\left(P_{2(n+1)}\right) \cup \{u_{2i-1}v_i, u_{2i}v_i\ ; i = 1,2, \ldots, n+1\}$.*

Graf gergaji dapat dikontruksikan melalui lintasan berorde genap dan graf trivial.

Contoh 2.2.3 Diberikan $P_{2(1+1)}$ dengan $V(P_{2(1+1)}) = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}\}$ dan $E(P_{2(1+1)})$ =$\{u_{11}\, u_{12}, u_{12}u_{21}, u_{21}u_{22}\}$ untuk $n = 1$. Graf gergaji GR_1 adalah graf dengan $V(GR_1) = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}\} \cup \{v_1, v_2\}$ dan $E(GR_1) = \{(u_{11}, u_{12}), (u_{12}, u_{21}), (u_{21}, u_{22})\} \cup \{(u_{11}, v_1), (u_{12}, v_1), (u_{21}, v_2), (u_{22}, v_2)\}$. Berikut graf GR_1 seperti pada Gambar 2.2.3.



Gambar 2.2.3 Graf Gergaji GR_1

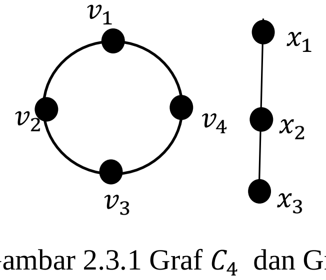
Graf gergaji dapat didefinisikan bahwa setiap dua titik yang bertetangga pada lintasan sebut titik u_{2i-1} dan titik u_{2i} terkait dengan satu titik sebut titik $v_i, i = 1,2,3, \dots, n$.

2.3 Operasi pada Graf

Operasi pada graf merupakan salah satu cara untuk menghasilkan graf baru dengan mengkontruksi graf G dan graf H pada operasi graf yang digunakan**.** Operasi pada graf memiliki beberapa jenis operasi, pada subbab ini diberikan definisi operasi *corona* dan operasi comb.

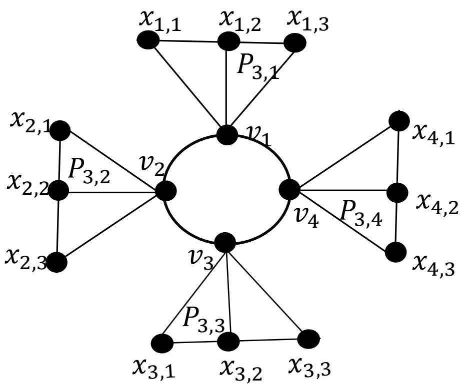
Definisi 2.3.1 *Misalkan G graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m. Graf corona G dan H, dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah menggandakan graf H sebanyak n kali namakan $H_1, H_2, \dots, H_n$, dan mengaitkan setiap titik v_i di G dengan setiap titik di graf H_i, $i = 1,2, \dots, n$.*

Contoh 2.3.1 diberikan graf C_4 dengan $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan graf P_3 dengan $V(P_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$.



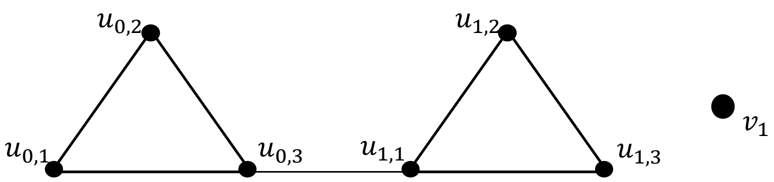
Gambar 2.3.1 Graf C_4 dan Graf P_3

Pada gambar 2.3.1 Graf C_4 dan graf P_3 masing- masing berorde 4 dan 3. Karena graf C_4 memiliki empat titik, sehingga graf P_3 digandakan sebanyak titik yang ada pada graf C_4 misalkan $P_{3,1}, P_{3,2}, P_{3,3}, P_{3,4}$. Namun P_3 yang digandakan sebanyak 4 kali mengakibatkan 3 titik yang sama pada graf $C_4 \odot P_3$, sehingga sulit membedakan titik-titik. Karenanya, dimisalkan $V(P_{3,i}) = \{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$ untuk $i = 1{,}2{,}3{,}4$. dan setiap titik $P_{3,i}$ dikaitkan dengan setiap titik $v_i \in C_4$. Diperoleh graf hasil Corona seperti berikut:



Gambar 2.3.2 Graf hasil operasi $C_4 \odot P_3$

Contoh 2.3.2 Diberikan sebuah graf GR_1 dengan himpunan titik $V(GR_1) = \{u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}, u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}\}$ dan graf K_1 dengan himpunan titik $V(K_1) = \{v_1\}$.

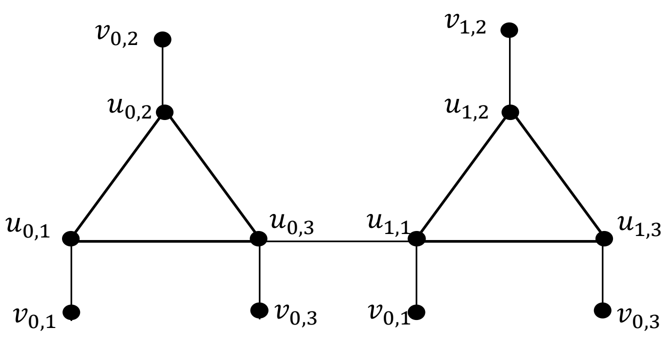


Gambar 2.3.3 Graf Gergaji GR_1 dan Graf Lengkap K_1

Berdasarkan Definisi 2.3.1 dan Contoh 2.3.1 karena graf GR_1 memiliki 6 titik, sehingga graf K_1 digandakan sebanyak 6 kali untuk setiap titik pada graf GR_1. Graf K_1 dimisalkan menjadi $K_{1,i}$ dengan himpunan titik $V(K_{1,i}) = \{v_{ij,1}\}$ untuk $i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$ dan $j = 1{,}2{,}3$ dan mengaitkan setiap titik $u_{i,j}$ di GR_1 dengan setiap titik di $K_{1,i}$. Diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi graf hasil operasi $GR_1 \odot K_1$ yaitu:

$V(GR_1 \odot K_1) = \{u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}, u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, v_{0,1}, v_{0,2}, v_{0,3,}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}\}$.

$E(GR_1 \odot K_1) = \{u_{0,1}\, u_{0,2}, u_{0,2}\, u_{0,3}, u_{0,1}u_{0,3}, u_{0,3}u_{1,1}, u_{1,1}u_{1,2}, u_{12}u_{13}, u_{1,1}u_{1,3},$
$u_{01}v_{0,1}, u_{0,2}v_{0,2}, u_{0,3}v_{0,3}, u_{1,1}\, v_{1,1}, u_{1,2}\, v_{1,2}, u_{1,3}\, v_{1,3}\}$.



Gambar 2.3.4 $GR_1 \odot K_1$

Secara umum himpunan titik dan himpunan sisi untuk graf gergaji GR_n dan graf lengkap K_1 adalah sebagai berikut :

$$V(GR_n) = \{u_{i,j} | i = 0,1,2, \dots, n\, ; j = 1,2,3\}.$$

$$E(GR_n) = \{u_{i,1}u_{i,2}, u_{i,2}u_{i,3}, u_{i,1}u_{i,3}, u_{i,3}u_{i+1,1} | i = 0,1,2, \dots, n\}.$$

$$V(K_1) = \{v_1\}.$$

$$E(K_1) = \{\,\}.$$

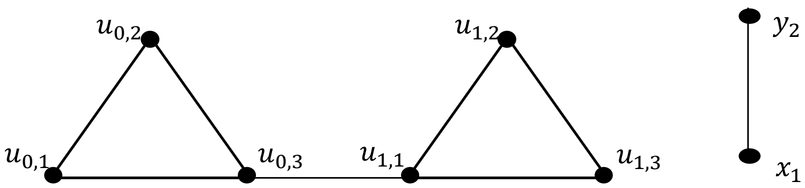
Berdasarkan Definisi 2.3.1 dan Contoh 2.3.2 untuk graf $GR_n \odot K_1$, di mana graf K_1 digandakan sebanyak titik $3n+3$ kali dan dimisalkan $K_{1,i}$ dengan himpunan titik $V(K_{1,i}) = \{v_{ij,1} \mid i = 0,1, \dots, n; j = 1,2,3\}$. Selanjutnya, himpunan titik dan sisi untuk graf $GR_n \odot K_1$ didefinisikan sebagai berikut :

$V\,(GR_n \odot K_1) = \{u_{i,j}, v_{ij,1} | i = 0,1,2, \dots, n\, ; j = 1,2,3\}$.

$E\,(GR_n \odot K_1) = \{u_{i,1}u_{i,2}, u_{i,2}u_{i,3}, u_{i,1}u_{i,3}, u_{i,3}u_{i+1,1}, u_{i,j}v_{i,j} | i = 0,1, \dots, n; j = 1,2,3\}$.

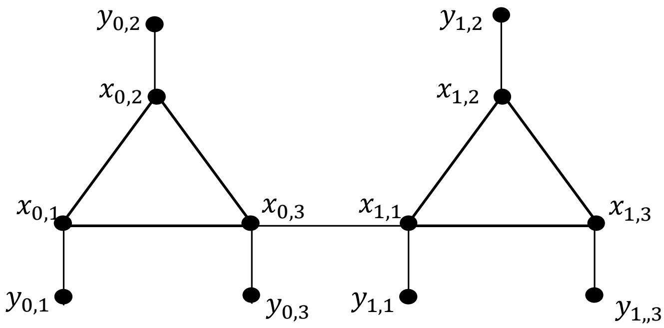
Definisi 2.3.2 *Misalkan G dan H adalah dua graf terhubung. Misalkan o adalah titik di H. Operasi comb antara G dan H, dinotasikan dengan $G \rhd H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian G dan $|V(G)|$ kopian dari H dan meletakkan titik o dari masing-masing graf H kopian ke$-i$ pada titik ke$-i$ dari graf G.*

Contoh 2.3.2 Diberikan sebuah graf GR_1 dengan himpunan titik $V(GR_1) = \{u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}, u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}\}$ dan graf P_2 dengan himpunan titik $V(P_2) = \{x_1, y_2\}$.



Gambar 2.3.5 Graf Gergaji GR_1 dan Graf Lintasan P_2

karena graf GR_1 memiliki $|V(GR_1)|$ =6, sehingga graf P_2 digandakan sebanyak 6 kali untuk setiap titik pada graf GR_1. Graf P_2 dimisalkan menjadi P_2^{ij}dengan himpunan titik $V(P_2^{ij}) = \{x_{i,j}, y_{i,j}\}$ untuk $i = 0,1,2,3,4,5,6$ dan $j = 1,2,3$. Dan meletakkan titik $x_{i,j}$ pada P_2^{ij} ke titik $u_{i,j}$ di GR_1 sehingga $x_{i,j} = u_{i,j}$, maka akan diperoleh graf $GR_1 \rhd P_2$ sebagai berikut:



Gambar 2.3.6 $GR_1 \rhd P_2$

2.4 Dimensi Metrik

Pada sub bab ini akan diuraikan mengenai istilah yang ada pada dimensi metrik sebagai berikut:

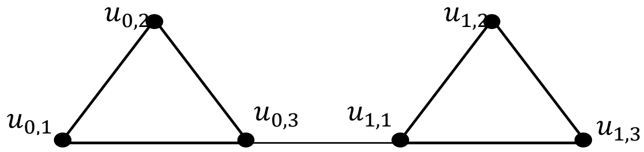
Definisi 2.4.1 *Misalkan $S \subseteq V(G)$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$. Representasi titik $r(v|S)$ dari titik v terhadap S adalah $[d(v, v_1), (v, v_2), (v, v_3), \dots, (v, v_k)]$.*

Definisi 2.4.2 *Himpunan $S \subseteq V(G)$ disebut himpunan penentu jika $r(u|S) \neq r(v|S)$ untuk setiap titik $u, v \in V(G)$ dengan $u \neq v$.*

Definisi 2.4.3 *Himpunan penentu dari G dengan kardinalitas minimum disebut himpunan penentu minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari himpunan penentu minimum disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $dim(G)$.*

Berdasarkan Definisi 2.4.2 himpunan titik $V(G)$ adalah himpunan penentu dari G sehingga himpunan penentu dari G tidak selalu tunggal.

Contoh 2.4.1 Diberikan sebuah graf GR_1 dengan himpunan titik $V(GR_1) = \{u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}, u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}\}$.



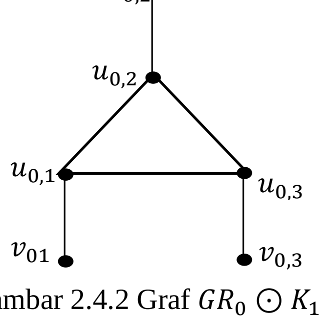
Gambar 2.4.1 Graf GR_1

Pilih $W_1 = \{u_{0,2},\ u_{1,2}\}$, diperoleh representasi semua titik pada graf GR_1 terhadap W_1 yaitu:

$$r(u_{0,1}|W_1) = [d(u_{0,1}, u_{0,2}), d(u_{0,1}, u_{1,2})] = (1,3)$$
$$r(u_{0,2}|W_1) = [d(u_{0,2}, u_{0,2}), d(u_{0,2}, u_{1,2})] = (0,3)$$
$$r(u_{0,3}|W_1) = [d(u_{0,3}, u_{0,2}), d(u_{0,3}, u_{1,2})] = (1,2)$$
$$r(u_{1,1}|W_1) = [d(u_{1,1}, u_{0,2}), d(u_{1,1}, u_{1,2})] = (2,1)$$
$$r(u_{1,2}|W_1) = [d(u_{1,2}, u_{0,2}), d(u_{1,2}, u_{1,2})] = (3,0)$$
$$r(u_{1,3}|W_1) = [d(u_{1,3}, u_{0,2}), d(u_{1,3}, u_{1,2})] = (3,1).$$

Karena semua titik pada graf GR_1 memiliki representasi yang berbeda terhadap W_1, maka W_1 merupakan himpunan penentu bagi graf GR_1. Berdasarkan Definisi dimensi metrik, sehingga $\dim(GR_1) \leq 2$.

Contoh 2.4.2 Diberikan graf G yaitu graf $GR_0 \rhd K_1$ seperti pada Gambar 2.4.2. dengan himpunan titiknya adalah $V(GR_0 \odot K_1) = \{u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}, v_{0,1}, v_{0,2}, v_{0,3}\}$.



Gambar 2.4.2 Graf $GR_0 \odot K_1$

Pilih $W_2 = \{v_{0,2}, v_{0,3}\}$, diperoleh representasi semua titik pada graf $GR_0 \odot K_1$ terhadap W_2 yaitu:

$$r(u_{0,1}|W_2) = [d(u_{0,1}, v_{0,2}), d(u_{0,1}, v_{0,3})] = (2,2)$$
$$r(u_{0,2}|W_2) = [d(u_{0,2}, v_{02}), d(u_{0,2}, v_{0,3})] = (1,2)$$
$$r(u_{0,3}|W_2) = [d(u_{0,3}, v_{0,2}), d(u_{0,3}, v_{0,3})] = (2,1)$$
$$r(v_{0,1}|W_2) = [d(v_{01,1}, v_{0,2}), d(v_{01,1}, v_{0,3})] = (3,3)$$
$$r(v_{0,2}|W_2) = [d(v_{02,1}, v_{0,2}), d(v_{02,1}, v_{0,3})] = (0,3)$$
$$r(v_{0,3}|W_2) = [d(v_{03,1}, v_{0,2}), d(v_{03,1}, v_{0,3})] = (3,0).$$

Karena semua titik pada graf $GR_0 \odot K_1$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W_2, maka W_2 merupakan himpunan penentu bagi graf $GR_0 \odot K_1$. Berdasarkan Definisi dimensi metrik, sehingga $\dim(GR_0 \odot K_1) \leq 2$.

Teorema 2.4.1 *(Chartrand dkk,2000) Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka, $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$.*

Teorema 2.4.2 *(Saputro dkk,2017) Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $m \geq 2$. Jika o adalah titik dari P_n dengan derajat 1, maka $dim(G \rhd_o P_n) \geq dim(G)$. Batas bawahnya kuat.*

Teorema 2.4.3 *(Septiana dan Rahadjeng, 2012) Jika C_n adalah graf siklus dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim(C_n) = 2$.*

Selain teorema-teorema dari hasil penentuan dimensi merik yang telah dituliskan di atas, beberapa hasil dimensi metrik yang telah diperoleh pada penelitian terdahulu seperti pada tahun 2017, Maya dan Kapita telah menentukan dimensi metrik pada hasil operasi korona dua buah graf yakni graf $P_n \odot C_m$ dan graf $P_n \odot K_{1,m}$. Dalam penelitiannya, diperoleh $\dim(P_n \odot C_m)$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 5$, yaitu $n(m-3)$ dan $\dim(P_n \odot K_{1,m})$ dengan ≥ 2 dan $m \geq 3$, yaitu nm. Selanjutnya, penelitian mengenai dimensi metrik lokal graf antiprisma dengan $n \geq 3$ adalah 3, dan dimensi metrik lokal graf matahari dengan $n \geq 3$ adalah 1 untuk n ganjil dan 2 untuk n genap (Khoiriyah dan Kusmayadi, 2018).

Dimensi metrik hasil operasi tertentu pada graf petersen diperumum $sP_{n,1}$ adalah $s + 1$ untuk $n \geq 3$ ganjil dan $s + 2$ untuk $n \geq 4$ genap oleh Asmiati dkk (2019). Selain itu, pada tahun 2011, Bača dkk telah mengkaji dimensi metrik dari beberapa kelas graf reguler. Kemudian, pada tahun 2019, Fendiyanto telah menentukan dimensi metrik hasil operasi korona antara graf lintasan dengan graf lengkap $(P_n \odot K_m)$ dengan $n \geq 2, m \geq 2$ adalah $n(m - 1)$ dan graf sikel dengan graf lintasan $(C_n \odot mP_2)$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$ adalah nm.