BENTUK x^n DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG BILANGAN BULAT EISENSTEIN

SKRIPSI

ANGGRENI PUTRI ARIFIN

H011181004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

NOVEMBER 2022

BENTUK x^n DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG BILANGAN BULAT EISENSTEIN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ANGGRENI PUTRI ARIFIN

H011181004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

NOVEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini;

Nama	: Anggreni Putri Arifin
NIM	: H011181004
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya saya yang berjudul :

Bentuk x^n dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini adalah benar benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 13 November 2022

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 TGL. 20 METERAI TEMPEL 607C5AKX112871772

Anggreni Putri Arifin
NIM. H011181004

HALAMAN PENGESAHAN

BENTUK x^n DAN PUSAT DARI GELANGGANG POLINOMIAL MIRING ATAS GELANGGANG BILANGAN BULAT EISENSTEIN

Disusun dan diajukan oleh

ANGGRENI PUTRI ARIFIN

H011181004

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 18 November 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.	**Dra. Nur Erawati, M.Si.**
NIP. 19680803 199202 1 001	**NIP.19690912 199303 2 001**

Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS HASANUDDIN
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si.,M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas izin dan karunia-Nya lah, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini banyak mengalami kendala. Namun, berkat bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulusnya kepada:

1. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. selaku dosen pembimbing utama yang selalu sabar dalam membimbing dan memberikan motivasi serta nasihat dalam penulisan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Nur Erawaty , M.Si. selaku dosen pembimbing pertama yang selalu sabar dalam memberikan arahan dan saran untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.
3. Dr. Khaeruddin, M.Sc. dan Bapak Jeriko Gormantara, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dalam perbaikan skripsi ini.
4. Bapak Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si. rahimahullah selaku dosen penasihat akademik yang selalu sabar dalam memberikan nasihat dan motivasi untuk mengenali dan mengembangkan potensi diri selama perkuliahan.
5. Orangtua dan adik-adik tercinta yang senantiasa mendoakan dan memberi dukungan.
6. Segenap dosen Departemen Matematika yang selalu sabar mendidik dan membagikan ilmunya sejak awal hingga sampai pada tahap penulisan skripsi ini.
7. Staf Departemen Matematika yang selalu sabar dalam melayani dan membantu segala administrasi yang diperlukan.
8. Para sahabat yang senantiasa mengajarkan banyak hal, menemani, memberi semangat serta dukungan sejak awal hingga sampai pada tahap penulisan skripsi ini.

Akhir kata, semoga Allah membalas kebaikan pihak – pihak yang terlibat dan setiap ilmu yang diberikan berkah serta bernilai pahala di sisi Allah Subhanahu

Wa Ta'ala. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah pengetahuan bagi pembaca.

Makassar, 13 November 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Anggreni Putri Arifin
NIM : H011181004
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Bentuk x^n dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar, pada tanggal 13 November 2022

Yang Menyatakan

Anggreni Putri Arifin

ABSTRAK

Penelitian ini dilakukan untuk mengembangkan teori tentang gelanggang polinomial miring. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan hasil kali polinom x pangkat n dengan gelanggang bilangan bulat Eisenstein serta bentuk polinom komutatif atau pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein. Untuk itu, terlebih dahulu dicari bentuk endomorfisma pada gelanggang bilangan bulat Eisenstein yang dinotasikan dengan σ. Selanjutnya, dicari σ-derivatif yang terkait dengan bentuk endomorfisma yang diperoleh sebelumnya. Pada penelitian ini diperoleh tiga buah gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein dengan bentuk x^n dan pusat yang berbeda.

Kata Kunci : *Bilangan bulat Eisenstein, Gelanggang Polinom Miring, Komutatif.*

Judul : Bentuk x^n dan Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Nama : Anggreni Putri Arifin

NIM : H011181004

Program Studi : Matematika

ABSTRACT

This study was conducted to develop theory of skew polynomial rings. The objective of this study is to determine the product of polynomial x raised to the n power with the element of the Eisenstein integers ring and the commutative polynomial form or the center of the skew polynomial rings over the ring of Eisenstein integers. In order to find it, firstly it is important to find the endomorphism form of Eisenstein integers ring, denoted by σ. The study continued with finding the σ-derivative of Eisenstein integers ring which was related to the endomorphism previously acquired. The study obtained three skew polynomial rings over the ring of Eisenstein integers with distinct form of $x^n -$ term and center.

Keywords : *Eisenstein integer, Skew Polynomial Ring, Commutative.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Secara umum, aljabar merupakan ilmu yang mempelajari simbol-simbol Matematika dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol tersebut. Dewasa kini, studi tentang Aljabar makin berkembang. Salah satu subjek dari perkembangan tersebut adalah aljabar abstrak atau aljabar modern. Aljabar abstrak adalah bidang yang mempelajari struktur aljabar dan merupakan salah satu topik yang dipelajari dalam Matematika tingkat lanjut. Salah satu dari struktur aljabar yang dipelajari dalam aljabar abstrak adalah gelanggang.

Gelanggang terdiri dari sebuah himpunan dan dua operasi biner yakni perkalian dan penjumlahan. Gelanggang merupakan grup abelian yang bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian dan bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan serta memiliki unsur identitas. Dalam studi mengenai gelanggang, dikenal dua jenis gelanggang berdasarkan sifat operasi perkaliannya. Suatu gelanggang dengan operasi perkalian yang komutatif disebut gelanggang komutatif. Sebaliknya, gelanggang dengan operasi perkalian yang tidak komutatif disebut gelanggang nonkomutatif.

Sebagai bentuk pengembangan dari gelanggang biasa, dikenal pula gelanggang khusus, salah satunya adalah gelanggang polinomial miring. Dalam perkembangannya, studi mengenai gelanggang polinomial miring menjadi sangat beragam. Hal ini dikarenakan dalam membangun suatu gelanggang polinomial miring, gelanggang tumpuan yang dapat digunakan sangat bervariasi. Misalnya, pada tahun 2009, Amir melakukan penelitian mengenai pusat dari beberapa gelanggang polinomial miring dengan daerah integral komutatif sebagai gelanggang tumpuannya. Kemudian pada tahun 2010, Amir juga melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring dengan daerah bilangan bulat Gauss sebagai gelanggang tumpuan. Pada tahun 2012, Wang dkk melakukan penelitian mengenai gelanggang faktor prima dari gelanggang polinomial miring atas daerah Dedekind.

Dalam penelitian yang dilakukan oleh Afriani dkk pada tahun 2014, dikaji mengenai bentuk dan sifat-sifat ideal dari gelanggang polinomial miring dengan gelanggang tumpuan yang beragam. Pada tahun 2016, Djuddin dkk juga melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring dengan fokus penelitian pada bentuk ideal dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang quaternion. Pada tahun 2018, Amir dkk melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring atas gelanggang coquaternion. Pada penelitian tersebut, didefinisikan dua buah pemetaan σ yang merupakan endomorfisma dari gelanggang tumpuannya. Kemudian, pemetaan δ yang digunakan adalah pemetaan nol.

Berbeda dengan gelanggang polinomial biasa, gelanggang polinomial miring merupakan gelanggang nonkomutatif. Hal ini dikarenakan operasi perkalian pada gelanggang polinomial miring memuat unsur σ dan δ sehingga aturan perkalian pada xa tidak berlaku pada ax atau xa tidak selalu sama dengan ax. Namun, pusat dari gelanggang polinomial miring dapat memberikan himpunan bagian dari gelanggang tersebut yang menyebabkan operasi perkaliannya komutatif. Selain itu, seperti halnya pada penelitian-penelitian yang telah disebutkan, pengambilan gelanggang tumpuan yang berbeda dapat memberikan bentuk pusat yang berbeda pula.

Berdasarkan uraian yang telah disebutkan, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai gelanggang polinomial miring dengan mengambil gelanggang bilangan bulat Eisenstein sebagai gelanggang tumpuan serta fokus kajian pada pusat gelanggang polinomial miring tersebut.

1.2. Masalah Penelitian

Adapun masalah yang dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana bentuk endomorfisma dan σ-derivatif dari gelanggang bilangan bulat Eisenstein?
2. Bagaimana bentuk hasil perkalian polinom x^n dengan anggota bilangan bulat Eisenstein?
3. Bagaimana bentuk pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein?

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang bentuk x^n serta pusat dari gelanggang polinomial miring yang dibangun dengan bilangan bulat Eisenstein sebagai gelanggang tumpuannya. Dalam hal ini, bentuk x^n yang dimaksud adalah hasil perkalian polinom x^n dengan anggota bilangan bulat Eisenstein.

1.4. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Untuk mendefinisikan bentuk endomorfisma dan σ-derivatif dari gelanggang bilangan bulat Eisenstein.
2. Untuk mengidentifikasi bentuk hasil perkalian polinom x^n dengan anggota bilangan bulat Eisenstein.
3. Untuk mengidentifikasi pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan bagi penulis maupun pembaca khususnya mengenai gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein serta dapat menjadi bahan rujukan untuk penelitian di masa yang akan datang.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Bilangan Bulat Eisenstein

Bilangan bulat merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan rasional serta sering dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, bilangan bulat kemudian sering dikombinasikan dengan himpunan bilangan lain untuk membentuk suatu himpunan bilangan yang baru. Salah satu contohnya adalah bilangan bulat Eisenstein atau sering disebut juga bilangan bulat Eisenstein-Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1. *(Alkam dan Osba, 2010) Misalkan* $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ *adalah akar kesatuan pangkat tiga sedemikian sehingga* $\omega^3 = 1$ *dan* $\omega^2 =- \omega - 1$. *Bilangan bulat Eisenstein adalah bilangan kompleks* $a + b\omega$ *dengan* a, b *elemen bilangan bulat dan himpunannya dinotasikan sebagai*

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \ \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2. Grup

Grup merupakan salah satu bagian dari struktur aljabar yang dipelajari dalam aljabar abstrak dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1. *(Finston dan Morandi, 2014) Misalkan sebuah himpunan tak kosong* G *dengan sebuah operasi biner* $*$ *pada* G. *Maka pasangan* $(G, *)$ *disebut grup jika:*

(i) untuk setiap $a, b, c \in G$,

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad sifat\ asosiatif\ operasi\ biner\ *$$

(ii) terdapat sebuah elemen e dalam G *sedemikian sehingga untuk setiap* $a \in G$,

$$e * a = a * e = a \qquad elemen\ identitas\ dari\ G$$

(iii) untuk setiap $a \in G$, *terdapat element* $a' \in G$ *sedemikian sehingga.*

$$a * a' = a' * a = e \qquad invers\ a'\ dari\ a$$

Dalam buku yang berbeda, Fraleigh (2014) menambahkan aksioma tambahan yaitu himpunan G tertutup terhadap operasi binernya yakni jika $a, b \in G$ maka $a * b \in G$.

Definisi 2.2.2. *(Fraleigh, 2014) Sebuah grup* G *merupakan sebuah grup abelian jika operasi binernya komutatif.*

Contoh 2.2.1. Misalkan $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan bilangan bulat Gauss. Maka $(\mathbb{Z}[i], +)$ adalah grup abelian.

Bukti:

Ambil sebarang $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i]$

dengan

$\alpha = (a + bi)$, $\beta = (c + di)$, $\gamma = (e + fi)$ dan $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan:

(i) $\mathbb{Z}[i]$ tertutup terhadap penjumlahan $(\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i])$.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + c + bi + di \\ &= (a + c) + (b + d)i\,. \end{aligned}$$

Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka $(a + c), (b + d) \in \mathbb{Z}$.

Akibatnya, $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$.

(ii) $\mathbb{Z}[i]$ bersifat asosiatif terhadap penjumlahan $(\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i], (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma))$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i) \\ &= (a + c + e) + (b + d + f)i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2), maka terbukti bahwa $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[i]$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(iii) $\mathbb{Z}[i]$ memuat elemen identitas ($\exists\ e \in \mathbb{Z}[i] \ni \forall\alpha \in \mathbb{Z}[i],\ e + \alpha = \alpha + e = \alpha$).

Pilih $e = (0 + 0i) \in \mathbb{Z}[i]$.

Untuk sebarang $\alpha = (a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$, maka:

$$
\begin{aligned}
e + \alpha &= (0 + 0i) + (a + bi) \\
&= (0 + a) + (0 + b)i \\
&= (a + bi) = \alpha \\
&= (a + 0) + (b + 0)i \\
&= (a + bi) + (0 + 0i) \\
&= \alpha + e.
\end{aligned}
$$

Karena $e + \alpha = \alpha + e = \alpha,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, maka dapat disimpulkan bahwa e adalah elemen identitas dari $\mathbb{Z}[i]$.

(iv) Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, terdapat $\alpha' \in \mathbb{Z}[i]$ invers dari α sedemikian sehingga $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = e$.

Ambil sebarang $\alpha = (a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$.

Terdapat $e = (0 + 0i) \in \mathbb{Z}[i]$ sedemikian sehingga,

$$\alpha + \alpha' = e$$

$$(a + bi) + \alpha' = (0 + 0i).$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= (0 + 0i) + (-a - bi) \\
&= (0 - a) + (0 - b)i \\
&= -a - bi \\
&= -(a + bi) \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

dan,

$$
\begin{aligned}
\alpha' + \alpha &= -(a + bi) + (a + bi) \\
&= (-a + a) + (-b + b)i \\
&= 0 + 0i = e. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (2.3) dan (2.4), maka α' adalah invers dari α. Sehingga terbukti bahwa $\forall\alpha \in \mathbb{Z}[i]\ \exists\ \alpha' \in \mathbb{Z}[i] \ni \alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = e$.

(v) Bersifat komutatif ($\forall\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], \alpha + \beta = \beta + \alpha$).

Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$

dengan

$\alpha = (a + bi), \beta = (c + di)$ dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
\beta + \alpha &= (c + di) + (a + b) \\
&= (c + a) + (di + b) \\
&= (c + a) + (d + b)i. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Karena $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan grub abelian, maka $c + a = a + c$, sehingga persamaan (2.5) dapat dituliskan menjadi:

$$
\begin{aligned}
\beta + \alpha &= (c + a) + (d + b)i \\
&= (a + c) + (b + d)i \\
&= \alpha + \beta.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Z}[i]$ bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Jadi, karena syarat (i),(ii),(iii),(iv), dan (v) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[i], +)$ adalah grup abelian. ■

2.3. Gelanggang

Gelanggang merupakan bagian lain dari struktur aljabar yang dipelajari dalam aljabar abstrak. Gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1. *(Lovett, 2015) Sebuah gelanggang dinotasikan $(R,+,\cdot)$ adalah struktur yang memuat sebuah himpunan tak kosong R dengan operasi + dan $\cdot$ sebagai operasi biner di dalam R yang memenuhi aksioma sebagai berikut.*

(i) $(R, +)$ adalah grup abelian.

(ii) Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif

(iii) Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap operasi + sedemikian sehingga, untuk setiap $a, b, c \in R$:

1) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\qquad distributif\ kanan$

2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\qquad distributif\ kiri$

Contoh 2.3.1. Misalkan $R = \{z = a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan bilangan bulat Gauss. Didefinisikan operasi + sebagai operasi penjumlahan dan operasi $\cdot$ sebagai operasi perkalian pada R, maka *$(R,+,\cdot)$* adalah gelanggang.

Bukti:

(i) Berdasarkan Contoh 2.2.1., $(R,+)$ adalah grup abelian.

(ii) Ambil sebarang $\alpha,\beta,\gamma \in R$ dengan $\alpha = (a+bi)$, $\beta = (c+di)$, $\gamma = (e+fi)$ dan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $\alpha,\beta,\gamma \in R$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\gamma) &= (a+bi)((c+di)(e+fi)) \\ &= (a+bi)(ce+cfi+edi-df) \\ &= (ace+acfi+aedi-adf+bcei-bcf-bed-bdfi) \\ &= (ace-adf-bcf-bed)+(acf+aed+bce-bdf)i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= ((a+bi)(c+di))(e+fi) \\ &= (ac+adi+bci-bd)(e+fi) \\ &= (ace+acfi+aedi-adf+bcei-bcf-bde-bdfi) \\ &= (ace-adf-bcf-bde)+(acf+aed+bce-bdf)i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7), diperoleh $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Sehingga terbukti bahwa operasi $\cdot$ dalam R bersifat asosiatif.

(iii) Ambil sebarang $\alpha,\beta,\gamma \in R$ dengan $\alpha = (a+bi)$, $\beta = (c+di)$, $\gamma = (e+fi)$ dan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $\alpha,\beta,\gamma \in R$, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ (distributif kiri) dan $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$ (distributif kanan).

Untuk distributif kiri, operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma) &= (a+bi)((c+di)+(e+fi)) \\ &= (a+bi)((c+e)+(d+f)i) \\ &= a(c+e)+a(d+f)i+b(c+e)i-b(d+f) \\ &= (ac+ae-bd-bf)+(ad+af+bc+be)i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Untuk distributif kiri, operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\alpha\gamma &= ((a+bi)(c+di))+((a+bi)(e+fi)) \\ &= (ac+adi+bci-bd)+(ae+afi+bei-bf) \\ &= (ac+ae-bd-bf)+(ad+bc+af+be)i. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9), terbukti bahwa operasi $\cdot$ distributif kiri.

Untuk distributif kanan, operasi di ruas kiri:

$$(\alpha+\beta)\gamma = ((a+bi)+(c+di))(e+fi)$$
$$= ((a+c)+(b+d)i)(e+fi)$$
$$= (a+c)e+(b+d)ei+(a+c)fi-(b+d)f$$
$$= (ae+ce-bf-df)+(be+af+de+cf)i. \quad (2.10)$$

Untuk distributif kanan, operasi di ruas kanan:

$$\alpha\gamma+\beta\gamma = ((a+bi)(e+fi))+((c+di)(e+fi))$$
$$= (ae+afi+bei-bf)+(ce+cfi+dei-df)$$
$$= (ae+ce-bf-df)+(af+cf+be+de)i. \quad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.10) dan (2.11), terbukti bahwa operasi $\cdot$ distributif kanan. Karena operasi $\cdot$ distributif di kiri dan kanan, maka dapat disimpulkan bahwa operasi $\cdot$ dalam R bersifat distributif terhadap operasi +.

Karena aksioma (i), (ii) dan (iii) dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa *(R,+,·)* dengan $R=\{z=a+bi\in\mathbb{Z}[i]\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ adalah gelanggang. ■

Definisi 2.3.2. *(Jacobson, 1985) Sebuah gelanggang disebut komutatif jika operasi perkalian dalam gelanggang tersebut komutatif.*

Contoh 2.3.2. Misalkan $R=\{z=a+bi\in\mathbb{Z}[i]\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, didefinisikan operasi · sebagai operasi perkalian pada *R,* maka *R* komutatif.

Bukti:

Ambil sebarang $\alpha,\beta,\in\mathbb{Z}[i]$

dengan

$\alpha=(a+bi)$, $\beta=(c+di)$, dan $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan $\alpha\beta=\beta\alpha$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di)$$
$$= (ac+adi+bci-bd)$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i. \quad (2.12)$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\beta\alpha = (c+di)(a+bi)$$

$$= (ca + cbi + dai - db)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{2.13}$$

Berdasarkan persamaan (2.12) dan (2.13), diperoleh $\alpha\beta = \beta\alpha\ \forall \alpha, \beta \in R$. Sehingga, terbukti bahwa $(R, \cdot)$ dengan $R = \{z = a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ komutatif. Akibatnya, berdasarkan Contoh 2.3.1. dan 2.3.2., dapat disimpulkan bahwa gelanggang bilangan bulat Gauss $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ membentuk gelanggang komutatif. ■

Dalam teori gelanggang, dibahas pula mengenai pusat dari suatu gelanggang. Karena tidak semua gelanggang bersifat komutatif, maka pusat dari suatu gelanggang dapat merepresentasikan elemen-elemen yang bersifat komutatif pada gelanggang tersebut. Pusat dari suatu gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.3. *(Amir dkk, 2018) Misalkan R suatu gelanggang. Maka, pusat dari R dinotasikan $Z(R)$ didefinisikan sebagai*

$$Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}.$$

Dalam teori gelanggang, dibahas pula mengenai homomorfisma gelanggang. Homomorfisma gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.4. *(Lovett, 2015) Misalkan R dan S dua buah gelanggang. Homomorfisma gelanggang adalah suatu fungsi $\varphi: R \to S$ yang memenuhi aksioma berikut:*

(i) $\forall a, b \in R, \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

(ii) $\forall a, b \in R, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Definisi 2.3.5. *(Lovett, 2015) Suatu homomorfisma $\varphi : R \to R$ dari suatu gelanggang R ke dirinya sendiri disebut endomorfisma gelanggang.*

2.4. Gelanggang Polinomial Miring

Gelanggang polinomial miring merupakan salah satu dari gelanggang khusus yang digeneralisasi dari gelanggang polinomial biasa.

Definisi 2.4.1. *(Amir, 2010) Misalkan sebuah gelanggang* R*,* σ *adalah suatu endomorfisma pada R, dan* δ *merupakan* σ*-derivatif yaitu:*

(i.) δ *adalah endomorfisma pada R dengan R sebagai grup penjumlahan*

(ii.) $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b \; \forall a, b \in R$.

Gelanggang polinomial miring $R[x; \sigma, \delta]$ *dalam variabel tak diketahui x terdiri dari polinom dengan koefisien di* R *yang memenuhi aturan perkalian: untuk setiap* $a \in R$ *berlaku* $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Jika $\delta = 0$, maka gelanggang polinomial miring dinotasikan dengan $R[x; \sigma]$. Jika $\sigma = 1$, maka gelanggang polinomial miring dinotasikan dengan $R[x; \delta]$. Untuk kasus khusus ketika $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$, gelanggang polinomial miring $R[x; \sigma, \delta]$ tak lain adalah gelanggang polinomial biasa $R[x]$. Gelanggang polinomial miring merupakan bagian dari gelanggang yang tidak komutatif. Hal ini dikarenakan aturan perkalian pada gelanggang ini melibatkan σ dan δ, sehingga xa tidak selalu sama dengan ax.

Pada studi mengenai aljabar nonkomutatif dalam hal ini gelanggang polinomial miring, pusat gelanggang yang telah disebutkan dalam Definisi 2.3.3., biasanya digunakan untuk mengidentifikasi himpunan bagian dari gelanggang tersebut yang menyebabkan operasi perkaliannya komutatif.

Berikut diberikan contoh gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Gauss.

Contoh 2.4.1. Misalkan $R = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] | \, a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah gelanggang bilangan bulat Gauss. Didefinisikan suatu pemetaan σ pada R dengan $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$ dan pemetaan δ dengan $\delta(a + bi) = b$ untuk setiap $a + bi \in R$. $R[x; \sigma, \delta]$ adalah gelanggang polinomial miring *(Amir, 2010)*.

Bukti:

(I) Didefinisikan $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$, σ adalah endomorfisma gelanggang.

Ambil sebarang $a + bi$, $c + di \in R$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan bahwa:

(I.a.)$\sigma((a + bi) + (c + di)) = \sigma(a + bi) + \sigma(c + di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\sigma((a + bi) + (c + di)) &= \sigma((a + c) + (b + d)i) \\ &= (a + c) - (b + d)i. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}\sigma(a + bi) + \sigma(c + di) &= (a - bi) + (c - di) \\ &= (a + c) - (b + d)i. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.15), diperoleh bahwa $\sigma((a + bi) + (c + di)) = \sigma(a + bi) + \sigma(c + di)$.

(I.b.)$\sigma((a + bi)(c + di)) = \sigma(a + bi)\sigma(c + di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}\sigma((a + bi)(c + di)) &= \sigma(ac + adi + bci - bd) \\ &= \sigma((ac - bd) + (ad + bc)i) \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned}\sigma(a + bi)\sigma(c + di) &= (a - bi)(c - di) \\ &= ac - adi - bci - bd \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i. \qquad (2.17)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.16) dan (2.17), diperoleh $\sigma((a + bi)(c + di)) = \sigma(a + bi)\sigma(c + di)$. Sehingga berdasarkan (I.a.) dan (I.b.), pemetaan σ dengan $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$ adalah endomorfisma gelanggang.

(II) Didefinisikan $\delta(a + bi) = b$ untuk setiap $a + bi \in R$, δ adalah $\sigma -$ derivatif.

Ambil sebarang $a + bi$, $c + di \in R$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan bahwa:

(II.a.) $\delta((a + bi) + (c + di)) = \delta(a + bi) + \delta(c + di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$$\delta((a + bi) + (c + di)) = \delta((a + c) + (b + d)i) = b + d. \qquad (2.18)$$

Untuk operasi di ruas kanan:

$\delta(a+bi)+\delta(c+di)=b+d.$ (2.19)

Berdasarkan persamaan (2.18) dan (2.19), diperoleh $\delta((a+bi)+(c+di))=\delta(a+bi)+\delta(c+di)$.

(II.b.) $\delta((a+bi)(c+di))=\sigma(a+bi)\delta(c+di)+\delta(a+bi)(c+di)$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$\delta((a+bi)(c+di))=\delta((ac-bd)+(ad+bc)i)=ad+bc.$ (2.20)

Untuk operasi di ruas kanan:

$\sigma(a+bi)\delta(c+di)+\delta(a+bi)(c+di)$=$(ad-bdi+bdi+bc)$. (2.21)

Berdasarkan persamaan (2.20) dan (2.21), diperoleh $\delta((a+bi)(c+di))=\sigma(a+bi)\delta(c+di)+\delta(a+bi)(c+di)$. Sehingga berdasarkan (II.a.) dan (II.b.), pemetaan δ dengan $\delta(a+bi)=b$ untuk setiap $a+bi\in R$ adalah $\sigma-$ derivatif.

Karena (I) dan (II) dipenuhi, maka terbukti bahwa $R[x;\sigma,\delta]$ dengan $\sigma(a+bi)=a-bi$ dan $\delta(a+bi)=b$ adalah gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Gauss. ■

Gelanggang polinomial miring bukan merupakan gelanggang yang komutatif karena aturan perkaliannya yang berbeda dengan aturan perkalian pada gelanggang polinomial biasa. Berikut diberikan contoh bahwa perkalian dalam gelanggang polinomial miring tidak komutatif.

Contoh 2.4.2. Misalkan $p(x)=(3+2i)x+(2+i), q(x)=(2-4i)x\in\mathbb{Z}_i[x;\sigma,\delta]$ dengan $\sigma(a+bi)=a-bi$ dan $\delta(a+bi)=b$. Maka $p(x)q(x)\neq q(x)p(x)$.

Bukti:

(i) Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned}p(x)q(x)&=[(3+2i)x+(2+i)](2-4i)x\\&=[(3+2i)(x(2-4i))x]+(2+i)(2-4i)x\\&=(3+2i)[(2+4i)x-4]x+(2+i)(2-4i)x\\&=(3+2i)(2+4i)x^2-(12+8i)x+(8-2i)x\\&=(16i-2)x^2-(4+10i)x.\end{aligned}\tag{2.22}$$

(ii) Untuk operasi di ruas kanan:

$$
\begin{aligned}
q(x)p(x) &= (2-4i)x[(3+2i)x+(2+i)] \\
&= [(2-4i)(x(3+2i))x] + [(2-4i)(x(2+i))] \\
&= (2-4i)[(3-2i)x+2]x + (2-4i)[(2-i)x+1] \\
&= -(2+16i)x^2 + (4-8i)x - 6ix + (2-4i) \\
&= -(2+16i)x^2 + (4-14i)x + (2-4i). \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (2.22) dan (2.23). jelas bahwa $p(x)q(x) \neq q(x)p(x)$. ■

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Pelaksanaan

Penelitian dimulai sejak Juli 2022 di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

3.2. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur atau kajian pustaka dengan cara mengumpulkan informasi dari buku - buku maupun literatur lainnya yang relevan dengan masalah penelitian kemudian menggunakannya untuk menganalisis objek penelitian. Adapun tahapan - tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

a. **Mencari literatur di buku, jurnal dan beberapa situs terkait.**

   Pada tahapan ini, penelitian diawali dengan cara mengumpulkan informasi dari buku, jurnal dan situs terkait topik penelitian dalam hal ini bilangan bulat Eisenstein. Selanjutnya akan diuji menggunakan syarat gelanggang.

b. **Menentukan pemetaan σ dari bilangan bulat Eisenstein.**

   Pada tahapan ini, dicari pemetaan σ yang memenuhi syarat endomorfisma gelanggang.

c. **Menentukan pemetaan δ dari bilangan bulat Eisenstein.**

   Pada tahapan ini, dicari pemetaan δ yang memenuhi endomorfisma grup dan $\delta(mn) = \sigma(m)\delta(n) + \delta(m)n$. Selanjutnya dibangun gelanggang polinomial miring atas bilangan bulat Eisenstein berdasarkan hasil pada langkah b dan c.

d. **Mencari bentuk $x^n(a + b\omega)$.**

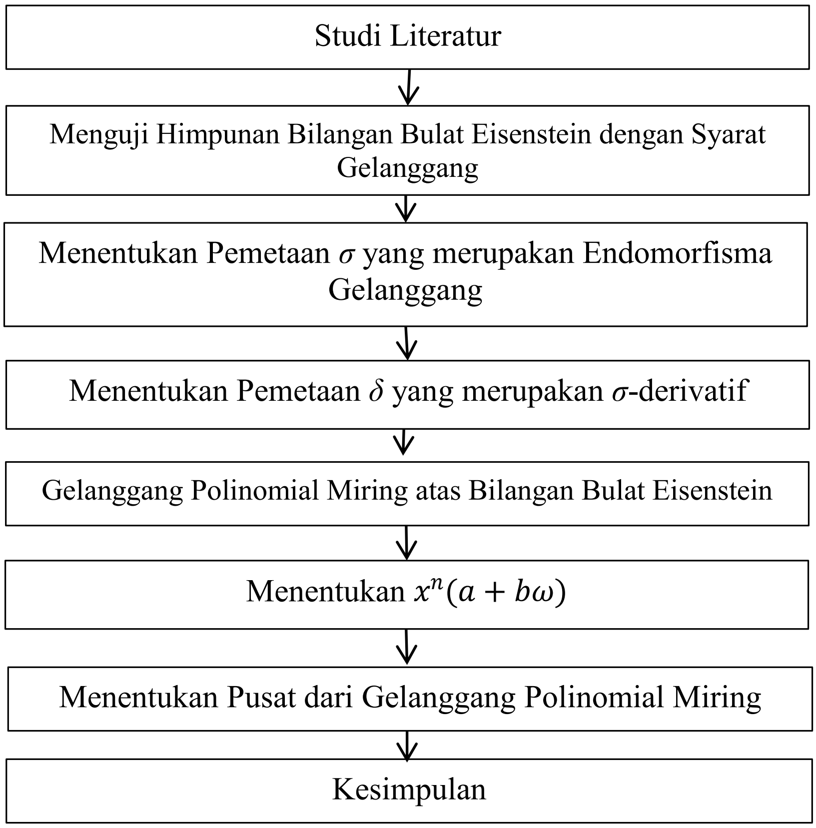
   Pada tahapan ini, dicari bentuk $x^n(a + b\omega)$ dengan menggunakan aturan perkalian pada gelanggang polinomial miring yaitu $xm = \sigma(m)x + \delta(m)$ dengan $m = a + b\omega$ adalah elemen bilangan bulat Eisenstein.

e. **Menentukan pusat dari gelanggang polinom miring.**

   Pada tahapan ini, dicari pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein dengan memanfaatkan hasil yang diperoleh dari langkah - langkah sebelumnya.

3.3. Diagram Alur Penelitian

Adapun alur dari penelitian ini ditunjukkan pada diagram berikut.



Gambar 3.3.1. Diagram alur penelitian

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Bentuk Endomorfisma dan σ-Derivatif dari Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Dalam penelitian ini akan dicari bentuk endomorfisma dan σ-derivatif untuk membangun gelanggang polinomial miring dengan gelanggang bilangan bulat Eisenstein sebagai gelanggang tumpuan.

Sebelum mencari endomorfisma gelanggang dan σ-derivatif dari himpunan bilangan bulat Eisenstein, terlebih dahulu dibuktikan bahwa himpunan tersebut adalah gelanggang.

Lemma 4.1.1. *Misalkan himpunan*

$$R = \{a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | \ a, b \ \in \mathbb{Z}\},$$

didefinisikan operasi $+$ *sebagai operasi penjumlahan dan operasi* $\cdot$ *sebagai operasi perkalian pada bilangan bulat Eisenstein, maka* $(R, +, \cdot)$ *adalah gelanggang.*

Bukti:

I) Akan ditunjukkan bahwa $(R,+)$ adalah grup abelian.

(i) Bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Ambil sebarang $m,n \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$, $n = (c + d\omega)$ dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan $m+n \in R$.

$$\begin{aligned} m + n &= (a + b\omega) + (c + d\omega) \\ &= (a + c) + (b\omega + d\omega) \\ &= ((a + c) + (b + d)\omega). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Karena $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, maka $a + c, b + d \in \mathbb{Z}$.

Sehingga $m+n \in R$.

(ii) Bersifat asosiatif ($\forall l,m,n \in R$, $l + (m + n) = (l + m) + n$).

Ambil sebarang $l,m,n \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$, $n = (c + d\omega)$, $l = (e + f\omega)$ dan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan ($\forall l,m,n \in R,\ l + (m + n) = (l + m) + n$).

Untuk operasi pada ruas kiri:

$$\begin{aligned} l + (m + n) &= (e + f\omega) + ((a + b\omega) + (c + d\omega)) \\ &= (e + f\omega) + ((a + c) + (b + d)\omega) \\ &= (e + (a + c)) + (f\omega + (b + d)\omega) \\ &= (e + a + c) + (f + b + d)\omega. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Untuk operasi pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} (l + m) + n &= ((e + f\omega) + (a + b\omega)) + (c + d\omega) \\ &= ((e + a) + (f + b)\omega) + (c + d\omega) \\ &= ((e + a) + c) + ((f + b)\omega + d\omega) \\ &= (e + a + c) + (f + b + d)\omega. \qquad (4.3) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.2) dan (4.3), terbukti bahwa:

$l + (m + n) = (l + m) + n.$

(iii) Memuat elemen identitas ($\exists\ e \in R \ni \forall m \in R,\ e + m = m + e = m$).

Ambil sebarang $m \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$ dan $a,b \in \mathbb{Z}$.

Terdapat $e = (0 + 0\omega) \in R$, sehingga

$$\begin{aligned} m + e &= (a + b\omega) + (0 + 0\omega) \\ &= (a + 0) + (b + 0)\omega \\ &= (a + b\omega) \qquad (4.4) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} e + m &= (0 + 0\omega) + (a + b\omega) \\ &= (0 + a) + (0 + b)\omega \\ &= (a + b\omega)\,. \qquad (4.5) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.4) dan (4.5), terbukti bahwa R memuat elemen identitas.

(iv) Mempunyai invers di R ($\forall m \in R\ \exists\ m' \in R \ni m + m' = m' + m = e$).

Ambil sebarang $m \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$ dan $a,b \in \mathbb{Z}$.

Terdapat $e = (0 + 0\omega) \in R$, sehingga

$$m + m' = (a + b\omega) + m' = (0 + 0\omega)$$

$$\begin{aligned} m' &= (0 + (-a)) + (0 + (-b))\omega \\ &= -a + (-b)\omega = -(a + b\omega) \qquad (4.6) \end{aligned}$$

dan

$m' + m = m' + (a + b\omega) = (0 + 0\omega)$

$m' = ((-a) + 0) + ((-b) + 0)\omega$

$= -a + (-b)\omega = -(a + b\omega).$ (4.7)

Berdasarkan persamaan (4.6) dan (4.7), invers dari m adalah $m' = -(a + b\omega) \in R$.

(v) Bersifat komutatif ($\forall m,n \in R,\ m + n = n + m$).

Ambil sebarang $m,n \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$, $n = (c + d\omega)$ dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

$n + m = (c + d\omega) + (a + b\omega)$

$= (c + a) + (d\omega + b\omega)$

$= (c + a) + (d + b)\omega.$ (4.8)

Karena $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan grup abelian, maka $c + a = a + c$, sehingga persamaan (4.8) dapat dituliskan menjadi:

$n + m = (c + a) + (d + b)\omega$

$= (a + c) + (b + d)\omega$

$= m + n.$

Jadi, terbukti bahwa R bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Jadi, karena syarat (i), (ii), (iii), (iv), dan (v) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(R, +)$ adalah grup abelian.

II) Akan ditunjukkan R bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian.

Ambil sebarang $l,m,n \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$, $n = (c + d\omega)$, $l = (e + f\omega)$ dan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$.

Akan dibuktikan $\forall l,m,n \in R,\ l(mn) = (lm)n$.

Catatan: karena ω memenuhi $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, maka $\omega^2 = -\omega - 1$.

Untuk operasi di ruas kiri:

$l(mn) = (e + f\omega)((a + b\omega)(c + d\omega))$

$= (e + f\omega)(ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2$

$= (e + f\omega)(ac + (ad + bc)\omega - bd(\omega + 1))$

$= (e + f\omega)(ac + (ad + bc - bd)\omega - bd)$

$= (eac - adf - bcf - ebd + bdf) + (ead + ebc - ebd + acf - adf - bcf)\omega.$ (4.9)

Untuk operasi di ruas kanan :

$$\begin{aligned}(lm)n &= ((e+f\omega)(a+b\omega))(c+d\omega)\\ &= (ea+(eb+af)\omega+bf\omega^2)(c+d\omega)\\ &= (ea+(eb+af)\omega-bf(\omega+1))(c+d\omega)\\ &= (ea+(eb+af-bf)\omega-bf)(c+d\omega)\\ &= (eac-adf-bcf-ebd+bdf)+(ead+ebc+acf-\\ &\quad bcf-ebd-adf)\omega. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.9) dan (4.10) diperoleh $l(mn) = (lm)n$.

Jadi, terbukti bahwa R asosiatif terhadap operasi perkalian.

III) Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian R distributif terhadap operasi penjumlahan di dalamnya.

Ambil sebarang $l,m,n \in R$, dengan $m = (a+b\omega), n = (c+d\omega), l = (e+f\omega)$ dan $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$.

Akan dibuktikan $\forall l,m,n \in R,\ l(m+n) = lm+ln$ (distributif kiri) dan $(l+m)n = ln+mn$ (distributif kanan).

Untuk distributif kiri, operasi pada ruas kiri menjadi:

$$\begin{aligned}l(m+n) &= (e+f\omega)((a+b\omega)+(c+d\omega))\\ &= (e+f\omega)((a+c)+(b+d)\omega)\\ &= [(ea+ec)+(eb+ed)\omega]+[(af+cf)\omega+(bf+df)\omega^2]\\ &= [(ea+ec)+(eb+ed)\omega]+[(af+cf)\omega-(bf+df)(1+\omega)]\\ &= [(ea+ec)+(eb+ed)\omega]+[(af+cf)\omega-(bf+df)\omega-\\ &\quad (bf+df)]\\ &= (ea+ec-bf-df)+(eb+ed+af+cf-bf-df)\omega.\end{aligned}$$

Untuk distributif kiri, operasi pada ruas kanan menjadi:

$$\begin{aligned}lm+ln &= (e+f\omega)(a+b\omega)+(e+f\omega)(c+d\omega)\\ &= [ea+(eb+af)\omega+bf\omega^2]+[ec+(ed+cf)\omega+df\omega^2]\\ &= [ea+(eb+af)\omega-bf(1+\omega)]+[ec+(ed+cf)\omega-\\ &\quad df(1+\omega)]\\ &= [(ea+(eb+af-bf)\omega-bf)]+[(ec+(ed+cf-df)\omega-\\ &\quad df)]\\ &= (ea+ec-bf-df)+(eb+ed+af+cf-bf-df)\omega.\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil operasi pada ruas kanan dan ruas kiri, diperoleh $l(m+n) = lm+ln$.

Untuk distributif kanan, operasi pada ruas kiri menjadi:

$$\begin{aligned}(l+m)n &= ((e+f\omega)+(a+b\omega))(c+d\omega)\\ &= ((e+a)+(f+b)\omega)(c+d\omega)\\ &= [((ec+ac)+(ed+ad)\omega]+[(cf+bc)\omega+(fd+bd)\omega^2]\\ &= [((ec+ac)+(ed+ad)\omega]+[(cf+bc)\omega-(fd+bd)(1+\\ &\quad \omega)]\\ &= [((ec+ac)+(ed+ad)\omega]+[(cf+bc)\omega-(fd+bd)\omega-\\ &\quad (fd+bd)]\\ &= (ec+ac-fd-bd)+(ed+ad+cf+bc-fd-bd)\omega.\end{aligned}$$

Untuk distributif kanan, operasi pada ruas kanan menjadi:

$$\begin{aligned}ln+mn &= ((e+f\omega)(c+d\omega))+(a+b\omega)(c+d\omega)\\ &= [ec+(ed+cf)\omega+df\omega^2]+[ac+(ad+bc)\omega+bd\omega^2]\\ &= [ec+(ed+cf)\omega-df(1+\omega)]+[ac+(ad+bc)\omega-bd(1+\\ &\quad \omega)]\\ &= [ec+(ed+cf-df)\omega-df]+[ac+(ad+bc-bd)\omega-\\ &\quad bd]\\ &= (ec+ac-fd-bd)+(ed+ad+cf+bc-fd-bd)\omega.\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil operasi pada ruas kanan dan ruas kiri, diperoleh $(lm)n = ln+mn$. Karena $l(m+n) = lm+ln$ dan $(l+m)n = ln+mn$, maka dapat disimpulkan bahwa operasi perkalian pada R distributif kanan dan kiri terhadap operasi penjumlahan.

Jadi, karena syarat I), II), dan III) terpenuhi, terbukti bahwa $(R, +, \cdot)$ dengan $R = \{a+b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah gelanggang. ■

Selanjutnya, dibangun gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein yang disajikan dalam teorema - teorema sebagai berikut.

Teorema 4.1.1. *Diberikan himpunan*

$$R = \{a+b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Didefinisikan pemetaan σ : R→R dengan aturan

$$\sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega,$$

*dan pemetaan δ : R→*0 *dengan aturan*

$$\delta(a+b\omega) = 0,$$

maka R[x;σ] adalah gelanggang polinomial miring.

Bukti:

I) Didefinisikan pemetaan $\sigma : R \to R$ dengan $\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega$, akan dibuktikan pemetaan σ merupakan endomorfisma gelanggang.

Ambil sebarang $m,n \in R$, dengan $m = (a + b\omega)$, $n = (c + d\omega)$ dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

(i) Akan dibuktikan bahwa $\sigma((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \sigma(a + b\omega) + \sigma(c + d\omega)$.

Untuk operasi pada ruas kiri menjadi:

$$\begin{aligned}\sigma((a + b\omega) + (c + d\omega)) &= \sigma((a + c) + (b + d)\omega)\\ &= (a + c - b - d) - (b + d)\omega.\end{aligned}$$

Untuk operasi pada ruas kanan menjadi:

$$\begin{aligned}\sigma(a + b\omega) + \sigma(c + d\omega) &= ((a - b) - b\omega) + ((c - d) - d\omega)\\ &= (a + c - b - d) - (b + d)\omega.\end{aligned}$$

Karena hasil pada ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka terbukti bahwa $\sigma((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \sigma(a + b\omega) + \sigma(c + d\omega)$.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\sigma((a + b\omega)(c + d\omega)) = \sigma(a + b\omega)\sigma(c + d\omega)$.

Untuk operasi pada ruas kiri menjadi;

$$\begin{aligned}\sigma((a + b\omega)(c + d\omega)) &= \sigma((ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega)\\ &= ((ac - bd) - (ad + bc - bd)) - (ad + bc - bd)\omega\\ &= (ac - ad - bc) - (ad + bc - bd)\omega.\end{aligned}$$

Untuk operasi pada ruas kanan menjadi:

$$\begin{aligned}\sigma(a + b\omega)\sigma(c + d\omega) &= ((a - b) - b\omega)((c - d) - d\omega)\\ &= [(ac + bd - ad - bc) - (bc - bd)\omega] - [(ad - bd)\omega + bd\omega^2]\\ &= [(ac + bd - ad - bc) - (bc - bd)\omega] - [(ad - bd)\omega - bd(1 + \omega)]\\ &= (ac + bd - ad - bc - bd) - (bc - bd + ad - bd + bd)\omega\\ &= (ac - ad - bc) - (ad + bc - bd)\omega.\end{aligned}$$

Karena hasil pada ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka terbukti bahwa $\sigma((a+b\omega)(c+d\omega)) = \sigma(a+b\omega)\sigma(c+d\omega)$.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti bahwa σ merupakan endomorfisma gelanggang.

II) Didefinisikan pemetaan $\delta : R \rightarrow 0$ dengan $\delta(a+b\omega) = 0$, akan dibuktikan pemetaan δ merupakan σ-derivatif.

Ambil sebarang $m, n \in R$, dengan $m = (a+b\omega), n = (c+d\omega), \sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega$, dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

(i) Akan dibuktikan bahwa $\delta((a+b\omega)+(c+d\omega)) = \delta(a+b\omega)+\delta(c+d\omega)$.

Untuk operasi di ruas kiri menjadi:

$\delta((a+b\omega)+(c+d\omega)) = \delta((a+c)+(b+d)\omega) = 0.$

Untuk operasi di ruas kanan menjadi:

$\delta(a+b\omega)+\delta(c+d\omega) = 0+0 = 0.$

Karena hasil operasi pada ruas kiri dan kanan sama, maka terbukti bahwa $\delta((a+b\omega)+(c+d\omega)) = \delta(a+b\omega)+\delta(c+d\omega)$.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$\delta((a+b\omega)(c+d\omega)) = \sigma(a+b\omega)\delta(c+d\omega) + (\delta(a+b\omega))(c+d\omega)$.

Untuk operasi di ruas kiri menjadi:

$\delta((a+b\omega)(c+d\omega)) = \delta((ac-bd)+(ad+bc-bd)\omega) = 0.$

Untuk operasi di ruas kanan menjadi:

$\sigma(a+b\omega)\delta(c+d\omega) + (\delta(a+b\omega))(c+d\omega) = \sigma(a+b\omega)(0) + (0)(c+d\omega) = 0$

Karena hasil operasi pada ruas kiri dan operasi pada ruas kanan sama, maka terbukti bahwa $\delta((a+b\omega)(c+d\omega)) = \sigma(a+b\omega)\delta(c+d\omega) + (\delta(a+b\omega))(c+d\omega)$.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti bahwa pemetaan δ merupakan σ-derivatif.

Berdasarkan I) dan II), maka terbukti bahwa $R[x;\sigma]$ adalah gelanggang polinomial miring. ■

Teorema 4.1.2. *Diberikan himpunan*

$$R = \{a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \ \in \mathbb{Z}\}.$$

Didefinisikan pemetaan σ : R→R dengan aturan

$$\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega,$$

dan δ_1: R→R dengan aturan

$$\delta_1(a + b\omega) =- b,$$

maka R[x;σ,δ_1] adalah gelanggang polinomial miring.

Bukti:

Karena sebelumnya telah dibuktikan bahwa $\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega$ merupakan endomorfisma gelanggang, maka hanya perlu dibuktikan bahwa $\delta_1(a + b\omega) =- b$ merupakan σ-derivatif dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Didefinisikan pemetaan $\delta_1 \ : \ R \rightarrow R$ dengan $\delta_1(a + b\omega) =- b$, akan dibuktikan pemetaan δ_1 merupakan σ-derivatif.

Ambil sebarang $m, n \in R$, dengan $m = (a + b\omega), n = (c + d\omega), \sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega$, dan *a,b,c,d* ∈ ℤ .

(i) Akan dibuktikan bahwa $\delta_1((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \delta_1(a + b\omega) + \delta_1(c + d\omega)$.

Untuk operasi di ruas kiri menjadi:

$\delta_1((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \delta_1((a + c) + (b + d)\omega) =- (b + d)$.

Untuk operasi di ruas kanan menjadi:

$\delta_1(a + b\omega) + \delta_1(c + d\omega) =- b + (- d) =- (b + d)$.

Karena hasil operasi pada ruas kiri dan kanan sama, maka terbukti bahwa $\delta_1((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \delta_1(a + b\omega) + \delta_1(c + d\omega)$.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$\delta_1((a + b\omega)(c + d\omega)) = \sigma(a + b\omega)\delta_1(c + d\omega) + (\delta_1(a + b\omega))(c + d\omega)$.

Untuk operasi di ruas kiri menjadi:

$$\begin{aligned} \delta_1((a + b\omega)(c + d\omega)) &= \delta_1((ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega) \\ &=- (ad + bc - bd). \end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan menjadi:

$$\sigma(a + b\omega)\delta_1(c + d\omega) + (\delta_1(a + b\omega))(c + d\omega) = ((a - b) - b\omega)(- d) + (- b)(c + d\omega)$$

$$= -ad + bd + bd\omega - bc - bd\omega$$
$$= -(ad + bc - bd).$$

Karena hasil operasi pada ruas kiri dan operasi pada ruas kanan sama, maka terbukti bahwa $\delta_1((a + b\omega)(c + d\omega)) = \sigma(a + b\omega)\delta_1(c + d\omega) + (\delta_1(a + b\omega))(c + d\omega)$.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti bahwa pemetaan δ_1 merupakan σ-derivatif.

Selanjutnya, karena σ merupakan endomorfisma gelanggang dan δ_1 merupakan σ-derivatif, maka terbukti bahwa $R[x;\sigma,\delta_1]$ adalah gelanggang polinomial miring. ■

Teorema 4.1.3. *Diberikan himpunan*

$$R = \{a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Didefinisikan pemetaan $\sigma : R \to R$ dengan aturan

$$\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega,$$

dan δ_2: $R \to R$ dengan aturan

$$\delta_2(a + b\omega) = -(b + b\omega),$$

maka $R[x;\sigma,\delta_2]$ adalah gelanggang polinomial miring.

Bukti:

Karena sebelumnya telah dibuktikan bahwa $\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega$ merupakan endomorfisma gelanggang, maka hanya perlu dibuktikan bahwa $\delta_2(a + b\omega) = -(b + b\omega)$ merupakan σ-derivatif.

Ambil sebarang $m, n \in R$, dengan $m = (a + b\omega), n = (c + d\omega), \sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega$, dan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

(i) Akan dibuktikan bahwa $\delta_2((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \delta_2(a + b\omega) + \delta_2(c + d\omega)$.

Untuk operasi di ruas kiri menjadi:

$$\delta_2((a + b\omega) + (c + d\omega)) = \delta_2((a + c) + (b + d)\omega)$$
$$= -(b + d) - (b + d)\omega.$$

Untuk operasi di sebelah kanan menjadi:

$$\delta_2(a + b\omega) + \delta_2(c + d\omega) = -(b + b\omega) - (d + d\omega)$$

$$=-(b+d)-(b+d)\omega.$$

Karena hasil operasi pada ruas kiri dan kanan sama, maka terbukti bahwa $\delta_2((a+b\omega)+(c+d\omega))=\delta_2(a+b\omega)+\delta_2(c+d\omega)$.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$$\delta_2((a+b\omega)(c+d\omega))=\sigma(a+b\omega)\delta_2(c+d\omega)+(\delta_2(a+b\omega))(c+d\omega).$$

Untuk operasi di ruas kiri menjadi:

$$\begin{aligned}\delta_2((a+b\omega)(c+d\omega)) &= \delta_2((ac-bd)+(ad+bc-bd)\omega)\\ &=-(ad+bc-bd)-(ad+bc-bd)\omega.\end{aligned}$$

Untuk operasi di ruas kanan menjadi:

$$\begin{aligned}\sigma(a+b\omega)\delta_2(c+d\omega)+(\delta_2(a+b\omega))(c+d\omega) &=-((a-b)-b\omega)(d+d\omega)-(b+b\omega)(c+d\omega)\\ &=-[(ad-bd)+(ad-bd-bd)\omega-bd\omega^2)]-[bc+(bc+bd)\omega+bd\omega^2)\\ &=-[(ad-bd)+(ad-bd-bd)\omega+bd(1+\omega)]-[bc+(bc+bd)\omega-bd(1+\omega)]\\ &=-[(ad-bd+bd)+(ad-bd-bd+bd)\omega]-[(bc-bd)+(bc+bd-bd)\omega]\\ &=-(ad+bc-bd)-(ad+bc-bd)\omega.\end{aligned}$$

Karena hasil operasi pada ruas kiri dan operasi pada ruas kanan sama, maka terbukti bahwa $\delta_2((a+b\omega)(c+d\omega))=\sigma(a+b\omega)\delta_2(c+d\omega)+(\delta_2(a+b\omega))(c+d\omega)$.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti bahwa pemetaan δ_2 merupakan σ-derivatif.

Selanjutnya, karena σ merupakan endomorfisma gelanggang dan δ_2 merupakan σ-derivatif, maka terbukti bahwa $R[x;\sigma,\delta_2]$ adalah gelanggang polinomial miring. ■

4.2. Bentuk x^n dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Di bagian pembahasan ini, disajikan bentuk x^n dari gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma]$ dan $R[x;\sigma,\delta_1]$ yang telah diperoleh sebelumnya.

Teorema 4.2.1. *Diberikan himpunan*

$$R = \{a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \ \in \mathbb{Z}\}.$$

Didefinisikan pemetaan σ : R→R dengan aturan

$$\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega.$$

Maka dalam gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma]$ *berlaku:*

(i) Untuk setiap $n = 2m, m \in \mathbb{N}$*:*

$$x^n(a + b\omega) = (a + b\omega)x^n$$

(ii) Untuk setiap $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$*:*

$$x^n(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x^n.$$

Bukti:

Dengan menggunakan induksi matematika,

I) Untuk $n = 2m, m \in \mathbb{N}$,

i) Uji untuk $m = 1$. Akan dibuktikan $x^2(a + b\omega) = (a + b\omega)x^2$.

$$x^2(a + b\omega) = x(\sigma(a + b\omega))x = x(a - b - b\omega)x = \sigma(a - b - b\omega)x^2$$
$$= (a + b\omega)x^2.$$

Jadi, terbukti benar untuk $m = 1$.

ii) Asumsikan $x^{2i}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan $x^{2i+2}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i+2}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x^{2i+2}(a + b\omega) &= x^{2i}(x^2(a + b\omega)) \\ &= x^{2i}((a + b\omega)x^2) \\ &= (x^{2i}(a + b\omega))x^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Karena $x^{2i}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i}$ diasumsikan benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, subtitusi nilai $x^{2i}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i}$ ke persamaan (4.11) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x^{2i+2}(a + b\omega) &= (x^{2i}(a + b\omega))x^2 \\ &= ((a + b\omega)x^{2i})x^2 \\ &= (a + b\omega)x^{2i+2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Jadi, terbukti benar untuk setiap $n = 2i + 2, i \in \mathbb{N}$. Sehingga, terbukti bahwa $x^n(a + b\omega) = (a + b\omega)x^n$ benar untuk setiap $n = 2m, m \in \mathbb{N}$.

II) Untuk $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$,

i) Uji untuk $m = 1$. Akan dibuktikan $x^1(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x^1$.

$x^1(a+b\omega) = \sigma(a+b\omega)x^1 = (a-b-b\omega)x^1$.

Jadi, terbukti benar untuk $m = 1$.

ii) Asumsikan $x^{2i-1}(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^{2i-1}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan $x^{2i+1}(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^{2i+1}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

$$x^{2i+1}(a+b\omega) = x^{2i-1}(x^2(a+b\omega)) = x^{2i-1}((a+b\omega)x^2)$$
$$= (x^{2i-1}(a+b\omega))x^2. \qquad (4.13)$$

Karena $x^{2i-1}(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^{2i-1}$ diasumsikan benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, subtitusi nilai $x^{2i-1}(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^{2i-1}$ ke persamaan (4.13) sehingga diperoleh:

$$x^{2i+1}(a+b\omega) = (x^{2i-1}(a+b\omega))x^2 = ((a-b-b\omega)x^{2i-1})x^2$$
$$= (a-b-b\omega)x^{2i-1+2} = (a-b-b\omega)x^{2i+1}. \qquad (4.14)$$

Jadi, terbukti benar untuk setiap $n = 2i+1, i \in \mathbb{N}$. Sehingga, terbukti bahwa $x^n(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^n$ benar untuk setiap $n = 2m-1, m \in \mathbb{N}$.

Karena I) dan II) dipenuhi, maka terbukti benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. ∎

Selanjutnya, dicari pula bentuk x^n dari $R[x;\sigma,\delta_1]$ yang kemudian disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2.2. *Diberikan himpunan*

$$R = \{a+b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Didefinisikan pemetaan σ : R→R dengan aturan

$$\sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega,$$

dan δ_1: R→R dengan aturan

$$\delta_1(a+b\omega) = -b.$$

Maka dalam gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma,\delta_1]$ berlaku:

(i) Untuk setiap $n = 2m, m \in \mathbb{N}$:

$$x^n(a+b\omega) = (a+b\omega)x^n$$

(ii) Untuk setiap $n = 2m-1, m \in \mathbb{N}$:

$$x^n(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^n - bx^{n-1}.$$

Bukti:

Dengan menggunakan induksi matematika,

I) Untuk $n = 2m, m \in \mathbb{N}$,

i) Uji untuk *m* = 1. Akan dibuktikan bahwa $x^2(a + b\omega) = (a + b\omega)x^2$.

$$
\begin{aligned}
x^2(a + b\omega) &= x[(a - b - b\omega)x - b] \\
&= (x(a - b - b\omega))x - bx \\
&= (a + b\omega)x^2 + bx - bx \\
&= (a + b\omega)x^2
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti benar untuk *m* = 1.

ii) Asumsikan $x^{2i}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan $x^{2i+2}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i+2}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
x^{2i+2}(a + b\omega) &= x^{2i}(x^2(a + b\omega)) \\
&= x^{2i}((a + b\omega)x^2) \\
&= (x^{2i}(a + b\omega))x^2. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Karena $x^{2i}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i}$ diasumsikan benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, subtitusi nilai $x^{2i}(a + b\omega) = (a + b\omega)x^{2i}$ ke persamaan (4.15) sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x^{2i+2}(a + b\omega) &= (x^{2i}(a + b\omega))x^2 \\
&= ((a + b\omega)x^{2i})x^2 \\
&= (a + b\omega)x^{2i+2}. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti benar untuk setiap $n = 2i + 2, i \in \mathbb{N}$. Sehingga, $x^n(a + b\omega) = (a + b\omega)x^n$ benar untuk setiap $n = 2m, m \in \mathbb{N}$.

II) Untuk $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$,

i) Uji untuk *m* = 1. Akan dibuktikan $x(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x - b$.

$x(a + b\omega) = \sigma(a + b\omega)x + \delta_1(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x - b$.

Jadi, terbukti benar untuk *m* = 1.

ii) Asumsikan $x^{2i-1}(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x^{2i-1} - bx^{2i-2}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan $x^{2i+1}(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x^{2i+1} - bx^{2i}$ benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
x^{2i+1}(a + b\omega) &= x^{2i-1}(x^2(a + b\omega)) = x^{2i-1}((a + b\omega)x^2) \\
&= (x^{2i-1}(a + b\omega))x^2. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Karena $x^{2i-1}(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^{2i-1} - bx^{2i-2}$ diasumsikan benar untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, subtitusi nilai $x^{2i-1}(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^{2i-1} - bx^{2i-2}$ ke persamaan (4.17) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x^{2i+1}(a+b\omega) &= (x^{2i-1}(a+b\omega))x^2 \\ &= ((a-b-b\omega)x^{2i-1} - bx^{2i-2})x^2 \\ &= (a-b-b\omega)x^{2i-1+2} - bx^{2i-2+2} \\ &= (a-b-b\omega)x^{2i+1} - bx^{2i}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Jadi, terbukti benar untuk setiap $n = 2i+1, i \in \mathbb{N}$. Sehingga, $x^n(a+b\omega) = (a-b-b\omega)x^n - bx^{n-1}$ benar untuk setiap $n = 2m-1, m \in \mathbb{N}$.

Karena I) dan II) dipenuhi, maka terbukti benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. ■

4.3. Pusat dari Gelanggang Polinomial Miring atas Gelanggang Bilangan Bulat Eisenstein

Dalam pokok pembahasan ini dibahas mengenai pusat dari gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma]$ dan $R[x;\sigma,\delta_1]$ yang telah diperoleh sebelumnya.

Teorema 4.3.1. *Misalkan R[x;σ] dengan*

$$R = \{z = a+b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

dan

$$\sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega;$$

adalah gelanggang polinomial miring, maka pusat dari R[x;σ] adalah

$$Z(R[x;\sigma]) = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Bukti:

(I) Akan dibuktikan bahwa

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq Z(R[x;\sigma]).$$

Misalkan, ambil sebarang

$$p(x) \in \left\{\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}$$

dengan $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i}$.

Akan ditunjukkan bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x), \forall q(x) \in R[x;\sigma]$. Tanpa mengurangi keumuman, pembuktian akan dilakukan dengan dua kasus $q(x)$ sebagai berikut.

i) Asumsikan $q(x) = (c + d\omega)$.

$$p(x)q(x) = \left[\sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i}\right](c + d\omega) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}[x^{2i}(c + d\omega)]. \quad (4.19)$$

Karena $x^{2i}(c + d\omega) = (c + d\omega)x^{2i}, \forall i \in \mathbb{N}$, maka persamaan (4.19) menjadi:

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}(c + d\omega)x^{2i} = (c + d\omega)\sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i}$$

$$= q(x)p(x) \quad (4.20)$$

Sehingga, berdasarkan (4.20), terbukti bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x)$.

ii) Asumsikan $q(x) = x$.

$$p(x)q(x) = \left[\sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i}\right]x = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}[x^{2i}x] = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i+1}. \quad (4.21)$$

Selanjutnya, untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$q(x)p(x) = x\left[\sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i}\right] = xb_0 + x(b_2)x^2 + \ldots + x(b_{2n})x^{2n}.$$

Karena $x(b_{2i}) = \sigma(b_{2i})x = b_{2i}x$, maka persamaan di atas menjadi:

$$q(x)p(x) = b_0x + (b_2)x^3 + \ldots + (b_{2n})x^{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}x^{2i+1}. \quad (4.22)$$

Sehingga, berdasarkan (4.21) dan (4.22) terbukti bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x)$.

Karena $p(x)$ komutatif dengan $(c + d\omega)$ dan x, maka

$$[p(x)][(c + d\omega)x] = [p(x)](c + d\omega)(x) = (c + d\omega)[p(x)](x) = [(c + d\omega)x][p(x)].$$

Kemudian karena $p(x)$ komutatif dengan x, maka

$$[p(x)]x^2 = [p(x)](x)(x) = (x)[p(x)](x) = (x)(x)[p(x)] = x^2[p(x)]$$

$$[p(x)]x^3 = [p(x)](x^2)(x) = (x^2)[p(x)](x) = (x^2)(x)[p(x)] = x^3[p(x)]$$

$$[p(x)]x^4 = [p(x)](x^3)(x) = (x^3)[p(x)](x) = (x^3)(x)[p(x)] = x^4[p(x)]$$

$$\vdots$$

$$[p(x)]x^n = x^n[p(x)].$$

Selanjutnya, karena untuk sebarang $q(x) \in R[x;\sigma]$ dapat dituliskan sebagai kombinasi dari dua hal yang telah diuraikan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa

$$p(x)q(x) = q(x)p(x), \forall q(x) \in R[x;\sigma].$$

Sehingga, $p(x) \in Z(R[x;\sigma])$.

Karena sebelumnya diambil sebarang $p(x)$, maka

$$\forall p(x) \in \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z} \right\},\ p(x) \in Z(R[x;\sigma]).$$

Akibatnya,

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq Z(R[x;\sigma]).$$

(II) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

$$Z(R[x;\sigma]) \subseteq \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Misalkan $p(x) \in Z(R[x;\sigma])$ dengan

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} (c_j + d_j\omega)x^j,$$

sedemikian sehingga $p(x)q(x) = q(x)p(x), \forall q(x) \in R[x;\sigma]$.

Pilih $q(x) = \omega$, sehingga:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \left[\sum_{j=0}^{m} (c_j + d_j\omega)x^j\right]\omega \\ &= (c_0 + d_0\omega)(\omega) + (c_1 + d_1\omega)x^1(\omega) + (c_2 + d_2\omega)x^2(\omega) + \\ &\quad \ldots + (c_m + d_m\omega)x^m(\omega). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Karena bentuk x^j untuk j bilangan asli ganjil dan genap berbeda, maka persamaan (4.23) kemudian dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

Untuk j bilangan asli genap dengan $j = 2,4,\ldots,m$; maka:

$$p(x)q(x) = [(c_0 + d_0\omega)\omega + (c_2 + d_2\omega)\omega x^2 + \ldots + (c_m + d_m\omega)\omega x^m] \tag{4.24}$$

Untuk j bilangan asli ganjil dengan $j = 1,3,\ldots,m$; maka:

$$p(x)q(x) = -[(c_1 + d_1\omega)(1 + \omega)x^1 + (c_3 + d_3\omega)(1 + \omega)x^3 + \ldots + (c_m + d_m\omega)(1 + \omega)x^m]. \tag{4.25}$$

Selanjutnya, untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= \omega\left[\sum_{j=0}^{m} (c_j + d_j\omega)x^j\right] \\ &= \omega(c_0 + d_0\omega) + \omega(c_1 + d_1\omega)x^1 + \omega(c_2 + d_2\omega)x^2 + \ldots + \\ &\quad \omega(c_m + d_m\omega)x^m. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Karena $p(x)q(x) = q(x)p(x)$, maka berdasarkan penjumlahan dari persamaan (4.24) dan (4.25) sama dengan persamaan (4.26) diperoleh bahwa:

$$c_j = d_j = 0, j = 1,3,\ldots,m.$$

Sehingga, $p(x)$ dapat ditulis menjadi:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} (c_{2j} + d_{2j}\omega)x^{2j}.$$

Selanjutnya, pilih $q(x) = x$.

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \left[\sum_{j=0}^{m} (c_{2j} + d_{2j}\omega)x^{2j}\right] x \\ &= (c_0 + d_0\omega)x + (c_2 + d_2\omega)x^3 + (c_4 + d_4\omega)x^5 + \ldots + \\ &\quad (c_{2m} + d_{2m}\omega)x^{2m+1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= x\left[\sum_{j=0}^{m} (c_{2j} + d_{2j}\omega)x^{2j}\right] \\ &= x(c_0 + d_0\omega) + x(c_2 + d_2\omega)x^2 + x(c_4 + d_4\omega)x^4 + \\ &\quad \ldots + x(c_{2m} + d_{2m}\omega)x^{2m} \\ &= (c_0 - d_0 - d_0\omega)x + (c_2 - d_2 - d_2\omega)x^3 + (c_4 - d_4 - \\ &\quad d_4\omega)x^5 + \ldots + (c_{2m} - d_{2m} - d_{2m}\omega)x^{2m+1}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Karena $p(x)q(x) = q(x)p(x)$, maka dari persamaan (4.27) dan (4.28) diperoleh bahwa:

$$d_0 = d_2 = d_4 = \ldots = d_{2m} = 0.$$

Sehingga, $p(x)$ dapat ditulis menjadi:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} c_{2j}x^{2j}.$$

Akibatnya, $p(x) \in \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Karena sebelumnya diambil sebarang $p(x)$, maka

$$\forall p(x) \in Z(R[x;\sigma]),\ p(x) \in \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jadi, terbukti bahwa $Z(R[x;\sigma]) \subseteq \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Berdasarkan (I) dan (II), maka dapat disimpulkan bahwa:

$$Z(R[x;\sigma]) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}.$$ ■

Contoh 4.3.1. Misalkan $p(x) = (2 + 3\omega)x^2 + (1 + \omega)x \in R[x;\sigma]$, $q(x) = 4x^2 + 3 \in Z(R[x;\sigma])$ dengan $\sigma(a + b\omega) = a - b - b\omega$. Maka $p(x)q(x) = q(x)p(x)$.

Bukti:

(i) Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= [(2+3\omega)x^2 + (1+\omega)x][4x^2+3] \\ &= [(2+3\omega)x^2(4x^2+3)] + [(1+\omega)x(4x^2+3)] \\ &= (2+3\omega)[x^2(4)x^2 + x^2(3)] + (1+\omega)[x(4)x^2 + x(3)]. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.1., $x^n(a) = ax^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Sehingga, persamaan di atas menjadi:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (2+3\omega)[4x^4+3x^2] + (1+\omega)[4x^3+3x] \\ &= (8+12\omega)x^4 + (4+4\omega)x^3 + (6+9\omega)x^2 + (3+3\omega)x. \end{aligned}$$

(ii) Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= [4x^2+3][(2+3\omega)x^2 + (1+\omega)x] \\ &= 4[x^2(2+3\omega)x^2 + x^2(1+\omega)x] + 3[(2+3\omega)x^2 + (1+\omega)x]. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.1., $x^2(a+b\omega) = (a+b\omega)x^2$. Sehingga, persamaan di atas menjadi:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= 4[(2+3\omega)x^4 + (1+\omega)x^3] + 3[(2+3\omega)x^2 + (1+\omega)x] \\ &= (8+12\omega)x^4 + (4+4\omega)x^3 + (6+9\omega)x^2 + (3+3\omega)x \\ &= p(x)q(x). \end{aligned}$$

Karena hasil pada ruas kiri dan ruas kanan sama, maka terbukti bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x)$. ■

Teorema 4.3.2. *Misalkan* $R[x;\sigma,\delta_1]$*dengan*

$$R = \{z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega,$$

dan

$$\delta_1(a+b\omega) = -b;$$

adalah gelanggang polinomial miring, maka pusat dari $R[x;\sigma,\delta_1]$ *adalah*

$$Z(R[x;\sigma,\delta_1]) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bukti:

(I) Akan dibuktikan bahwa

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq Z(R[x;\sigma,\delta_1]).$$

Misalkan, ambil sebarang

$$p(x) \in \{ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i} x^{2i} \mid a_{2i} \in \mathbb{Z}\}$$

dengan $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i}$.

Akan ditunjukkan bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x), \forall q(x) \in R[x;\sigma,\delta_1]$. Tanpa mengurangi keumuman, pembuktian akan dilakukan dengan dua kasus $q(x)$ sebagai berikut.

i) Asumsikan $q(x) = (c + d\omega)$.

$$p(x)q(x) = \left[\textstyle\sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i}\right](c + d\omega) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}[x^{2i}(c + d\omega)]. \quad (4.29)$$

Karena $x^{2i}(c + d\omega) = (c + d\omega)x^{2i}, \forall i \in \mathbb{N}$, maka persamaan (4.29) menjadi:

$$p(x)q(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} b_{2i}(c + d\omega)x^{2i} = (c + d\omega)\sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i}. \quad (4.30)$$

Selanjutnya, untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$q(x)p(x) = (c + d\omega)\textstyle\sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i}. \quad (4.31)$$

Sehingga, berdasarkan (4.30) dan (4.31) terbukti bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x)$.

ii) Asumsikan $q(x) = x$.

$$p(x)q(x) = \left[\textstyle\sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i}\right]x = \sum_{i=0}^{n} b_{2i}[x^{2i}(1)x] = \sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i+1}. \quad (4.32)$$

Selanjutnya, untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$q(x)p(x) = x\left[\textstyle\sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i}\right] = xb_0 + x(b_2)x^2 + \ldots + x(b_{2n})x^{2n}.$$

Karena $x(b_{2i}) = \sigma(b_{2i})x = b_{2i}x$, maka persamaan di atas menjadi:

$$q(x)p(x) = b_0 x + (b_2)x^3 + \ldots + (b_{2n})x^{2n+1} = \textstyle\sum_{i=0}^{n} b_{2i} x^{2i+1}. \quad (4.33)$$

Sehingga, berdasarkan (4.32) dan (4.33) terbukti bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x)$.

Karena $p(x)$ komutatif dengan $(c + d\omega)$ dan x, maka

$$[p(x)][(c + d\omega)x] = [p(x)](c + d\omega)(x) = (c + d\omega)[p(x)](x) = [(c + d\omega)x][p(x)].$$

Kemudian karena $p(x)$ komutatif dengan x, maka

$$[p(x)]x^2 = [p(x)](x)(x) = (x)[p(x)](x) = (x)(x)[p(x)] = x^2[p(x)]$$

$$[p(x)]x^3 = [p(x)](x^2)(x) = (x^2)[p(x)](x) = (x^2)(x)[p(x)] = x^3[p(x)]$$

$$[p(x)]x^4 = [p(x)](x^3)(x) = (x^3)[p(x)](x) = (x^3)(x)[p(x)] = x^4[p(x)]$$

$$\vdots$$

$$[p(x)]x^n = x^n[p(x)].$$

Selanjutnya, karena untuk sebarang $q(x) \in R[x;\sigma,\delta_1]$ dapat dituliskan sebagai kombinasi dari dua hal yang telah diuraikan, maka dapat disimpulkan bahwa

$$p(x)q(x) = q(x)p(x), \forall q(x) \in R[x;\sigma,\delta_1].$$

Sehingga, $p(x) \in Z(R[x;\sigma,\delta_1])$.

Karena sebelumnya diambil sebarang $p(x)$, maka

$$\forall p(x) \in \left\{ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\},\ p(x) \in Z(R[x;\sigma,\delta_1]).$$

Akibatnya,

$$\left\{ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq Z(R[x;\sigma,\delta_1]).$$

(II) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

$$Z(R[x;\sigma,\delta_1]) \subseteq \left\{ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Misalkan $p(x) \in Z(R[x;\sigma,\delta_1])$ dengan

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} (c_j + d_j\omega)x^j\,,$$

sedemikian sehingga $p(x)q(x) = q(x)p(x), \forall q(x) \in R[x;\sigma,\delta_1]$.

Pilih $q(x) = x$, sehingga:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \left[\textstyle\sum_{j=0}^{m} (c_j + d_j\omega)x^j\right] x \\ &= (c_0 + d_0\omega)x + (c_1 + d_1\omega)x^2 + (c_3 + d_3\omega)x^3 + \ldots + \\ &\quad (c_m + d_m\omega)x^{m+1}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Selanjutnya, untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= x\left[\textstyle\sum_{j=0}^{m} (c_j + d_j\omega)x^j\right] \\ &= x(c_0 + d_0\omega) + x(c_1 + d_1\omega)x^1 + x(c_2 + d_2\omega)x^2 + \\ &\quad \ldots + x(c_m + d_m\omega)x^m \\ &= [(c_0 - d_0 - d_0\omega)x + (c_1 - d_1 - d_1\omega)x^2 + (c_2 - d_2 - \\ &\quad d_2\omega)x^3 + \ldots + (c_m - d_m - d_m\omega)x^{m+1}] - [d_0 + d_1x^1 + \\ &\quad d_2x^2 + \ldots + d_mx^m] \\ &= [(c_0 - d_0 - d_1 - d_0\omega)x + (c_1 - d_1 - d_2 - d_1\omega)x^2 + (c_2 - \\ &\quad d_2 - d_3 - d_2\omega)x^3 + \ldots + (c_{m-1} - d_{m-1} - d_m - \\ &\quad d_{m-1}\omega)x^m + (c_m - d_m - d_m\omega)x^{m+1}] - d_0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Karena $p(x)q(x) = q(x)p(x)$, maka dari persamaan (4.34) dan (4.35) diperoleh bahwa:

$$d_0 = d_1 = d_2 = \ldots = d_m = 0.$$

Sehingga, $p(x)$ dapat ditulis menjadi:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j .$$

Selanjutnya, pilih $q(x) = \omega$, sehingga:

$$p(x)q(x) = \left[\sum_{j=0}^{m} c_j x^j\right]\omega$$

$$= (c_0)(\omega) + (c_1)x^1(\omega) + (c_2)x^2(\omega) + \ldots + (c_m)x^m(\omega).$$

Karena bentuk x^j untuk j bilangan asli ganjil dan genap berbeda, maka persamaan di atas dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

Untuk j bilangan asli genap, dengan $j = 2,4, \ldots, m$; maka:

$$p(x)q(x) = [(c_0\omega) + (c_2\omega)x^2 + \ldots + (c_m\omega)x^m] \tag{4.36}$$

Untuk j bilangan asli ganjil, dengan $j = 1,3, \ldots, m$; maka:

$$p(x)q(x) =- [(c_1)(1+\omega)x^1 + (c_3)(1+\omega)x^3 + \ldots + (c_m)(1+\omega)x^m] - [c_1 + c_3x^2 + c_5x^4 + \ldots + c_mx^{m-1}]. \tag{4.37}$$

Untuk $q(x)p(x)$ diperoleh:

$$q(x)p(x) = \omega\left[\sum_{j=0}^{m} c_j x^j\right]$$

$$= \omega(c_0) + \omega(c_1)x^1 + \omega(c_2)x^2 + \ldots + \omega(c_m)x^m. \tag{4.38}$$

Karena $p(x)q(x) = q(x)p(x)$, maka berdasarkan penjumlahan dari persamaan (4.36) dan (4.37) sama dengan persamaan (4.38) diperoleh bahwa:

$$c_j = 0, j = 1,3,5, \ldots, m.$$

Sehingga, $p(x)$ dapat ditulis menjadi:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} c_{2j} x^{2j} .$$

Akibatnya, $p(x) \in \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Karena sebelumnya diambil sebarang $p(x)$, maka

$$\forall p(x) \in Z(R[x;\sigma,\delta_1]),\ p(x) \in \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jadi, terbukti bahwa $Z(R[x;\sigma,\delta_1]) \subseteq \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Berdasarkan (I) dan (II), maka dapat disimpulkan bahwa:

$$Z(R[x;\sigma,\delta_1]) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \;\middle|\; a_{2i} \in \mathbb{Z}\right\}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.3.2. Misalkan $p(x) = (5-2\omega)x^2 + (3+\omega)x \in R[x;\sigma,\delta_1]$, $q(x) = 5x^4 - 4x^2 + 6 \in Z(R[x;\sigma,\delta_1])$ dengan $\sigma(a+b\omega) = a - b - b\omega$ dan $\delta(a+b\omega) =- b$. Maka $p(x)q(x) = q(x)p(x)$.

Bukti:

(i) Untuk operasi di ruas kiri:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= [(5-2\omega)x^2 + (3+\omega)x][5x^4 - 4x^2 + 6] \\ &= [(5-2\omega)x^2(5x^4 - 4x^2 + 6)] + [(3+\omega)x(5x^4 - 4x^2 + 6)] \\ &= (5-2\omega)[x^2(5)x^4 - x^2(4)x^2 + x^2(6)] + (3+\omega)[x(5)x^4 - x(4)x^2 + x(6)]. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.2., $x^n(a) = ax^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Sehingga, persamaan di atas menjadi:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (5-2\omega)[5x^6 - 4x^4 + 6x^2] + (3+\omega)[5x^5 - 4x^3 + 6x] \\ &= (25-10\omega)x^6 + (15+5\omega)x^5 - (20-8\omega)x^4 - (12+4\omega)x^3 + (30-12\omega)x^2 + (18+6\omega)x. \end{aligned}$$

(ii) Untuk operasi di ruas kanan:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= [5x^4 - 4x^2 + 6][(5-2\omega)x^2 + (3+\omega)x] \\ &= 5[x^4(5-2\omega)x^2 + x^4(3+\omega)x] - 4[x^2(5-2\omega)x^2 + x^2(3+\omega)x] + 6[(5-2\omega)x^2 + (3+\omega)x]. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.2., $x^n(a+b\omega) = (a+b\omega)x^n, \forall n = 2m, m \in \mathbb{N}$. Sehingga, persamaan di atas menjadi:

$$\begin{aligned} q(x)p(x) &= 5[(5-2\omega)x^6 + (3+\omega)x^5] - 4[(5-2\omega)x^4 + (3+\omega)x^3] + 6[(5-2\omega)x^2 + (3+\omega)x] \\ &= (25-10\omega)x^6 + (15+5\omega)x^5 - (20-8\omega)x^4 - (12+4\omega)x^3 + (30-12\omega)x^2 + (18+6\omega)x \\ &= p(x)q(x). \end{aligned}$$

Karena hasil pada ruas kiri dan ruas kanan sama, maka terbukti bahwa $p(x)q(x) = q(x)p(x)$. ∎

BAB V
PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Bentuk endomorfisma dan σ-derivatif dari gelanggang bilangan bulat Eisenstein dengan $R = \{z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | \, a, b \ \in \mathbb{Z}\}$ secara berturut-turut didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\sigma : R \rightarrow R$ dengan aturan $\sigma(a + b\omega) = (a - b) - b\omega$ dan $\delta_1 : R \rightarrow R$ dengan aturan $\delta_1(a + b\omega) =- b$. Selanjutnya, dengan bentuk endomorfisma yang sama diperoleh pula σ-derivatif yang didefinisikan sebagai $\delta_2 : R \rightarrow R$ dengan aturan $\delta_2(a + b\omega) =- (b + b\omega)$. Sehingga diperoleh bahwa $R\,[x; \sigma, \delta_1\,]$ dan $R\,[x; \sigma, \delta_2\,]$ adalah gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein.
2. Bentuk x^n dari beberapa gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein dengan $R = \{z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | \, a, b \ \in \mathbb{Z}\}$ adalah sebagai berikut.
   (a) Pada gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma]$ berlaku:
      (i) Untuk setiap $n = 2m, m \in \mathbb{N}$:
      $x^n(a + b\omega) = (a + b\omega)x^n$
      (ii) Untuk setiap $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$:
      $x^n(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x^n$.
   (b) Pada gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma, \delta_1]$ berlaku:
      (i) Untuk setiap $n = 2m, m \in \mathbb{N}$:
      $x^n(a + b\omega) = (a + b\omega)x^n$
      (ii) Untuk setiap $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$:
      $x^n(a + b\omega) = (a - b - b\omega)x^n - bx^{n-1}$.
3. Pusat dari beberapa gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein dengan $R = \{z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega] | \, a, b \ \in \mathbb{Z}\}$ adalah sebagai berikut.

(a) Pusat dari gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma]$ dengan $\sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega$ didefinisikan sebagai:

$$Z(R[x;\sigma]) = \{\ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i}\ \mid a_{2i} \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Pusat dari gelanggang polinomial miring $R\,[x;\,\sigma,\delta_1\,]$ dengan $\sigma(a+b\omega) = (a-b) - b\omega$ dan $\delta_1(a+b\omega) =- b$ didefinisikan sebagai:

$$Z(R[x;\sigma,\delta_1]) = \{\ \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i}\ \mid a_{2i} \in \mathbb{Z}\}.$$

5.2. Saran

Adapun saran dari penulis, kedepannya penelitian mengenai gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein dapat dilanjutkan dengan mencari bentuk endomorfisma dan sigma derivatif yang lain. Penelitian ini juga dapat dikembangkan dengan mengkaji sifat-sifat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang bilangan bulat Eisenstein selain yang telah diperoleh sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Afriani, Amir A.K., dan Erawaty N. (2014). Seputar Ideal dari Gelanggang Polinom Miring. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi,* 11(1), 56-62.

Alkam, O., dan Osba, E.A. (2010). On Eisenstein Integers Modulo *n*. *International Mathematics Forum,* 5(22), 1075-1082.

Amir, A.K. (2009). Pusat dari Beberapa Gelanggang Polinomial Miring. *Jurnal ILMU DASAR,* 10(2), 212-218.

Amir, A.K. (2010). Ideal Maksimal dan Prima dari Gelanggang Polinom Miring atas Daerah Bilangan Bulat Gauss. *MAKARA Journal of Science,* 14(2), 184-187.

Amir, A.K., dkk. (2018). Center of the Skew Polynomial Ring over Coquaternions. *Far East Journal of Mathematical Sciences,* 109(2), 261-272.

Djuddin, J., Amir, A.K., dan Bahri, M. (2016). The Ideal Form of the Skew Polynomial Ring over Quaternion. *International Journal of Engineering and Science Applications,* 3(1), 69-78.

Finston, D.R., dan Morandi P.J. (2014). *Abstract Algebra: Structure and Application.* Springer, New York.

Fraleigh, John B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra Seventh Edition.* Pearson, Inggris.

Jacobson, N. (1985). *Basic Algebra I Second Edition.* W.H. Freeman, New York.

Lovett, S. (2015). *Abstract Algebra: Structures and Applications.* CRC Press, Wheaton.

Misaghian, M. (2013). Factor Rings and Their Decompositions in the Eisenstein Integer Ring $\mathbb{Z}[\omega]$. *Armenian Journal of Mathematics,* 5(1), 58-68.

Parker, Z., Rushall, J. dan Hunt, J. (2016). *Perfect Numbers in the Ring of Eisenstein Integers.* Universitas Arizona Utara.

Wang, Y., Amir, A.K., dan Murabayashi, H. (2012). Prime Factor Rings of Skew Polynomial Rings over a Commutative Dedekind Domain. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 42(6), 2055-2073.