DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI SHACKLE GRAF SIKLUS C_3

SKRIPSI

ST. MUNIEROH FACHRUNNISA D.

H011181003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2022

DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI SHACKLE GRAF SIKLUS C_3

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ST. MUNIEROH FACHRUNNISA D.
H01118100

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
SEPTEMBER 2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: St. Munieroh Fachrunnisa D.
NIM	: H011181003
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Shackle Graf Siklus C_3

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan sripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 9 September 2022

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL DBD36AKX063055847

St. Munieroh Fachrunnisa D.
NIM. H011181003

LEMBAR PENGESAHAN

DIMENSI METRIK DARI HASIL OPERASI SHACKLE GRAF SIKLUS C_3

Disusun dan diajukan oleh

ST. MUNIEROH FACHRUNNISA D.

H011181003

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 9 September 2022

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19680803 199202 1 001**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala berkat limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sebagai Nabi yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul **"Dimensi Metrik Dari Hasil Operasi Shackle Graf Siklus C_3"**, sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, dan motivasi serta nasihat dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si.** selaku Ketua Dpartemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin dan Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
4. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing pertama dan juga Penasehat Akademik yang juga telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini, serta telah memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis selama menjalani pendidikan di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.

6. **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
7. **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku dosen penguji yang juga telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
8. Bapak/Ibu **Dosen Departemen Matematika FMIPA Unhas** atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah beliau berikan selama perkuliahan.
9. Bapak/Ibu pegawai/staff departemen, fakultas, dan universitas yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
10. Kedua orang tua penulis yaitu **Drs. Darwis Munir** dan **Fini Hasyim** yang dengan sabar telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa mendoakan dan mendukung atas setiap langkah perjalanan penulis. Terima kasih kepada **Alm. Kakak Arun** yang paling memotivasi penulis agar bisa menyelesaikan skripsi ini dan adik-adik serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Sahabat SMA **Girls Squad** yaitu **Putri, Dila, Dhita,** dan **Fani** yang tiada hentinya memberikan semangat saat memulai perkuliahan hingga akhir menyelesaikan skripsi ini.
12. Sahabat **Petir Geng** yaitu **Gresye, Afni, Hijrah, Aqiela, Ayu, Nanna** dan **Irfan** yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan dan saling memberikan semangat selama penyusunan skripsi ini, juga senantiasa memberikan dukungan dan bantuan, serta menjadi sahabat terbaik penulis sejak maba.
13. Teman-teman **Matematika 2018, Integral 2018,** dan **Anggota Himatika FMIPA Unhas** yang telah mendukung dan memberikan kenangan yang tidak akan penulis lupakan.
14. Teman-teman **KKN Unhas Gel.106 GOWA 3**, terima kasih untuk cerita dan kenangannya yang sangat berkesan serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
15. Kepada *moodbooster* penulis yaitu **EXO** dan **NCT** terutama **Baekhyun**, **Haechan,** dan **Jaemin** yang senantiasa menginspirasi dan menghibur penulis selama penyusunan skripsi.

16. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
17. *Last but not least. I wanna thank me, I wanna thank me for believing in me, I wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having no days off, I wanna thank me for never quitting, for just being me at all times.*

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis selama penyusunan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 9 September 2022

St. Munieroh Fachrunnisa D.

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : St. Munieroh Fachrunnisa D.
NIM : H011181003
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Shackle Graf Siklus C_3

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 9 September 2022

Yang menyatakan,

St. Munieroh Fachrunnisa D.

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf terhubung dan W adalah sub himpunan titik terurut pada graf terhubung G. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap titik pada graf G memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W. Himpunan pembeda dengan banyak anggota minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G dan kardinalitas himpunan tersebut adalah dimensi metrik pada graf G, dinotasikan dengan $dim(G)$. Dalam skipsi ini dibahas mengenai dimensi metrik hasil operasi shackle graf siklus C_3, $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \ldots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \ldots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) = 2$ untuk $k \geq 2$. Metode yang digunakan dalam membuktikan hasil tersebut adalah induksi matematika.

Kata Kunci : *Dimensi Metrik, Operasi Shackle, Graf Siklus.*

Judul	: Dimensi Metrik Dari Hasil Operasi Shackle Graf Siklus C_3
Nama	: St. Munieroh Fachrunnisa D.
NIM	: H011181003
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

Let G be a connected graph and W be a ordered vertices subset on a connected graph G. The set W is called resolving set for G if every vertex on graph G has distinct representation of W. A resolving set containing a minimum number of vertices is called resolving set minimum or basis for G and the cardinality of resolving set is the metric dimension on graph G, denoted by $dim(G)$. In the thesis discusses about metric dimensions of shackle operation C_3 cycle graph, $dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \ldots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \ldots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) = 2$ for $k \geq 2$. To proof this results, using mathematical induction method.

Keywords : *Metric Dimension, Shackle Operation, Cycle Graph.*

Title	: *Metric Dimensions of The Results of Shackle Operation C_3 Cycle Graph*
Name	: St. Munieroh Fachrunnisa D.
Student ID	: H011181003
Study Program	: *Mathematics*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang luas dan dapat diterapkan di berbagai bidang. Penerapan teori graf sangat membantu dalam menyelesaikan masalah, misalnya dalam topologi jaringan bidang ilmu komputer, riset operasi dan teknologi komunikasi. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Salah satu penelitian yang termasuk dalam bidang teori graf adalah dimensi metrik. Konsep dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, kemudian dilanjutkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 dalam jurnalnya yang berjudul *On the Metric Dimension of a Graph*. Pada jurnal itu diperkenalkan sebuah ide baru, yaitu representasi metrik yang merupakan suatu cara untuk merepresentasikan lokasi titik pada suatu graf.

Dalam penentuan dimensi metrik pada graf digunakan beberapa istilah seperti istilah jarak, himpunan pembeda dan basis. Diberikan suatu graf tak berarah dan terhubung G, jarak antara dua titik u dan v dinotasikan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf terhubung G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dan $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W dinotasikan $r(v|W)$ pasangan terurut k-*tuple* $r(v|W) = \left(d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k)\right)$. Jika titik-titik pada G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka W disebut himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Kardinalitas dari basis tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, dinotasikan dengan $dim\ (G)$ (Wahyudi, dkk., 2011).

Konsep dimensi metrik ini telah diaplikasikan oleh banyak peneliti dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan nyata. Slater mengaitkan permasalahan dimensi metrik dengan masalah jaringan. Pada tahun 1996, Khuller, ddk., menjelaskan aplikasi permasalahan dimensi metrik graf pada bidang sains komputasi dan robotika. Pada tahun 2000, Chartrand, dkk., juga mengaplikasikan himpunan pembeda dalam dimensi metrik pada bidang kimia.

Suatu graf baru dapat dibentuk dengan cara menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Salah satu operasi graf adalah operasi s*hackle*. Beberapa penelitian yang telah dilakukan terkait dengan dimensi metrik dalam operasi s*hackle* diantaranya, Ilham Saifuddin pada tahun 2015 dalam skripsi yang berjudul "Dimensi Partisi dari Graf Khusus dan Operasinya", ditemukan nilai dimensi metrik graf $Shack(C_4, v, n) = k$ dengan $k \geq 3$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$.

Pada tahun 2018, Marsidi, dkk., dalam jurnalnya "*On the Metric Dimension of Some Operation Graphs*" menemukan dimensi metrik graf $Shack(H_2^2, e, m)$. Dalam penelitian tersebut, Marsidi, dkk., menemukan dimensi metrik graf $Shack(H_2^2, e, m) = 2$ dengan $m \geq 2$.

Dari hasil penelitian tersebut menjadi acuan dalam mencari dimensi metrik dari graf yang diperoleh dari hasil operasi *shackle*. Graf yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah hasil operasi *shackle* graf siklus C_3 yang dinotasikan $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$. Oleh karena itu, penulis mendapatkan suatu permasalahan baru yang dapat dikaji menjadi suatu bentuk penelitian yaitu "Dimensi Metrik dari Hasil Operasi Shackle Graf Siklus C_3".

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penentuan dimensi metrik terlebih dahulu dibentuk satu himpunan titik yang merupakan himpunan pembeda minimum. Himpunan pembeda minimum disebut basis dan kardinalitas dari basis adalah dimensi metrik dari graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$. Oleh karena itu, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan himpunan pembeda minimum atau basis dari graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ untuk mendapatkan dimensi metrik.

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas dan melebar, maka diberikan batasan masalah yaitu penelitian ini hanya mencakup pada penentuan dimensi metrik graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ untuk $k \geq 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan dimensi metrik graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian diatas, maka diharapkan dalam penulisan skripsi ini dapat menambah pemahaman baru tentang konsep teori graf, khususnya pada kajian dimensi metrik hasil operasi shackle suatu graf dan dapat menjadi referensi bagi peneliti lain terkait dimensi metrik ke depannya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas beberapa materi yang dijadikan landasan teori untuk memahami penentuan dimensi metrik suatu graf, khususnya graf siklus C_3. Materi tersebut meliputi dasar-dasar graf, operasi dalam graf dan dimensi metrik. Adapun definisi, istilah, dan notasi yang dibahas pada bab ini umumnya paling banyak dikutip dari buku Prof. Hasmawati, M.Si. yang berjudul "Pengantar dan Jenis-jenis Graf" tahun 2020.

2.1 Dasar-dasar Graf

Pada Subbab 2.1 ini disajikan definisi graf, unsur-unsur dan jenis-jenis graf yang akan digunakan dalam skripsi ini. Sebelum itu, dalam mendefinisikan graf menggunakan konsep tentang himpunan, oleh karena itu sebelum menyajikan definisi graf terlebih dahulu disajikan pengertian tentang himpunan.

2.1.1 Himpunan

Berikut disajikan definisi himpunan dan himpunan terbatas.

Definisi 2.1.1 Himpunan adalah koleksi objek yang memiliki karakteristik tertentu yang jelas (Subhan, 2017).

Objek yang terdapat di dalam himpunan disebut elemen, unsur atau anggota. Dalam pengertian himpunan disyaratkan bahwa setiap elemennya hanya muncul satu kali saja. Suatu himpunan dikatakan terbatas (*bounded*) jika himpunan tersebut terbatas di atas dan terbatas di bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas (*unbounded*). Berikut disajikan definisi batas atas dan batas bawah suatu himpunan.

Definisi 2.1.2 Diberikan S himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2011).

a. Himpunan S dikatakan terbatas di atas jika S mempunyai batas atas. $u \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas dari S jika $x \leq u, \forall x \in S$.
b. Himpunan S dikatakan terbatas di bawah jika S mempunyai batas bawah. $w \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah dari S jika $x \geq w, \forall x \in S$.

Misalkan u batas atas dari S, maka u disebut batas atas terkecil jika $u \leq x$, untuk setiap x, x batas atas S. Sebaliknya, u disebut batas bawah terbesar jika $u \geq x$, untuk setiap x, x batas bawah dari S.

2.1.2 Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa notasi dan istilah yang berkaitan dengan graf. Berikut ini disajikan definisi graf, beberapa definisi lain, notasi dan istilah yang akan digunakan dalam skripsi ini.

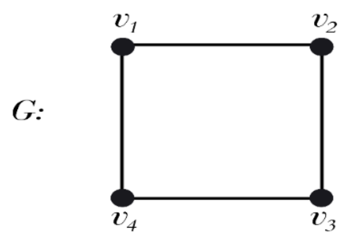
Definisi 2.1.3 (Definisi graf secara umum) Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Jika graf $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G) = \{u: u\ disebut\ titik\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$ atau (u, v) dapat ditulis dengan uv yang disebut sebagai sisi. Jika $uv = vu$ dan $u \neq v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka graf G disebut **graf sederhana**.

Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari graf G dengan notasi $p(G)$ dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dengan notasi $q(G)$. Sedangkan, banyaknya anggota pada himpunan tersebut disebut **kardinalitas** yang dinyatakan dengan simbol "| |". Jadi apabila $p(G)$ adalah orde graf dan $q(G)$ adalah ukuran graf, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$.

Jika $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan titik u **bertetangga** (*adjacent*) dengan v demikian juga sebaliknya, dan sisi e **terkait** (*incident*) dengan titik u dan titik v. Suatu graf berorde n disebut **graf lengkap** jika setiap dua titiknya bertetangga.

Contoh 2.1.1 Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ dengan $p(G) = 4$ dan $q(G) = 4$, graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1.1.

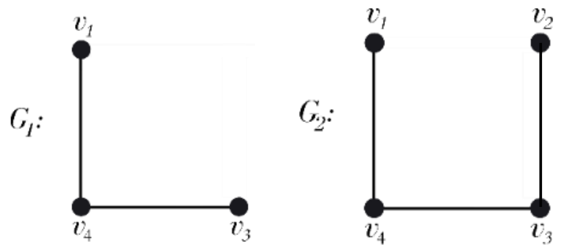


Gambar 2.1.1 Graf sederhana *G* berorde 4.

Suatu graf sebut H merupakan subgraf dari graf lainnya sebut G karena setiap anggota yang ada pada H juga berada pada G. Berikut disajikan definisi mengenai subgraf.

Definisi 2.1.5 Misalkan dua graf $H = \big(V(H), E(H)\big)$ dan $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Graf H disebut subgraf dari G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Contoh 2.1.2 Subgraf dari graf G pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.2 Graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G.

Derajat suatu graf akan diketahui jika derajat setiap titik pada graf tersebut diketahui. Berikut ini disajikan definisi derajat suatu titik pada graf.

Definisi 2.1.6 Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan dengan "$d(v_i)$", yaitu banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$.

Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$.

Contoh 2.1.3 Dari Gambar 2.1.1 diperoleh $N_G(v_1) = \{v_2, v_4\}, N_G(v_2) = \{v_1, v_3,\}, N_G(v_3) = \{v_2, v_4\}$, dan $N_G(v_4) = \{v_1, v_3\}$, maka derajat untuk setiap titiknya adalah $d(v_1) = |N_G(v_1)| = 2, d(v_2) = |N_G(v_2)| = 2, d(v_3) = |N_G(v_3)| = 2$, dan $d(v_4) = |N_G(v_4)| = 2$. Dengan demikian, diperoleh $\delta(G) = 2$ dan $\Delta(G) = 2$.

Untuk mencari jarak terpendek dari suatu graf G, maka diberikan definisi tentang lintasan dan jarak sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 Misal G adalah graf dengan $u, v \in V(G)$. Lintasan dari titik u ke v pada graf G adalah barisan antara titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \ldots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \ldots, n-1$.

Contoh 2.1.4 Lintasan pada graf sederhana cukup dituliskan sebagai barisan titik-titik saja $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$, karena antara dua buah simpul berurutan di dalam lintasan hanya ada satu sisi. Sehingga, pada Gambar 2.1.1 memiliki lintasan dengan barisan sisi yaitu $(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$.

Definisi 2.1.8 Misalkan u dan v adalah dua titik dalam graf G. Jarak titik u dan v ditulis $d(u, v)$, yang memenuhi

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{jika } u = v, \\ k, & \text{jika panjang lintasan terpendek } u - v \text{ adalah } k, \\ \infty, & \text{jika tidak ada lintasan dari } u \text{ ke } v. \end{cases}$$

Contoh 2.1.5 Dari Gambar 2.1.1 dapat ditentukkan jarak antara dua titik sebagai berikut.

Diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dan

$d(v_1, v_1) = 0, d(v_1, v_2) = 1, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 1,$

$d(v_2, v_1) = 1, d(v_2, v_2) = 0, d(v_2, v_3) = 1, d(v_2, v_4) = 2,$

$d(v_3, v_1) = 2, d(v_3, v_2) = 1. d(v_3, v_3) = 0, d(v_3, v_4) = 1,$

$d(v_4, v_1) = 1, d(v_4, v_2) = 2. d(v_4, v_3) = 1, d(v_4, v_4) = 0.$

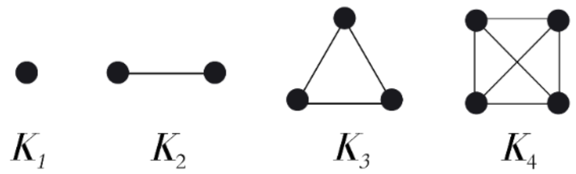
2.1.3 Jenis-jenis Graf

Selain graf sederhana yang telah dibahas pada Subbab 2.1.2, dan telah banyak ditemukan jenis-jenis graf yang baru, sehingga pada Subbab 2.1.3 ini disajikan beberapa definisi jenis-jenis graf sebagai berikut.

a. Graf Lengkap

Definisi 2.1.11 Graf lengkap adalah graf yang dimana setiap dua titiknya bertetangga. Akibatnya, setiap titik pada graf lengkap mempunyai derajat yang sama. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan K_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.1.6

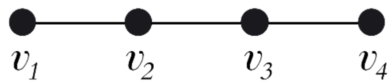


Gambar 2.1.3 Graf Lengkap $K_1, K_2. K_3$ dan K_4.

b. Graf Lintasan

Definisi 2.1.12 Graf lintasan adalah graf yang terdiri barisan titik dan sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 \ldots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \ldots, n-1$ adalah sisi-sisi dari graf lintasan. Graf lintasan dinotasikan P_n dengan orde n dan jumlah sisi $n-1$. Graf lintasan terdiri atas satu lintasan maksimal (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.1.7

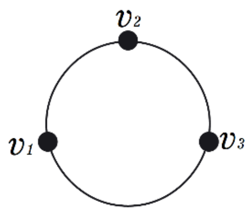


Gambar 2.1.4 Graf lintasan P_4.

c. Graf Siklus

Definisi 2.1.13 Graf siklus dinotasikan C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.1.8

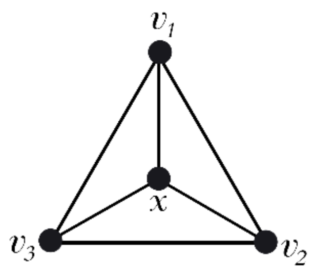


Gambar 2.1.5 Graf siklus C_3.

d. Graf Roda

Definisi 2.1.14 Graf Roda (*Wheel*) adalah suatu graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik pusat x, dengan x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n+1$ dinotasikan dengan W_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.1.9

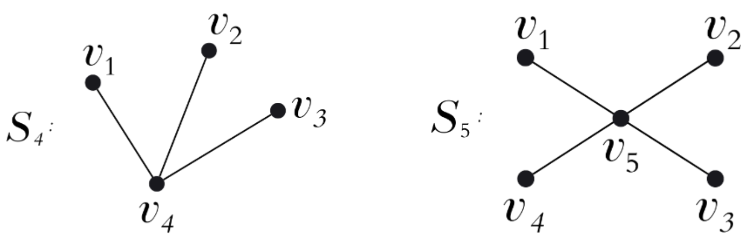


Gambar 2.1.6 Graf roda W_3.

e. Graf Bintang

Definisi 2.1.15 Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat satu (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.1.10



Gambar 2.1.7 Graf Bintang S_4 dan S_5.

2.2 Operasi dalam Graf

Operasi dalam graf adalah operasi terhadap dua graf atau lebih untuk menghasilkan graf baru. Pada Subbab 2.2 ini disajikan beberapa operasi graf antara lain operasi amalgamasi dan operasi *shackle*, yang dimana operasi *shackle* ini adalah operasi graf yang akan digunakan dalam skripsi ini.

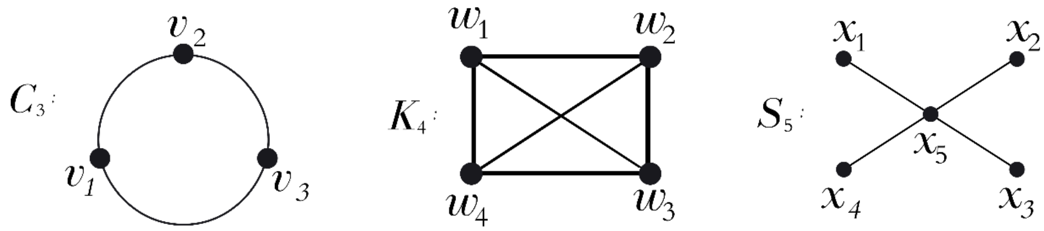
2.2.1 Operasi Amalgamasi

Definisi 2.2.1 Misalkan G_i graf terhubung dengan titik tetap $v_{0i} \in V(G_i)$, Amalgamasi graf G_i pada titik tetap v_{0i} dinotasikan dengan $Amal(G_i, v_{0i})$ adalah mengambil semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada G_i dengan $v_{0i} = v_{0j}, \forall i, j$.

Graf $Amal(G_i, v_{0i})$ dapat ditulis $Amal(G_1; G_2; \dots; G_k, v_{01}; v_{02}; \dots; v_{0k})$. Jika $G_i = G_j$ untuk setiap i, j, maka $Amal(G_1; G_2; \dots; G_k, v_{01}; v_{02}; \dots; v_{0k})$ dapat ditulis $Amal(kG_i; v_{0i})$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, k\}$ (Hasmawati, 2020).

Contoh 2.2.1

Diberikan graf sebagai berikut.



Gambar 2.2.1 Graf C_3, Graf K_4, Graf S_5.

Himpunan titik dan sisi dari Gambar 2.2.1 diberikan sebagai berikut :

$V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(C_3) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$,

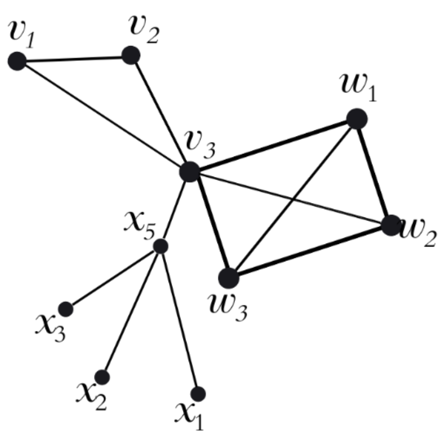
$V(K_4) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $E(K_4) = \{w_1w_2, w_1w_3, w_1w_4, w_2w_3, w_2w_4, w_3w_4\}$,

$V(S_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E(S_5) = \{x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5\}$.

Operasi amalgamasi titik pada graf C_3, graf K_4, dengan graf S_5 adalah $Amal(C_3; K_4; S_5, v_3 = w_4 = x_4)$ dengan himpunan titik

$$V\big(Amal(C_3; K_4; S_5, v_3 = w_4 = x_4)\big) = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3, x_5\}$$

dengan $v_3 = w_4 = x_4$. Diperoleh graf baru seperti berikut.

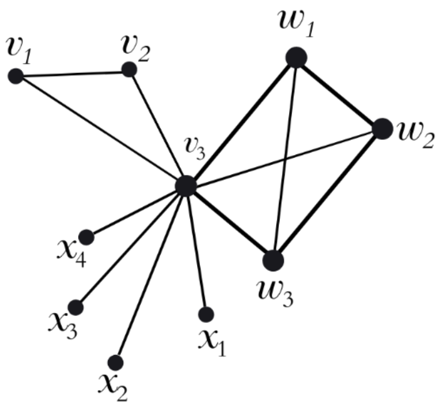


Gambar 2.2.2 Graf $Amal(C_3; K_4; S_5, v_3 = w_4 = x_4)$.

Adapun dengan mengambil titik yang lain sebagai titip tetap yaitu titik $v_3 = w_4 = x_5$ diperoleh graf baru dari hasil operasi amalgamasi titik pada graf C_3, graf K_4, dengan graf S_5 adalah $Amal(C_3; K_4; S_5, v_3 = w_4 = x_5)$ dengan himpunan titik

$$V\big(Amal(C_3; K_4; S_5, v_3 = w_4 = x_5)\big) = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

dengan $v_3 = w_4 = x_5$. Diperoleh graf baru seperti berikut.



Gambar 2.2.3 Graf $Amal(C_3; K_4; S_5, v_3 = w_4 = x_5)$.

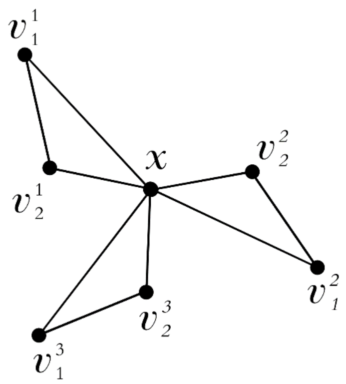
Selain Contoh 2.2.1 yang memberikan operasi amalgamasi pada tiga graf yang berbeda, selanjutnya pada Contoh 2.2.2 diberikan amalgamasi graf yang sama.

Contoh 2.2.2

Dengan melihat kembali graf C_3 pada Gambar 2.2.1. Operasi amalgamasi titik pada graf C_3 adalah $Amal(C_{3i}, x_{0i})$, untuk $i = 1,2,3$ atau dapat ditulis $Amal(3C_3, x)$, memiliki himpunan titik sebagai berikut.

$$V\big(Amal(3C_3, x)\big) = \{x, v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2, v_1^3, v_2^3\}$$

dengan $x = v_3^1 = v_3^2 = v_3^3$. Diperoleh graf baru sebagai berikut.



Gambar 2.2.4 Graf $Amal(3C_3, x)$.

2.2.2 Operasi *Shackle*

Definisi 2.2.2 Operasi *shackle* titik pada graf $G_1, G_2, \dots, G_k$ dengan titik tetap masing-masing adalah u_i dan v_i untuk $i = 1,2, \dots, k$ dinotasikan $Shack\big(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1,2, \dots, k\big)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(Shack\big(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1,2, \dots, k\big)) = V(G_1) \cup V(G_2 \backslash v_2^1) \cup V(G_3 \backslash v_3^1) \cup \dots \cup V(G_k \backslash v_k)$ dan himpunan sisi $E(Shack\big(G_1, G_2, \dots, G_k: v_j = u_{j+1}; j = 1,2, \dots, k\big)) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$ (Hasmawati, 2020).

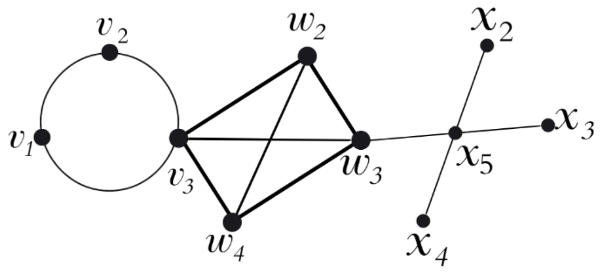
Contoh 2.2.3

Dengan melihat kembali Gambar 2.2.1, suatu graf baru dapat dibentuk dengan operasi *shackle*.

Operasi *shackle* titik pada graf C_3, graf K_4, dengan graf S_5 adalah $Shack(C_3, K_4, S_5: v_3 = w_1, w_3 = x_1)$ dengan himpunan titik sebagai berikut

$V(Shack(C_3, K_4, S_5: v_3 = w_1, w_3 = x_1)) = \{v_1, v_2, v_3, w_2, w_3, w_4, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Diperoleh graf baru sebagai berikut.

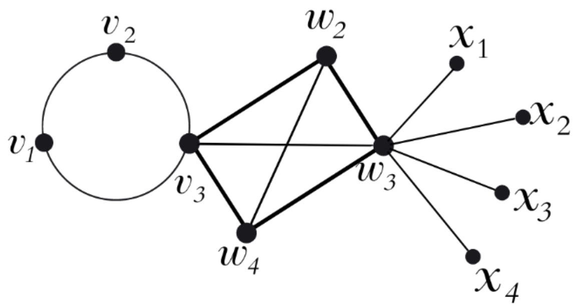


Gambar 2.2.5 Graf $Shack(C_3, K_4, S_5: v_3 = w_1, w_3 = x_1)$.

Adapun dengan mengambil titik yang lain sebagai titip tetap yaitu titik $v_3 = w_1, w_3 = x_5$ diperoleh graf baru dari hasil operasi *shackle* titik pada graf C_3, graf K_4, dengan graf S_5 adalah $Shack(C_3, K_4, S_5: v_3 = w_1, w_3 = x_5)$ dengan himpunan titik sebagai berikut

$V(Shack(C_3, K_4, S_5: v_3 = w_1, w_3 = x_5)) = \{v_1, v_2, v_3, w_2, w_3, w_4, x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Diperoleh graf baru sebagai berikut.



Gambar 2.2.6 Graf $Shack(C_3, K_4, S_5: v_3 = w_1, w_3 = x_5)$

Selain Contoh 2.2.3 yang memberikan operasi *shackle* pada tiga graf yang berbeda, selanjutnya pada Contoh 2.2.4 diberikan *shackle* graf yang sama.

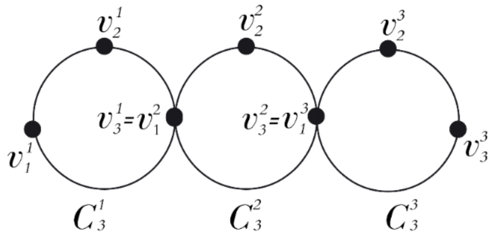
Contoh 2.2.4

Dengan melihat kembali graf C_3 pada Gambar 2.2.1. Operasi *shackle* titik pada graf C_3 adalah $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V\big(shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)\big) = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_2^2, v_3^2, v_2^3, v_3^3\},$$

$$E\big(shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)\big) = \{v_1^1v_2^1, v_1^1v_3^1, v_2^1v_3^1, v_3^1v_2^2, v_3^1v_3^2, v_2^2v_3^2, v_3^2v_2^3, v_3^2v_3^3, v_2^3v_3^3\}.$$

Diperoleh graf baru hasil operasi *shackle* titik pada graf siklus C_3 sebagai berikut.



Gambar 2.2.7 Graf $shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Dari Gambar 2.2.7, diperoleh himpunan titik dan sisi untuk graf hasil operasi *shackle* graf siklus C_3 adalah sebagai berikut.

$$V\left(Shack\big(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k: v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\big)\right)$$
$$= V(C_3^1) \cup V(C_3^2 \backslash v_1^2) \cup V(C_3^3 \backslash v_1^3) \cup \dots \cup V\big(C_3^k \backslash v_1^k\big)$$
$$= \{v_1^1, v_2^1, v_3^1\} \cup \{v_2^i, v_3^i; 2 \le i \le k\},$$

$$E\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{k} E(C_3^i)$$
$$= \left\{v_1^i v_2^i, v_1^i v_3^i, v_2^i v_3^i; 1 \leq i \leq k\right\} \text{ dengan } v_3^i = v_1^{i+1}, \forall i.$$

2.3 Dimensi Metrik

Pada Subbab 2.3 ini disajikan definisi, istilah-istilah dan hasil penelitian yang berkaitan dengan dimensi metrik.

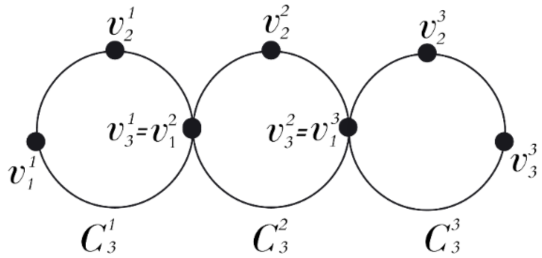
Definisi 2.3.1 Misalkan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan himpunan bagian dari $V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap W di G adalah $r(v|W) = \left(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\right)$. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap $u, v \in V(G), u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|S)$ (Eka dan Rahadjeng, 2012).

Definisi 2.3.2 Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Banyaknya anggota atau kardinalitas dari basisnya (himpunan pembeda minimum) disebut dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$ (Wahyudi, dkk., 2011).

Berikut diberikan contoh mengenai penentuan dimensi metrik graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Contoh 2.3.1

Misalkan G adalah graf S$hack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ seperti pada Gambar 2.3.1, akan ditentukan dimensi metrik dari graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.



Gambar 2.3.1 Graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Pilih $W_1 = \{v_1^1, v_3^3\}, W_2 = \{v_1^1, v_3^1, v_3^2\}, W_3 = \{v_1^1, v_3^1, v_2^2, v_3^3\}$. Akan ditunjukkan W_1, W_2 dan W_3 adalah himpunan pembeda dari graf $shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Representasi setiap titik pada graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ terhadap $W_1 = \{v_1^1, v_3^3\}$ adalah

$$r(v_1^1|W_1) = (d(v_1^1, v_1^1), d(v_1^1, v_3^3)) = (0{,}3),$$
$$r(v_2^1|W_1) = (d(v_2^1, v_1^1), d(v_2^1, v_3^3)) = (1{,}3),$$
$$r(v_3^1|W_1) = (d(v_3^1, v_1^1), d(v_3^1, v_3^3)) = (1{,}2),$$
$$r(v_2^2|W_1) = (d(v_2^2, v_1^1), d(v_2^2, v_3^3)) = (2{,}2),$$
$$r(v_3^2|W_1) = (d(v_3^2, v_1^1), d(v_3^2, v_3^3)) = (2{,}1),$$
$$r(v_2^3|W_1) = (d(v_2^3, v_1^1), d(v_2^3, v_3^3)) = (3{,}1),$$
$$r(v_3^3|W_1) = (d(v_3^3, v_1^1), d(v_3^3, v_3^3)) = (3{,}0).$$

Karena setiap titik pada graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $W_1 = \{v_1^1, v_3^3\}$, maka W_1 merupakan himpunan pembeda dari graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Representasi setiap titik pada graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ terhadap $W_2 = \{v_1^1, v_3^1, v_3^2\}$ adalah

$$r(v_1^1|W_2) = \left(d(v_1^1, v_1^1), d(v_1^1, v_3^1), d(v_1^1, v_3^2)\right) = (0{,}1{,}2),$$
$$r(v_2^1|W_2) = \left(d(v_2^1, v_1^1), d(v_2^1, v_3^1), d(v_2^1, v_3^2)\right) = (1{,}1{,}2),$$
$$r(v_3^1|W_2) = \left(d(v_3^1, v_1^1), d(v_3^1, v_3^1), d(v_3^1, v_3^2)\right) = (1{,}0{,}1),$$
$$r(v_2^2|W_2) = \left(d(v_2^2, v_1^1), d(v_2^2, v_3^1), d(v_2^2, v_3^2)\right) = (2{,}1{,}1),$$
$$r(v_3^2|W_2) = \left(d(v_3^2, v_1^1), d(v_3^2, v_3^1), d(v_3^2 . v_3^2)\right) = (2{,}1{,}0),$$
$$r(v_2^3|W_2) = \left(d(v_2^3, v_1^1), d(v_2^3, v_3^1), d(v_2^3, v_3^2)\right) = (3{,}2{,}1),$$
$$r(v_3^3|W_2) = \left(d(v_3^3, v_1^1), d(v_3^3, v_3^1), d(v_3^3, v_3^2)\right) = (3{,}2{,}1).$$

Karena terdapat representasi titik yang sama, yaitu $r(v_2^3|W_2) = r(v_3^3|W_2) = (3{,}2{,}1)$ maka $W_2 = \{v_1^1, v_3^1, v_3^2\}$ bukan himpunan pembeda dari $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Representasi setiap titik pada graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ terhadap $W_3 = \{v_1^1, v_3^1, v_2^2, v_3^3\}$ adalah

$$r(v_1^1|W_3) = \left(d(v_1^1, v_1^1), d(v_1^1, v_3^1), d(v_1^1, v_2^2), d(v_1^1, v_3^3)\right) = (0,1,2,3),$$
$$r(v_2^1|W_3) = \left(d(v_2^1, v_1^1), d(v_2^1, v_3^1), d(v_2^1, v_2^2), d(v_2^1, v_3^3)\right) = (1,1,2,3),$$
$$r(v_3^1|W_3) = \left(d(v_3^1, v_1^1), d(v_3^1, v_3^1), d(v_3^1, v_2^2), d(v_3^1, v_3^3)\right) = (1,0,1,2),$$
$$r(v_2^2|W_3) = \left(d(v_2^2, v_1^1), d(v_2^2, v_3^1), d(v_2^2, v_2^2), d(v_2^2, v_3^3)\right) = (2,1,0,2),$$
$$r(v_3^2|W_3) = \left(d(v_3^2, v_1^1), d(v_3^2, v_3^1), d(v_3^2, v_2^2), d(v_3^2. v_3^3)\right) = (2,1,1,1),$$
$$r(v_2^3|W_3) = \left(d(v_2^3, v_1^1), d(v_2^3, v_3^1), d(v_2^3, v_2^2), d(v_2^3, v_3^3)\right) = (3,2,2,1),$$
$$r(v_3^3|W_3) = \left(d(v_3^3, v_1^1), d(v_3^3, v_3^1), d(v_3^3, v_2^2), d(v_3^3, v_3^3)\right) = (3,2,2,0).$$

Karena setiap titik pada graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 \colon v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $W_3 = \{v_1^1, v_3^1, v_2^2, v_3^3\}$, maka W_3 merupakan himpunan pembeda dari graf $Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 \colon v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)$.

Dari kedua himpunan titik yang merupakan himpunan pembeda yaitu $W_1 = \{v_1^1, v_3^3\}$ dan $W_3 = \{v_1^1, v_3^1, v_2^2, v_3^3\}$, himpunan dengan kardinalitas minimum adalah W_1 dengan $|W_1| = 2$. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa $dim\left(Shack(C_3^1, C_3^2, C_3^3 \colon v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3)\right) = 2$.

Berikut diberikan teorema terkait batas atas dan batas bawah dimensi metrik untuk sembarang graf.

Teorema 2.3.1 (Chartrand, dkk., 2000) Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$ dan diameter d, maka $f(n,d) \leq dim(G) \leq n - d$ dengan $f(n,d)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi hubungan $d^k \geq n - k$.

Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik diberikan pada teorema yang disajikan berikut ini.

Teorema 2.3.2 (Chartrand, dkk., 2000) Jika G suatu graf terhubung dengan orde n, maka

a. $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$,
b. Untuk $n \geq 2$, $dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$,
c. Untuk $n \geq 4, dim(G) = n - 2$ jika dan hanya jika $G = K_{r,s}(r, s \geq 1), G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2)$ atau $G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r, s \geq 1)$.

Teorema 2.3.3 (Eka dan Rahadjeng, 2012) Jika G graf siklus dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim(C_n) = 2$.

Bukti :

Misalkan $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ siklus dengan n titik dan $n \geq 3$ pada graf G. Untuk siklus dengan n ganjil. Misalkan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$, akan dibuktikan W himpunan pembeda. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2,1)$$
$$r(v_2|W) = (3,2)$$
$$r(v_3|W) = (4,3)$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n-3}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n-1}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+1}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$
$$r\left(v_{\frac{n+3}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1,2)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (0,1)$$
$$r(v_n|W) = (1,0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G), u \neq v, r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ adalah himpunan pembeda.

Akan dibuktikan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena G graf siklus, berdasarkan Teorema 2.3.1, $dim(G) \neq 1$. Karena tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n ganjil.

Untuk siklus dengan n genap. Misalkan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$, akan dibuktikan W himpunan pembeda. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2,1)$$
$$r(v_2|W) = (3,2)$$

$$r(v_3|W) = (4,3)$$

$$\vdots$$

$$r\left(v_{\frac{n-2}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}\right)$$

$$r\left(v_{\frac{n}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$r\left(v_{\frac{n+2}{2}}\middle|W\right) = \left(\frac{n-4}{2}, \frac{n-2}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$r(v_{n-2}|W) = (1,2)$$

$$r(v_{n-1}|W) = (0,1)$$

$$r(v_n|W) = (1,0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G), u \neq v, r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ adalah himpunan pembeda.

Akan dibuktikan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena G graf siklus, berdasarkan Teorema 2.3.1, $dim(G) \neq 1$. Karena tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n genap.

Karena terbukti untuk graf siklus dengan banyak titik ganjil dan genap, maka $dim(C_n) = 2$. ■

Berdasarkan Teorema 2.3.1, Teorema 2.3.2 dan Teorema 2.3.3, diketahui batas bawah dan batas atas dimensi metrik graf $Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)$ adalah sebagai berikut

$$2 \leq dim\left(Shack\left(C_3^1, C_3^2, \dots, C_3^k : v_3^1 = v_1^2, v_3^2 = v_1^3, \dots, v_3^{k-1} = v_1^k\right)\right) \leq n - d.$$

2.4 Metode Pembuktian Induksi Matematika

Induksi Matematika merupakan suatu alat untuk membuktikan hasil-hasil yang terkait dengan bilangan bulat, atau yang dapat diperluas untuk semua bilangan asli. Prinsip induksi matematika dapat diformulasikan sebagai berikut.

Misalkan $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $P(n)$ adalah pernyataan untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$. Maka:

i. Pernyataan $P(n_0)$ adalah benar.

ii. Untuk semua $k \geq n_0$, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ benar.

Sehingga $P(n)$ benar untuk semua $n \geq n_0$ (Bartle dan Sherbert, 2011).