TITIK TETAP FUNGSI PADA FUNGSI KONTRAKSI KANNAN, REICH, DAN CHATTERJEA DI DALAM RUANG b-METRIK LENGKAP

FIXED POINT OF KANNAN, REICH, AND CHATTERJEA CONTRACTIVE ON COMPLETE b-METRIC SPACE

NURUL ILMA ISLAMIYAH

H022212003

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

TITIK TETAP FUNGSI PADA FUNGSI KONTRAKSI KANNAN, REICH, DAN CHATTERJEA DI DALAM RUANG b-METRIK LENGKAP

FIXED POINT OF KANNAN, REICH, AND CHATTERJEA CONTRACTIVE ON COMPLETE b-METRIC SPACE

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Matematika

Disusun dan diajukan oleh

NURUL ILMA ISLAMIYAH
H022212003

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

TESIS

TITIK TETAP FUNGSI PADA FUNGSI KONTRAKSI KANNAN, REICH, DAN CHATTERJEA DI DALAM RUANG b-METRIK LENGKAP

NURUL ILMA ISLAMIYAH

NIM: H022212003

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka

Penyelesaian Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 27 Juli 2023

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pendamping
Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19580802 198403 1002	NIP. 196402071991031013
Ketua Program Studi Matematika S2	Dekan Fakulras MIPA Universitas Hasanuddin
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**
NIP. 196402071991031013	NIP. 19720515 1997 02 1002

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, tesis berjudul "Titik Tetap Fungsi pada Fungsi Kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea di Dalam Ruang *b*-Metrik Lengkap" adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing Prof. Budi Nurwahyu, MS. sebagai Pembimbing Utama dan Dr. Muhammad Zakir, M.Si. sebagai Pembimbing Pendamping. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari isi tesis ini telah disubmit di Jurnal *Baghdad Science Journal* sebagai artikel dengan judul "*Common Fixed-Point Theorems of Generalization of Kannan, Chatterjea, and Reich Contractive on b-Metric Space with an Application*".

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 2 Agustus 2023

METERAI TEMPEL
21AKX568834374

Nurul Ilma Islamiyah
NIM. H022212003

UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan mengucap *Alhamdulillah,* suatu bentuk syukur penulis kepada Allah SWT, yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang yang senantiasa melimpahkan rahmat, hidayah, serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan judul “**Titik Tetap Fungsi pada Fungsi Kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea di Dalam Ruang *b*-Metrik Lengkap**”. Serta, shalawat dan salam kami curahkan kepada baginda Rasulallah Muhammad SAW. suri tauladan yang sempurna bagi seluruh umat Islam. Shalawat dan salam pula kami haturkan kepada istri-istri beliau, keluarga, sahabat, *tabi’in, tabi’ut-tabi’in* serta para pengikutnya yang senantiasa istiqamah dijalan-Nya.

Penulisan tesis ini bertujuan untuk memenuhi syarat akademik untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Magister Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar. Tesis ini disusun dengan usaha yang sungguh-sungguh dari penulis, dengan mengerahkan semua ilmu yang telah diperoleh selama proses perkuliahan. Banyak kesulitan yang penulis hadapi selama proses penyusunan tesis. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dari banyak pihak. Tanpa adanya bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak penulis tidak akan bisa menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS**, selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, selaku pembimbing pertama untuk segala waktu, ilmu, serta kesabaran dalam membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan dan koreksi kepada penulis dalam pengerjaan tesis ini.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**, dan Bapak **Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**, selaku tim penguji yang telah memberikan kritikan dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si.**, Ketua Departemen Matematika, Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, Ketua Program Studi Magister Matematika,

Dosen Pengajar, serta **Staf** dalam lingkungan Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.

4. **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, dan **Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si.**, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan seluruh pihak birokrasi atas pengurusan administrasi yang diberikan kepada penulis.
5. Kedua orang tua tercinta Ayahanda **Muhammad Husni, S.Ag.** dan Ibunda **Siti Ihdani, S.Ag.**, yang telah membesarkan, mendidik, dan membina penulis dengan penuh kasih sayang serta memberikan bantuan baik moril maupun materil dan senantiasa memanjatkan doanya untuk penulis.
6. Teman-teman seperjuangan Magister Matematika 2021 Genap yaitu **Siti M Sari, Darmiani,** dan **Muhammad Afdal Bau** yang telah memberi bantuan serta berjuang bersama hingga bisa sampai ke tahap ini.
7. Serta, kepada semua pihak yang tidak sempat penulis tuliskan satu persatu dan telah memberikan bantuan baik dalam bentuk apapun itu penulis mengucapkan terima kasih atas partisipasinya dalam proses penyelesaian tesis ini.

Makassar, Juli 2023
Penulis

Nurul Ilma Islamiyah
H022212003

ABSTRAK

NURUL ILMA ISLAMIYAH. *Titik Tetap Fungsi pada Fungsi Kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea di Dalam Ruang b-Metrik Lengkap* (dibimbing oleh Budi Nurwahyu dan Muhammad Zakir).

Penelitian ini mengkaji keberadaan serta keunikan titik tetap fungsi pada fungsi kontraktif Kannan, Reich, dan Chatterjea di dalam ruang *b*-metrik lengkap. Dalam ruang *b*-metrik dari generalisasi fungsi kontraktif Kannan, Reich, dan Chatterjea diperoleh syarat cukup untuk terjadinya titik tetap yang tunggal. Selain itu, terdapat pula contoh serta aplikasi keberadaan dan keunikan solusi umum untuk sistem persamaan fungsional pada pemrograman dinamis

Keywords: *b*-metric, kontraktif Chatterjea, kontraktif Kannan, kontraktif Reich, titik tetap sekutu, titik tetap

ABSTRACT

NURUL ILMA ISLAMIYAH. *Fixed Point of Kannan, Reich, and Chatterjea Contractive on Complete b-Metric Space* (supervised by Budi Nurwahyu and Muhammad Zakir).

In this paper, we establish the existence and uniqueness of common fixed points for Kannan, Reich, and Chatterjea type pairs of self-maps in complete b-metric space. In the b-metric space of the generalization of the Kannan, Reich, and Chatterjea contraction functions, sufficient conditions are obtained for the occurrence of a unique fixed point. In addition, an example and an application of the existence and uniqueness of common solutions for a system of functional equations arising in dynamic programming are discussed by using our result.

Keywords: *b*-metric, Chatterjea Contraction, common fixed point, fixed point, Kannan Contraction, Reich Contraction

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang metrik diperkenalkan oleh Frechet [1] pada tahun 1906. Teorema titik tetap Banach [2] yang juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi Banach atau prinsip pemetaan kontraksi Banach pertama kali diperkenalkan pada tahun 1922. Teorema titik tetap Banach memberikan jaminan terdapat titik tetap yang tunggal pada pemetaan di ruang metrik serta memberikan metode yang dapat digunakan untuk memperoleh titik tetap tersebut. Teorema tersebut menjadi dasar pengembangan teori titik tetap oleh beberapa ilmuwan, seperti Kannan [3], Chatterjea [4], dan Reich [5]. Pada tahun 1989 teori tentang ruang *b*-metrik yang merupakan perluasan dari ruang metrik diperkenalkan oleh Bakhtin [6] dan dipopulerkan serta dikembangkan oleh Czerwik [7] pada tahun 1993.

Terdapat banyak penelitian yang membahas tentang teorema titik tetap. Pada tahun 1995 Al-Thagafi [8] membuktikan teorema titik tetap sekutu yang merupakan perumuman dari hasil Dotson dan Habiniak yang kemudian digunakan untuk mencari aproksimasi terbaik. Tomonari Suzuki [9] pada tahun 2009 memperkenalkan tentang perluasan dari teorema titik tetap Kannan dalam jurnalnya yang berjudul "*A Generalization of Kannan's Fixed Point Theorem*". Wei-Shih Du [10], Chandok [11], dan Hyun Jo [12] meneliti tentang generalisasi beberapa teorema titik tetap dan teorema titik tetap sekutu. Dalam jurnal yang berjudul "*Multivalued fixed point theorems in tvs-cone metric spaces*" Azam [13] membuat perluasan dari teorema Kannan, Chatterjea, dan Zamfirescu. Teorema titik tetap Kannan juga dibahas oleh G´ornicki [14] pada tahun 2017 dalam jurnalnya yang berjudul "*Fixed point theorems for Kannan type mappings*". Seshagiri [15] dalam jurnalnya yang berjudul "*Unique Fixed Point Theorems in Partially Ordered Metric Spaces*" membahas tentang teorema titik tetap tunggal Singh dan Chatterjea pada ruang metrik parsial terurut.

Dalam jurnal yang berjudul "*A Common Fixed Point Theorem and its Application to Nonlinear Integral Equations"* Pathak [16] membuktikan teoreama titik tetap sekutu untuk pasangan pemetaan kompatibel lemah. Penelitian lain yang membahas tentang teorema titik tetap dilakukan oleh Damjanovic [17] pada tahun

2012 dalam jurnalnya yang berjudul "*Common Fixed Point Theorems for Multivalued Map"*, membahas tentang penetapan beberapa hasil titik perpotongan dan titik tetap sekutu pada ruang metrik lengkap.

Debnath dan Srivastava telah mempresentasikan eksistensi baru dari teorema titik tetap Kannan dan Reich menggunakan Teknik Wardowski [18] dan beberapa hasil *proximity point* terbaik untuk pasangan pemetaan kontraktif Kannan [19]. Debnath [20] memaparkan beberapa hasil teorema titik tetap untuk fungsi kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea yang hanya menggunakan ruang metrik.

Oleh karena itu. dalam penelitian ini yang akan dilakukan adalah menggunakan kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea tetapi dengan menggunakan ruang *b*-metrik lengkap. Berdasarkan hal tersebut maka penulis mengambil judul **Titik Tetap Fungsi pada Fungsi Kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea di Dalam Ruang *b*-Metrik Lengkap.**

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah membuat teorema dan bukti yang terkait dengan keberadaan titik tetap yang tunggal dengan syarat kontraksi yang digeneralisir.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini berdasarkan rumusan masalah di atas adalah membuat teorema dan bukti yang terkait dengan keberadaan titip tetap yang tunggal dengan syarat kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjeaa pada ruang *b*-metrik lengkap.

1.4 Batasan Masalah

Dalam tesis ini penentuan teori titik tetap dibatasi pada ruang *b*-metrik lengkap.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dapat diperoleh dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

Untuk memenuhi syarat kelulusan Program Strata Dua (S2) Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin.

Memberikan pengetahuan tentang teorema titik tetap pada fungsi kontraksi Kannan, Reich, dan Chatterjea pada ruang *b*-metrik lengkap yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah pada persamaan diferensial, integral, persamaan diferensi, persamaan non-linear, dan lain sebagainya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dipaparkan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik, beberapa diantaranya yaitu definisi ruang metrik, definisi ruang *b*-metrik, barisan konvergen dan barisan Cauchy di ruang metrik, barisan konvergen dan barisan Cauchy di ruang *b*-metrik, titik tetap, fungsi kontraksi, kontraksi Kannan, kontraksi Chatterjea, kontraksi Reich, dan titik tetap sekutu pada pemetaan Kannan, Reich, dan Chatterjea.

2.1 Definisi Ruang Metrik

Definisi 2.1 [21]. Misalkan X merupakan himpunan tak kosong dan misalkan $d: X \times X \to [0, \infty)$ merupakan fungsi yang memenuhi

d_1) $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$;

d_2) $d(v, w) = d(w, v)$;

d_3) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ untuk setiap $u, v, w \in X$.

Maka d disebut metrik pada X, dan pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Contoh 2.1. Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dan dan fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$ yang didefinisikan

$$d(v, w) = |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2|,$$

untuk setiap $v, w \in X$. Maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Misalkan $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, dan $w = (w_1, w_2)$. Akan ditunjukkan bahwa d adalah metrik pada X.

1. Jika $d(v, w) = 0$ maka

   $$|v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| = 0,$$

   diperoleh

   $$|v_1 - w_1| = 0, |v_2 - w_2| = 0,$$

   sehingga

   $$v_1 = w_1, v_2 = w_2,$$

   maka

   $$v = w.$$

   Oleh karena itu diperoleh jika $d(v, w) = 0$ maka $v = w$.

Jika $v = w$ maka

$$\begin{aligned} d(v,w) &= |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| \\ &= |v_1 - v_1| + |v_2 - v_2| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh jika $v = w$ maka $d(v,w) = 0$.

2. Berlaku $d(v,w) = |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2|$

$$\begin{aligned} &= |w_1 - v_1| + |w_2 - v_2| \\ &= d(w,v). \end{aligned}$$

Jadi $d(v,w) = d(w,v)$.

3. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} d(v,w) &= |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2| \\ &= |v_1 - u_1 + u_1 - w_1| + |v_2 - u_2 + u_2 - w_2| \\ &= |(v_1 - u_1) + (u_1 - w_1)| + |(v_2 - u_2) + (u_2 - w_2)| \\ &\leq |v_1 - u_1| + |u_1 - w_1| + |v_2 - u_2| + |u_2 - w_2| \\ &= |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + |u_1 - w_1| + |u_2 - w_2| \\ &= d(v,u) + d(u,w). \end{aligned}$$

Jadi $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$.

Berdasarkan penjabaran di atas maka terbukti bahwa d merupakan metrik pada X dan pasangan (X,d) merupakan ruang metrik.

2.2 Definisi Ruang *b*-Metrik

Definisi 2.2 [22]. Misalkan X merupakan himpunan tak kosong, dan untuk setiap $k \geq 1$ merupakan bilangan real dan misalkan $q : X \times X \to [0,\infty)$ merupakan fungsi yang memenuhi:

q_1) $q(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w$;

q_2) $q(v,w) = q(w,v)$;

q_3) $q(v,w) \leq k[q(v,u) + q(u,w)]$ untuk setiap $u, v, w \in X$.

Maka q disebut *b*-metrik pada X dan pasangan (X,q) disebut ruang b-metrik.

Contoh 2.2 [23]. Misalkan $X = [0,1]$ dan didefinisikan $q: X \times X \to [0,\infty)$ sebagai berikut

$$q(v,w) = (v-w)^2,$$

untuk setiap $v, w \in X$. Maka pasangan (X, q) merupakan ruang *b*-metrik.

Untuk setiap $u, v, w \in X$ akan ditunjukkan bahwa q merupakan *b*-metrik pada X.

1. Jika $q(v,w) = 0$ maka

   $$(v-w)^2 = 0,$$

   diperoleh

   $$(v-w)(v-w) = 0,$$

   sehingga

   $$(v-w) = 0,$$

   maka

   $$v = w.$$

   Oleh karena itu diperoleh jika $q(v,w) = 0$ maka $v = w$.

   Jika $v = w$ maka

   $$\begin{aligned} q(v,w) &= (v-w)^2 \\ &= (v-v)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Oleh karena itu diperoleh jika $v = w$ maka $q(v,w) = 0$.

2. Berlaku

   $$q(v,w) = (v-w)^2 = (w-v)^2 = q(w,v).$$

3. Untuk setiap $u, v, w \in X$

   $$q(v,w) = (v,w)^2 = (v-u+u-w)^2.$$

   Misal $x = v-u$ dan $y = u-w$ maka

   $$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \end{aligned}$$

   diperoleh

   $$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy$$

   sehingga

   $$(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$$

   maka

   $$\begin{aligned} (x+y)^2 &\leq 2x^2 + 2y^2 \\ (v-u+u-w)^2 &\leq 2(v-u)^2 + 2(u-w)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(v-w)^2 &\leq 2[(v-u)^2+(u-w)^2] \\
q(v,w) &\leq k[q(v,u)+q(u,w)]
\end{aligned}
$$

Jadi $q(v,w) \leq k[q(v,u)+q(u,w)]$ dengan $k=2$.

Berdasarkan penjabaran tersebut maka terbukti bahwa q merupakan *b*-metrik pada X dan pasangan (X,q) merupakan ruang *b*-metrik.

2.3 Barisan Konvergen dan Barisan Cauchy di Ruang Metrik

Definisi 2.3 [24]. Misalkan $\{v_n\}$ merupakan barisan pada ruang metrik (X,d).

1. Barisan $\{v_n\}$ disebut konvergen jika terdapat $v \in X$ sedemikian sehingga $d(v_n,v) \to 0$ jika $n \to +\infty$, atau dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $d(v_n,v) < \varepsilon$.
2. Barisan $\{v_n\}$ disebut barisan Cauchy jika $d(v_n,v_m) \to 0$ untuk $n,m \to +\infty$, atau dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n,m \geq n_0$ berlaku $d(v_n,v_m) < \varepsilon$.

Contoh 2.3. Diberikan ruang metrik (X,d) dengan $X=\mathbb{R}^2$ dan metrik $d(v,w)=|v_1-w_1|+|v_2-w_2|$ untuk setiap $v=(v_1,v_2) \in X$, $w=(w_1,w_2) \in X$. Barisan $\{v_n\}=\left\{\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)\right\}$ merupakan barisan yang konvergen ke $(0,0)$ di dalam ruang metrik (X,d).

Akan ditunjukkan bahwa barisan $\{v_n\}=\left\{\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)\right\}$ merupakan barisan yang konvergen ke $(0,0)$ di dalam ruang metrik (X,d). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sehingga berlaku $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ atau $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $\frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$ sehingga berlaku

$$
\begin{aligned}
d(v_n,0) &= \left|\frac{1}{n^2}-0\right| + \left|\frac{1}{n}-0\right| \\
&= \left|\frac{1}{n^2}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n} \\
&< \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terbukti $\{v_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right\} \to (0,0)$ atau dengan kata lain

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0. \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.4. Diberikan ruang metrik (X, d) dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan metrik $d(v, w) = |v_1 - w_1| + |v_2 - w_2|$ untuk setiap $v = (v_1, v_2) \in X$, $w = (w_1, w_2) \in X$. Barisan $\{v_n\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3^n}\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang metrik (X, d).

Akan dibuktikan bahwa barisan $\{v_n\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3^n}\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang metrik (X, d). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{4}{n_0} < \varepsilon$. Maka, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned}
d(v_n, v_m) &= \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right| + \left|\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{m}}\right| + \left|\frac{1}{3^n}\right| + \left|\frac{1}{3^m}\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m} \\
&< \frac{1}{\sqrt{n_0}} + \frac{1}{\sqrt{n_0}} + \frac{1}{3^{n_0}} + \frac{1}{3^{n_0}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n_0}} + \frac{2}{3^{n_0}} \\
&\leq \frac{4}{3^{n_0}} < \frac{4}{n_0} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti barisan $\{v_n\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3^n}\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang metrik (X, d).

Definisi 2.4 [24]. Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di X konvergen.

2.4 Barisan Konvergen dan Barisan Cauchy di Ruang *b*-Metrik

Definisi 2.5 [25]. Misalkan $\{v_n\}$ merupakan barisan pada ruang *b*-metrik (X, q).

1. Barisan $\{v_n\}$ disebut konvergen jika terdapat $v \in X$ sedemikian sehingga $q(v_n, v) \to 0$ jika $n \to +\infty$, atau dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $q(v_n, v) < \varepsilon$.
2. Barisan $\{v_n\}$ disebut barisan Cauchy jika $q(v_n, v_m) \to 0$ untuk $n, m \to +\infty$, atau dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku $q(v_n, v_m) < \varepsilon$.

Contoh 2.5. Diberikan ruang *b*-metrik (X, q) dengan $X = \mathbb{R}$ dan *b*-metrik $q(v, w) = (v - w)^2$ untuk setiap $v, w \in X$. Barisan $\{v_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ merupakan barisan yang konvergen ke 0 di dalam ruang *b*-metrik (X, q).

Akan ditunjukkan bahwa barisan $\{v_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ merupakan barisan yang konvergen ke 0 di dalam ruang *b*-metrik (X, q). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sehingga berlaku $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ atau $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ sehingga berlaku

$$q(v_n, 0) = \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2 = \left(\frac{1}{n^2}\right)^2 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terbukti $\frac{1}{n^2} \to 0$ atau dengan kata lain terbukti

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0. \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.6. Diberikan ruang *b*-metrik (X, q) dengan $X = \mathbb{R}$ dan *b*-metrik $q(v, w) = (v - w)^2$ untuk setiap $v, w \in X$. Barisan $\{v_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang *b*-metrik (X, q).

Akan dibuktikan bahwa barisan $\{v_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang *b*-metrik (X, q). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{4}{n_0} < \varepsilon$. Maka, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$q(v_n, v_m) \quad = \quad |v_n - v_m|^2 \quad = \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n_0}}+\frac{1}{\sqrt{n_0}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{n_0}}\right)^2 \\
&= \frac{4}{n_0} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti barisan $\{v_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang *b*-metrik (X, q).

Definisi 2.6 [25]. Ruang *b*-metrik (X, q) dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy di dalam X akan konvergen di dalam X.

2.5 Titik Tetap

Definisi 2.7 [26]. Titik $v \in X$ disebut titik tetap dari fungsi $T: X \to X$ jika $Tv = v$.

Contoh 2.7. Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $T: X \to X$ merupakan fungsi yang didefinisikan

$$Tv = 2v + 1.$$

Maka T memiliki titik tetap di X.

Berdasarkan Definisi 7, diperoleh

$$2v + 1 = Tv,$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
2v + 1 &= v \\
2v - v + 1 &= 0,
\end{aligned}
$$

maka

$$
\begin{aligned}
v + 1 &= 0 \\
v &= -1.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu diperoleh titik tetap dari T adalah -1.

2.6 Fungsi Kontraksi

Definisi 2.8 [26]. Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Maka fungsi $T: X \to X$ disebut fungsi kontraksi jika terdapat $\gamma \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $v, w \in X$ berlaku

$$d(Tv, Tw) \leq \gamma d(v, w).$$

Contoh 2.8. Diketahui $X = [1, \infty)$ dengan fungsi $T: X \to X$ didefinisikan $Tv = \frac{v}{2} + v^{-1}$.

Akan ditunjukkan T merupakan fungsi kontraksi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
|Tv - Tw| &= \left|\frac{v}{2} + v^{-1} - \left(\frac{w}{2} + w^{-1}\right)\right| \\
&= \left|\frac{v}{2} - \frac{w}{2} + v^{-1} - w^{-1}\right| \\
&= \left|\left(\frac{v}{2} - \frac{w}{2}\right) + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{v - w}{2}\right| + \left|\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right| \\
&= \left|\frac{v - w}{2}\right| + \left|\frac{w - v}{vw}\right| \\
&= |v - w| \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{vw}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{vw}\right| |v - w|.
\end{aligned}$$

Karena $X = [1, \infty)$ maka $v \geq 1$ dan $y \geq 1$ sehingga

$$vw \geq 1,$$

diperoleh

$$0 < \frac{1}{vw} \leq 1,$$

$$0 > -\frac{1}{vw} \geq -1,$$

maka

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{vw} \geq -\frac{1}{2},$$

$$0 \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{vw}\right| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Karena $0 \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{vw}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$ maka T merupakan fungsi kontraksi Banach.

2.7 Kontraksi Kannan

Definisi 2.9 [3]. Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Maka pemetaan $T: X \to X$ disebut kontraksi Kannan jika terdapat $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $v, w \in X$ berlaku

$$d(Tv, Tw) \leq \gamma[d(v, Tv) + d(w, Tw)].$$

Contoh 2.9. Misalkan (X,d) ruang metrik dengan $X=[0,1], d(v,w)=|v-w|$ dan definisikan

$$Tv=\begin{cases}\frac{v}{4}, untuk\ v\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{v}{5}, untuk\ v\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

Akan ditunjukkan bahwa T merupakan kontraksi Kannan.

Kasus 1: untuk $v\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ berlaku

$$|Tv-Tw| = \left|\frac{v}{4}-\frac{w}{4}\right| = \frac{1}{4}|v-w|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv-Tw|\le\gamma[|v-Tv|+|w-Tw|]$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}|v-w| &\le \left|\frac{12}{36}v+\frac{12}{36}w\right|\\ &= \left|\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}v\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}w\right)\right|\\ &= \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{3}{4}v+\frac{3}{4}w\right|\\ &= \frac{4}{9}\left(\left|v-\frac{v}{4}\right|+\left|w-\frac{w}{4}\right|\right).\end{aligned}$$

Jadi T adalah kontraksi Kannan dengan $\gamma=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$ untuk $v,w\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$.

Kasus 2: untuk $v\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ berlaku

$$|Tv-Tw| = \left|\frac{v}{5}-\frac{w}{5}\right| = \frac{1}{5}|v-w|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv-Tw|\le\gamma[|v-Tv|+|w-Tw|]$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}|v-w| &\le \left|\frac{16}{45}v+\frac{16}{45}w\right|\\ &= \left|\frac{4}{9}\left(\frac{4}{5}v\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{4}{5}w\right)\right|\\ &= \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{4}{5}v+\frac{4}{5}w\right|\\ &= \frac{4}{9}\left(\left|v-\frac{v}{5}\right|+\left|w-\frac{w}{5}\right|\right).\end{aligned}$$

Jadi T adalah kontraksi Kannan dengan $\gamma=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$ untuk $v,w\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Kasus 3: untuk $v\in[0,1]$ berlaku

$$|Tv-Tw| = \left|\frac{v}{4}-\frac{w}{5}\right|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv - Tw| \leq \gamma[|v - Tv| + |w - Tw|]$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{v}{4} - \frac{w}{5}\right| &\leq \left|\frac{12}{36}v + \frac{16}{45}w\right| \\ &= \left|\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}v\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{4}{5}w\right)\right| \\ &= \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{3}{4}v + \frac{4}{5}w\right| \\ &= \frac{4}{9}\left(\left|v - \frac{v}{4}\right| + \left|w - \frac{w}{5}\right|\right). \end{aligned}$$

Jadi T adalah kontraksi Kannan dengan $\gamma = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ untuk $v, w \in [0,1]$.

Teorema 2.1 [3]. *Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap dan T merupakan kontraksi Kannan. Maka T memiliki titik tetap tunggal di X.*

2.8 Kontraksi Chatterjea

Definisi 2.10 [4]. Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Maka pemetaan $T: X \to X$ disebut kontraksi Chatterjea jika terdapat $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sehingga untuk setiap $v, w \in X$ berlaku

$$d(Tv, Tw) \leq \gamma[d(v, Tw) + d(w, Tv)].$$

Contoh 2.10. Misalkan (X, d) ruang metrik dengan $X = [0,1], d(v, w) = |v - w|$ dan definisikan

$$Tv = \begin{cases} \frac{v}{5}, untuk\ v \in \left[0, \frac{8}{15}\right) \\ \frac{v}{3}, untuk\ v \in \left[\frac{8}{15}, 1\right] \end{cases}.$$

Akan ditunjukkan bahwa T merupakan kontraksi Chatterjea.

Kasus 1: untuk $v \in \left[0, \frac{8}{15}\right)$ berlaku

$$|Tv - Tw| = \left|\frac{v}{5} - \frac{w}{5}\right| = \frac{1}{5}|v - w|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv - Tw| \leq \gamma[|v - Tw| + |w - Tv|]$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}|v - w| &\leq \left|\frac{12}{40}v + \frac{12}{40}w\right| \\ &= \left|\frac{3}{8}\left(\frac{4}{5}v\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{4}{5}w\right)\right| \\ &= \left|\frac{3}{8}\right|\left|\frac{4}{5}v + \frac{4}{5}w\right| \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8}\left(\left|v-\frac{v}{5}\right|+\left|w-\frac{w}{5}\right|\right).$$

Jadi T adalah kontraksi Chatterjea dengan $\gamma = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ untuk $v, w \in \left[0, \frac{8}{15}\right)$.

Kasus 2: untuk $v \in \left[\frac{8}{15}, 1\right]$ berlaku

$$|Tv - Tw| = \left|\frac{v}{3}-\frac{w}{3}\right| = \frac{1}{3}|v-w|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv - Tw| \leq \gamma[|w - Tv| + |w - Tv|]$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}|v-w| &\leq \left|\frac{6}{24}v+\frac{6}{24}w\right| \\
&= \left|\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}v\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}w\right)\right| \\
&= \left|\frac{3}{8}\right|\left|\frac{2}{3}v+\frac{2}{3}w\right| \\
&= \frac{3}{8}\left(\left|v-\frac{v}{3}\right|+\left|w-\frac{w}{3}\right|\right).
\end{aligned}$$

Jadi T adalah kontraksi Chatterjea dengan $\gamma = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ untuk $v, w \in \left[\frac{8}{15}, 1\right]$.

Kasus 3: untuk $v \in [0,1]$ berlaku

$$|Tv - Tw| = \left|\frac{v}{5}-\frac{w}{3}\right|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv - Tw| \leq \gamma[|w - Tv| + |w - Tv|]$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{v}{5}-\frac{w}{3}\right| &\leq \left|\frac{12}{40}v+\frac{6}{24}w\right| \\
&= \left|\frac{3}{8}\left(\frac{4}{5}v\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}w\right)\right| \\
&= \left|\frac{3}{8}\right|\left|\frac{4}{5}v+\frac{2}{3}w\right| \\
&= \frac{3}{8}\left(\left|v-\frac{v}{5}\right|+\left|w-\frac{w}{3}\right|\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(|v|-\left|\frac{v}{5}\right|+|w|-\left|\frac{w}{3}\right|\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(|v|-\left|\frac{w}{3}\right|+|w|-\left|\frac{v}{5}\right|\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(\left|v-\frac{w}{3}\right|+\left|w-\frac{v}{5}\right|\right).
\end{aligned}$$

Jadi T adalah kontraksi Chatterjea dengan $\gamma = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ untuk $v, w \in [0,1]$.

Teorema 2.2 [4]. *Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap dan T merupakan kontraksi Chatterjea. Maka T memiliki titik tetap tunggal di X.*

2.9 Kontraksi Reich

Definisi 2.11 [5]. Misalkan (X,d) merupakan ruang metrik lengkap, maka pemetaan $T: X \to X$ disebut kontraksi Reich jika terdapat bilangan konstan non-negatif α, β, γ yang memenuhi $\alpha + \beta + \gamma < 1$ sehingga untuk setiap $v, w \in X$ berlaku

$$d(Tv, Tw) \leq \alpha d(v, Tv) + \beta d(w, Tw) + \gamma d(v, w).$$

Contoh 2.11 [5]. Misalkan $X = [0,1], T(v) = \frac{v}{3}$ untuk $0 \leq v < 1$ dan $T(1) = \frac{1}{6}$.

Akan ditunjukkan bahawa T merupakan kontraksi Reich.

Kasus 1: untuk $0 \leq v < 1$ berlaku

$$d(Tv, Tw) = |Tv - Tw| = \left|\frac{v}{3} - \frac{w}{3}\right| = \frac{1}{3}|v - w|.$$

Akan ditunjukkan bahwa $d(Tv, Tw) \leq \alpha d(v, Tv) + \beta d(w, Tw) + \gamma d(v, w)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}|v - w| &\leq \frac{1}{3}|v - w| + \left|\frac{2}{18}v + \frac{2}{27}w\right| \\
&\leq \frac{1}{3}|v - w| + \left|\frac{2}{18}v\right| + \left|\frac{2}{27}w\right| \\
&= \frac{1}{3}|v - w| + \left|\frac{3}{18}v - \frac{1}{18}v\right| + \left|\frac{3}{27}w - \frac{1}{27}w\right| \\
&= \frac{1}{3}|v - w| + \left|\frac{1}{6}v - \frac{1}{18}v\right| + \left|\frac{1}{9}w - \frac{1}{27}w\right| \\
&= \frac{1}{3}|v - w| + \frac{1}{6}\left|v - \frac{1}{3}v\right| + \frac{1}{9}\left|w - \frac{1}{3}w\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|v - \frac{1}{3}v\right| + \frac{1}{9}\left|w - \frac{1}{3}w\right| + \frac{1}{3}|v - w|.
\end{aligned}$$

Sehingga dipilih $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{9}$, dan $\gamma = \frac{1}{3}$, maka

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18} < 1.$$

Jadi T adalah kontraksi Reich dengan $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18} < 1$ untuk $v, w \in [0,1)$.

Kasus 2: untuk $0 \leq v < 1$ dan $T(1) = 1$ berlaku

$$d(Tv, Tw) = |Tv - Tw| = \left|\frac{v}{3} - \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}\left|v - \frac{1}{2}\right|.$$

Akan ditunjukkan bahwa $d(Tv, Tw) \leq \alpha d(v, Tv) + \beta d(w, Tw) + \gamma d(v, w)$.

$$\frac{1}{3}\left|v - \frac{1}{2}\right| \leq \left|\frac{2}{18}v + \frac{5}{54} + \frac{v - 3}{3}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\frac{2}{18}v\right| + \left|\frac{5}{54}\right| + \left|\frac{v-3}{3}\right| \\
&= \left|\frac{3}{18}v - \frac{1}{18}v\right| + \left|\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{3}\right)(v-1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{6}v - \frac{1}{18}v\right| + \left|\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{6-1}{6}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{3}\right)(v-1)\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|v - \frac{1}{3}v\right| + \left|\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{6}{6} - \frac{1}{6}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{3}\right)(v-1)\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|v - \frac{1}{3}v\right| + \frac{1}{9}\left|1 - \frac{1}{6}\right| + \frac{1}{3}|v-1|.
\end{aligned}
$$

Sehingga dipilih $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{9}$, dan $\gamma = \frac{1}{3}$, maka

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18} < 1.$$

Jadi T adalah kontraksi Reich dengan $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18} < 1$ untuk $v \in [0,1)$ dan $T(1) = 1$.

Teorema 2.3 [5]. *Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik dan T merupakan kontraksi Reich. Maka T memiliki titik tetap tunggal.*

Ingat bahwa jika $\alpha = \beta = 0$ maka akan sama dengan teorema titik tetap Banach, sedangkan jika $\alpha = \beta$ dan $\gamma = 0$ maka akan menghasilkan teorema titik tetap Kannan.

2.10 Titik Tetap Sekutu pada Pemetaan Kannan, Reich dan Chattarjea

Teorema 2.4 [20]. *Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Misalkan terdapat $\gamma \in (0,1)$ dan $T_1, T_2 : X \to X$ merupakan fungsi yang memenuhi sebagai berikut*

$$d(T_1 v, T_2 w) \leq \gamma d(v, w),$$

untuk setiap $v, w \in X$ dengan $v \neq 0$ maka T_1 dan T_2 mempunyai titik tetap sekutu yang tunggal.

Teorema 2.5 [20]. *Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Misalkan terdapat $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ dan $T_1, T_2 : X \to X$ merupakan fungsi yang memenuhi sebagai berikut*

$$d(T_1 v, T_2 w) \leq \gamma[d(T_1 v, v) + d(T_2 w, w)],$$

untuk setiap $v, w \in X$ maka T_1 dan T_2 mempunyai titik tetap sekutu yang tunggal.

Contoh 2.12 [20]. Misal $X = [0,1]$ merupakan metrik Euclidean dan $T_1, T_2 : X \to X$ merupakan fungsi yang didefinisikan oleh

$$T_1 v = \begin{cases} \frac{v}{4}, jika\ v \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{v}{5}, jika\ v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dan

$$T_2 v = \begin{cases} \frac{v}{6}, jika\ v \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{v}{7}, jika\ v \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases},$$

untuk setiap $v, w \in X$ memenuhi kondisi $d(T_1 v, T_2 w) \leq \gamma[d(T_1 v, v) + d(T_2 w, w)]$ jika $\gamma = \frac{4}{9}$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 5 maka T_1 dan T_2 memiliki titik tetap sekutu yang tunggal. Perlu dicatat bahwa T_1 dan T_2 keduanya tidak kontinu pada $[0,1]$.

Akan ditunjukkan T adalah fungsi kontraksi.

Kasus 1: untuk $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ dan $w \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ berlaku

$$|T_1 v - T_2 w| \quad = \quad \left|\frac{v}{4} - \frac{w}{6}\right| \quad = \quad \frac{1}{2}\left|\frac{v}{2} - \frac{w}{3}\right|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|T_1 v - T_2 w| \leq \gamma[|T_1 v - v| + |T_2 w - w|]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left|\frac{v}{2} - \frac{w}{3}\right| \quad &\leq \quad \left|\frac{12}{36}v + \frac{20}{54}w\right| \\ &= \quad \left|\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}v\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{5}{6}w\right)\right| \\ &= \quad \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{3}{4}v + \frac{5}{6}w\right| \\ &= \quad \frac{4}{9}\left(\left|\frac{v}{4} - v\right| + \left|\frac{w}{6} - w\right|\right). \end{aligned}$$

Jadi T adalah fungsi kontraksi dengan $\gamma = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ untuk $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ dan $w \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$.

Kasus 2: untuk $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ dan $w \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ berlaku

$$|T_1 v - T_2 w| \quad = \quad \left|\frac{v}{4} - \frac{w}{7}\right|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|T_1 v - T_2 w| \leq \gamma[|T_1 v - v| + |T_2 w - w|]$

$$\left|\frac{v}{4} - \frac{w}{7}\right| \quad \leq \quad \left|\frac{12}{36}v + \frac{24}{63}w\right|$$

$$= \left|\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}v\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{6}{7}w\right)\right|$$
$$= \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{3}{4}v+\frac{6}{7}w\right|$$
$$= \frac{4}{9}\left(\left|\frac{v}{4}-v\right|+\left|\frac{w}{7}-w\right|\right).$$

Jadi T adalah fungsi kontraksi dengan $\gamma = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ untuk $v \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ dan $w \in \left[\frac{1}{3},1\right]$.

Kasus 3: untuk $v \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ dan $w \in \left[0,\frac{1}{3}\right)$ berlaku

$$|T_1v - T_2w| = \left|\frac{v}{5}-\frac{w}{6}\right|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|T_1v - T_2w| \le \gamma[|T_1v - v| + |T_2w - w|]$

$$\left|\frac{v}{5}-\frac{w}{6}\right| \le \left|\frac{16}{45}v+\frac{20}{54}w\right|$$
$$= \left|\frac{4}{9}\left(\frac{4}{5}v\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{5}{6}w\right)\right|$$
$$= \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{4}{5}v+\frac{5}{6}w\right|$$
$$= \frac{4}{9}\left(\left|\frac{v}{5}-v\right|+\left|\frac{w}{6}-w\right|\right).$$

Jadi T adalah fungsi kontraksi dengan $\gamma = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ untuk $v \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ dan $w \in \left[0,\frac{1}{3}\right)$.

Kasus 4: untuk $v \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ dan $w \in \left[\frac{1}{3},1\right]$ berlaku

$$|T_1v - T_2w| = \left|\frac{v}{5}-\frac{w}{7}\right|.$$

Akan dibuktikan bahwa $|Tv - Tw| \le \gamma[|T_1v - v| + |T_2w - w|]$

$$\left|\frac{v}{5}-\frac{w}{7}\right| \le \left|\frac{16}{45}v+\frac{24}{63}w\right|$$
$$= \left|\frac{4}{9}\left(\frac{4}{5}v\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{6}{7}w\right)\right|$$
$$= \left|\frac{4}{9}\right|\left|\frac{4}{5}v+\frac{6}{7}w\right|$$
$$= \frac{4}{9}\left(\left|\frac{v}{5}-v\right|+\left|\frac{w}{7}-w\right|\right).$$

Jadi T adalah fungsi kontraksi dengan $\gamma = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ untuk $v \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ dan $w \in \left[\frac{1}{3},1\right]$.

Berdasarkan Teorema 5 maka T_1 dan T_2 mempunyai titik tetap sekutu di dalam X, yaitu di titik $v = 0$, karena $T_1 0 = 0$ dan $T_2 0 = 0$.

Teorema 2.6 [20]. *Misalkan* (X, d) *merupakan ruang metrik lengkap. Misalkan terdapat* $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *dan* $T_1, T_2: X \to X$ *merupakan fungsi yang memenuhi sebagai berikut*

$$d(T_1 v, T_2 w) \leq \gamma[d(T_1 v, w) + d(T_2 w, v)],$$

untuk setiap $v, w \in X$ *maka* T_1 *dan* T_2 *mempunyai titik tetap tunggal.*

Teorema 2.7 [20]. *Misalkan* (X, d) *merupakan ruang metrik lengkap. Misalkan terdapat* $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *dan* $T_1, T_2: X \to X$ *merupakan fungsi yang memenuhi sebagai berikut*

$$d(T_1 v, T_2 w) \leq \gamma[d(v, w) + d(T_1 v, v) + d(T_2 w, w)],$$

untuk setiap $v, w \in X$ *maka* T_1 *dan* T_2 *mempunyai titik tetap sekutu yang tunggal.*

2.11 Syarat Barisan Cauchy di Ruang *b*-Metrik

Lemma 2.1[27]. *Misalkan (X,q) merupakan ruang b-metrik lengkap dengan* $k \geq 1$ *dan* $\{v_n\} \subset X$ *merupakan barisan di dalam ruang b-metrik yang memenuhi pertidaksamaan berikut*

$$q(v_n, v_{n+1}) \leq \alpha q(v_{n-1}, v_n).$$

Untuk $n \in \mathbb{N}$ *dan* $0 \leq \alpha k < 1$ *maka* $\{v_n\}$ *merupakan barisan Cauchy pada* X*.*