KELENGKAPAN RUANG SOBOLEV

SKRIPSI

ALEXANDER EDWARD POELINGGOMANG

H11116308

Pembimbing Utama	:	**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
Pembimbing Pertama	:	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
Penguji	:	**1. Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**
		2. Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

KELENGKAPAN RUANG SOBOLEV

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ALEXANDER EDWARD POELINGGOMANG

H11116308

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Alexander Edward Poelinggomang
NIM	: H11116308
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

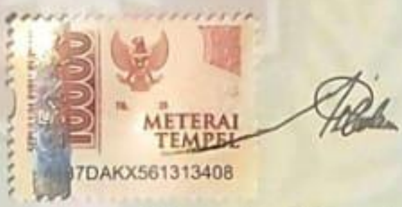
menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Kelengkapan Ruang Sobolev

adalah karya tulis saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain serta skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 3 Agustus 2023

Yang menyatakan,



Alexander Edward Poelinggomang

NIM. H11116308

LEMBAR PENGESAHAN

KELENGKAPAN RUANG SOBOLEV

Disusun dan diajukan oleh

ALEXANDER EDWARD POELINGGOMANG

H11116308

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal, 3 Agustus 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Naimah Aris, S.Si., M.Math.	**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**
NIP. 19711003 199702 2 001	**NIP. 19640207 199103 1 013**

Ketua Program Studi

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus untuk penyertaan dan hikmat yang diberikan oleh-Nya sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan dengan judul **"Kelengkapan Ruang Sobolev"** sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi serta nasihat dari berbagai pihak. Pada kesempatan kali ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang tela h membantu dalam penyelesian skripsi ini terkhusus untuk Ayahanda **Alm. Dr. Edward L. Poelinggomang, MA** dan Ibunda **Dra. Onintowe Nggego Poelinggomang**, yang dengan sabar telah membesarkan dan mendidik penulis, serta senantiasa mendoakan dan mendukung atas setiap langkah perjalanan penulis. Terima kasih kepada kakak **Edwina Oktoria Poelinggomang, S.Psi., Jefriyanto Sir,** dan **Silvia Arfianti** serta seluruh keluarga yang telah memberi doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Disamping itu, izinkan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin sekaligus Dosen Penguji beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan begitu banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta para **Staf Departemen Matematika** yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal mengenai persuratan.

3. Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku Pembimbing Utama sekaligus Pembimbing Akademik dan Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku Pembimbing Pertama yang dengan sabar, tulus dan ikhlas meluangkan banyak waktu ditengah berbagai kesibukan dalam membimbing penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku Penguji yang telah banyak memberikan saran dan masukan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Saudara **Nirmala Gusti Ayu, S.Th** yang telah menjadi sahabat terbaik dalam memberi dukungan, bantuan, serta selalu setia dalam mendengarkan semua cerita proses penyelesaian skripsi penulis.
6. Grup "**Makassar Dagang", Joshua**, **Alsa**, **Alvin, Christina** dan **Livia** yang senantiasa menemani, membantu, menghibur, memberi semangat, serta cerita selama masa perkuliahan.
7. Teman-teman **Matematika 2016** terkhusus kepada **Mustakim, Devvy , Awaluddin, Miranda,** dan **Zaitun** yang telah memberi warna-warni masa perkuliahan serta senantiasa membantu dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman **KKN Desa Sehat Gowa Desa Pattallikang** yang sudah bersama-sama penulis melaksanakan pengabdian sebagai salah satu pengaplikasian Tridharma Perguruan Tinggi.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang juga telah memberikan doa, dukungan dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat balasan dari Tuhan Yesus Kristus. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 3 Agustus 2023

Alexander Edward Poelinggomang

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Alexander Edward Poelinggomang
NIM	: H11116308
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Kelengkapan Ruang Sobolev

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database)*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada tanggal 3 Agustus 2023

Yang menyatakan,

Alexander E. Poelinggomang

ABSTRAK

Ruang Sobolev merupakan konsep yang sangat penting dalam analisis fungsional terapan dan pemecahan persamaan diferensial parsial (PDP). Ruang Sobolev adalah ruang fungsi terukur yang mengandung fungsi-fungsi dan turunan-turunan parsial tertentu yang memiliki integrabilitas tertentu, diukur menggunakan norma Lebesgue. Ruang Sobolev dinamai dari matematikawan Rusia, Sergei Sobolev, yang mengenalkan konsep ini pada tahun 1930-an. Kelengkapan dari ruang Sobolev akan dituliskan pada skripsi ini. Dalam menentukan kelengkapan ruang Sobolev, perlu ditunjukkan bahwa ruang ini merupakan ruang Vektor, ruang Bernorma, dan untuk setiap barisan Cauchy pada sebuah ruang konvergen ke suatu titik pada ruang tersebut. Hasil dari penelitian ini telah menunjukkan bahwa ruang Sobolev adalah ruang yang lengkap dengan menunjukkan bagaimana ruang Sobolev memenuhi sifat-sifat ruang vektor, memiliki norma yang memenuhi empat sifat ruang bernorma, dan untuk setiap barisan Cauchy pada sebuah ruang konvergen ke suatu titik pada ruang tersebut. Berdasarkan pembuktian bahwa ruang Lebesque merupakan ruang lengkap, untuk menunjukkan untuk setiap barisan Cauchy pada sebuah ruang konvergen ke suatu titik pada ruang dapat dibuktikan. Jadi, ruang Sobolev adalah ruang yang lengkap.

Kata Kunci*:* *ruang Sobolev, ruang Vektor, ruang bernorma , barisan Cauchy, kelengkapan ruang Sobolev.*

ABSTRACT

Sobolev space is a very important concept in applied functional analysis and the solution of partial differential equations (PDEs). Sobolev space is a space of measurable functions that contains certain functions and partial derivatives with specific integrability, measured using the Lebesgue norm. Sobolev space is named after the Russian mathematician, Sergei Sobolev, who introduced this concept in the 1930s. The completeness of Sobolev space will be discussed in this research. In determining the completeness of Sobolev space, it needs to be shown that this space is a Vector space, a Normed space, and for every Cauchy sequence in a space converges to a point in that space. The results of this research have demonstrated how Sobolev space is a complete space by showing how Sobolev space satisfies the properties of a vector space, has a norm that fulfills the four properties of a normed space, and for every Cauchy sequence in a space converges to a point in that space. Based on the proof that Lebesgue space is a complete space, it can be shown that for every Cauchy sequence in a space converges to a point in that space. Therefore, Sobolev space is a complete space.

Keywords : *Sobolev space, Vector space, Norm space, Cauchy sequence, complete space.*

DAFTAR ISI

PERNYATAAN KEASLIAN iii
LEMBAR PENGESAHAN iv
KATA PENGANTAR v
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR vii
ABSTRAK viii
DAFTAR ISI x
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penelitian 2
1.5 Manfaat Penelitian 2
1.6 Sistematika Penulisan 3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 4
2.2 Ruang L^p 4
2.3 Fungsi Konveks 5
2.3 Ruang Vektor 5
2.4 Ketaksamaan Minkowski 9
2.4 Ruang Norm 10
2.5 Barisan Cauchy 12
2.6 Ruang Banach 13
BAB III METODOLOGI PENELITIAN 14
3.1 Jenis Penelitian 14
3.2 Tempat dan Waktu Penelitian 14

3.3 Tahapan Penelitian 14
BAB IV PEMBAHASAN.. 15
4.1 Terintegral Lokal.. 15
4.2 Turunan Lemah 15
4.3 Kelengkapan Ruang Sobolev 16
BAB V PENUTUP.. 24
5.1 Kesimpulan.. 24
5.2 Saran.. 24
DAFTAR PUSTAKA 25

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbagai permasalahan di kehidupan dapat dituliskan dalam bentuk matematika. Terdapat beberapa bagian di dalamnya, yaitu analisis, aljabar dan kombinatorika, serta matematika terapan. Hal-hal yang dibahas dalam analisis adalah bagian yang terkait dengan objek-objek abstrak, seperti: himpunan-himpunan bilangan, titik-titik geometri atau himpunan fungsi-fungsi yang memetakan bilangan ke bilangan atau titik ke titik.

Analisis fungsional merupakan cabang matematika abstrak yang tidak memusatkan perhatian pada ruang yang berdimensi dua, tetapi juga dimensi tiga, empat sampai tak hingga (Kreyzig, 1978).

Dalam analisis fungsional telah banyak dibahas mengenai ruang dan sifat-sifatnya, misalnya ruang fungsi-fungsi terukur dan norma yang didefinisikan dengan integral. Ruang Sobolev termasuk salah satu ruang yang dibangun dari fungsi-fungsi terukur dan norma yang didefinisikan dengan integral.

Ruang Sobolev merupakan konsep yang sangat penting dalam analisis fungsional terapan dan pemecahan persamaan diferensial parsial (PDP). Ruang Sobolev adalah ruang fungsi terukur yang mengandung fungsi-fungsi dan turunan-turunan parsial tertentu yang memiliki integrabilitas tertentu, diukur menggunakan norma Lebesgue. Ruang Sobolev dinamai dari matematikawan Rusia, Sergei Sobolev, yang mengenalkan konsep ini pada tahun 1930-an. (Adams, 2003)

Ruang Sobolev memiliki peran sentral dalam penyelesaian PDP karena beberapa jenis PDP memiliki solusi dalam ruang Sobolev, memungkinkan studi sifat-sifat kualitatif dan kuantitatif dari solusi. Oleh karena itu, memahami kelengkapan ruang Sobolev menjadi esensial dalam mengatasi masalah-masalah matematika dan fisika yang melibatkan ruang fungsi terukur. Selain itu, ruang Sobolev juga berhubungan dengan teori distribusi dan teorema embedding serta interpolasi, yang memberikan hasil-hasil penting tentang hubungan antara ruang Sobolev dengan ruang fungsi lainnya.

Penelitian tentang kelengkapan ruang Sobolev memiliki implikasi yang luas dalam pengembangan teori matematika dan dalam penerapannya untuk memecahkan masalah-masalah kompleks dalam berbagai bidang ilmu, termasuk fisika matematika, analisis numerik, dan teori kontrol. Untuk mengetahui bahwa suatu ruang adalah lengkap, kita perlu untuk menunjukkan bahwa untuk setiap barisan Cauchy pada sebuah ruang konvergen ke suatu titik pada ruang tersebut (Dominic, 2017).

Oleh karena itu, penelitian tentang kelengkapan ruang Sobolev menjadi topik yang menarik dan relevan untuk diteliti dalam skripsi ini.

1.2 **Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka diperoleh rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini yaitu bagaimana menunjukkan bahwa untuk setiap barisan Cauchy pada ruang Sobolev konvergen ke suatu titik pada ruang tersebut?

1.3 **Batasan Masalah**

Adapun batasan masalah dalam skripsi ini adalah range dari ruang Sobolev yang digunakan merupakah bilangan Riil.

1.4 **Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan penelitian dalam skripsi ini adalah untuk membuktikan kelengkapan dari ruang Sobolev.

1.5 **Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan dalam menunjukkan kelengkapan dari ruang Sobolev.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari lima bagian. Masing-masing bagian dibagi ke dalam subbab dengan rincian sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan yang memberikan gambaran singkat mengenai penelitian ini.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisikan pemaparan secara singkat mengenai konsep dasar yang mendukung pembahasan masalah, yaitu ruang L^p, ruang Vektor, ketaksamaan Minkowski, ruang Bernorma, barisan Cauchy, ruang Banach, dan Ruang Sobolev.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini berisikan metode dan tahapan-tahapan yang digunakan dalam menunjukkan kelengkapan dari Ruang Sobolev.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan disajikan pembahasan dari tugas akhir ini yaitu menunjukkan kelengkapan dari Ruang Sobolev.

BAB V PENUTUP

Dalam bab ini berisi tentang kesimpulan hasil penelitian dan saran yang ditunjukan bagi para peneliti agar bisa mengembangkan penelitian ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Dalam menentukan kelengkapan ruang Sobolev, diperlukan beberapa definisi tentang ruang L^p, ruang Vektor, ketaksamaan Minkowski, ruang Bernorma, barisan Cauchy, ruang Banach, dan ruang Sobolev. Pada bab ini akan diberikan definisi dan konsep dasar tentang ruang-ruang tersebut.

2.1 Ruang L^p

Ruang Lebesgue pertama kali ditemukan oleh Henri Lebesgue pada tahun 1910. Ruang Lebesgue merupakan suatu ruang kelas ekuivalen fungsi yang dilengkapi suatu norma. Fungsi-sungsi tersebut merupakan fungsi terukur (Lebesgue). Norma pada ruang Lebesgue didefinisikan dengan suatu integral (Lebesgue) yang bernilai terbatas. Dalam beberapa hal, ruang Lebesgue dapat menjadi *prototype* bagi semua ruang fungsi (Rafeiro, 2005).

Definisi 2.1 *Misalkan* [a,b]$\subset \mathbb{R}$. *Untuk* $1 \leq p < \infty$, *ruang* $L^p[a,b]$ *didefinisikan sebagai* $L^p[a,b] = \left\{ f \mid f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \ , \ \int_a^b |f|^p \, dx < \infty \right\}$ *dengan definisi norm berikut:*

$$\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Contoh 2.1 Fungsi konstan $f = k, k \in \mathbb{R}$ merupakan anggota $L^2[0,1]$. Ruang $L^2[0,1]$ yang didefinisikan sebagai himpunan

$$L^2[0,1] = \left\{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\colon \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

merupakan ruang Lebesgue pada $[0,1]$.

Bukti.

Misalkan $f = k, k \in \mathbb{R}$,

akan ditunjukkan $\int_0^1 |k|^2 \, dx < \infty$.

$\int_0^1 |k|^2 \, dx = \int_0^1 k^2 \, dx = [k^2 x]_0^1 = \big(k^2(1)\big) - \big(k^2(0)\big) = k^2 < \infty.$

$\therefore \int_0^1 |k|^2 \, dx < \infty.$ ■

2.2 Fungsi Konveks

Definisi 2.2 *Sebuah fungsi* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *adalah konveks jika* D_f *adalah himpunan konveks. Kemudian* $\forall x, y \in D_f$ *dan* α *yang memenuhi* $0 \leq \alpha \leq 1$ *diperoleh*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

(Boyd, 2004)

Lemma 2.1 *Misalkan* f, g *adalah sebuah fungsi konveks, maka diperoleh*

$$|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f^p| + |g|^p)|.$$

Bukti.

Misalkan $h(x) = |x|^p, h(x)$ adalah fungsi konveks untuk $p > 1$. Dengan menggunakan definisi fungsi konveks, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}g\right|^p &\leq \left|\tfrac{1}{2}|f| + \tfrac{1}{2}|g|\right|^p \\ &\leq \tfrac{1}{2}|f|^p + \tfrac{1}{2}|g|^p, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq \left|\tfrac{1}{2}|2f| + \tfrac{1}{2}|2g|\right|^p \\ &\leq \frac{2^p}{2}|f|^p + \frac{2^p}{2}|g|^p \\ &= 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p \\ &= 2^{p-1}(|f^p| + |g|^p). \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3 *Ruang vektor* X *dengan lapangan* K *adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar yaitu elemen dari* K *sedemikian sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ $\alpha, \beta \in K$, *terhadap kedua operasi tersebut berlaku:*

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in X$
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.$

3. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.
4. *Terdapat vektor* $0 \in X$ *sedemikian sehingga* $0 + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + 0 = \boldsymbol{x}$
5. *Terdapat* $-\boldsymbol{x} \in X$ *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = 0$.
6. $\alpha x \in X$
7. $\alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.
8. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.
9. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha x + \beta\boldsymbol{x}$.
10. *Untuk setiap* $x \in X$, $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(Anton, 2010)

Contoh 2.2 Ruang Lebesgue $L^p[a,b] = \left\{ f \mid f: [a,b] \to \mathbb{R} \ , \ \ \int_a^b |f|^p \, dx < \infty \right\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi, yakni

$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ dan

$(\alpha\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t}) = \alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$,

merupakan ruang vektor.

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in L^p[a,b]$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akan dibuktikan bahwa $L^p[a,b]$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \in L^p[a,b]$.

   Karena $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in L^p[a,b]$, maka diperoleh

   $\int_a^b |\boldsymbol{f}|^p \, dt < \infty$ dan $\int_a^b |\boldsymbol{g}|^p \, dt < \infty$.

   $\int_a^b |(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$.

   Dengan menggunakan Lemma 2.1, diperoleh

   $$\begin{aligned} \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt &\leq \int_a^b 2^{p-1}(|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}} + |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}}) \, dt \\ &= 2^{p-1} \int_a^b (|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}} + |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}}) \, dt \\ &= 2^{p-1} \left(\int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}} \, dt + \int_a^b |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}} \, dt \right). \end{aligned}$$

   Karena $\int_a^b |\boldsymbol{f}|^p \, dt < \infty$ dan $\int_a^b |\boldsymbol{g}|^p \, dt < \infty$, maka

   $2^{p-1} \left(\int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}} \, dt + \int_a^b |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^{\boldsymbol{p}} \, dt \right) < \infty$.

$\therefore \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt < \infty.$

Karena $\int_a^b |(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})|^p \, dt < \infty$. Jadi,$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t}) \in L^p[a,b]$. ■

2. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in L^p[a,b]$

maka $\int_a^b |(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

$= \int_a^b |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

$= \int_a^b |(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})|^p \, dt.$

Jadi, $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}$. . ■

3. Akan ditunjukkan $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + (\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h})$.

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in L^p[a,b]$,

maka $\int_a^b |[(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})] + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

$= \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + [(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h})(\boldsymbol{t})]|^p \, dt$

Jadi, $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + (\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h})$. ■

4. Akan ditunjukkan terdapat vektor $\mathbf{0} \in L^p[a,b]$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in L^p[a,b]$ berlaku $\boldsymbol{f} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$.

Misalkan $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in L^p[a,b]$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$. Dengan kata lain

$$\int_a^b |(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$

$$= \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$

Dari persamaan ini diperoleh $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$.

Akibatnya $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$.

$\int_a^b |(\boldsymbol{f} + \mathbf{0})(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

$= \int_a^b |\mathbf{0}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

$= \int_a^b |(\mathbf{0} + \boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

Jadi, terdapat $\boldsymbol{g} = \mathbf{0} \in L^p[a,b]$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{f} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$. ■

5. Akan ditunjukkan terdapat $(-\boldsymbol{f}) \in L^p[a,b]$ untuk setiap $\boldsymbol{f} \in L^p[a,b]$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{f} + (-\boldsymbol{f}) = (-\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$.

   $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in L^p[a,b]$, misalkan $\int_a^b |(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{0}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$

   $$\int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt = \int_a^b |\boldsymbol{0}(\boldsymbol{t})|^p \, dt,$$

   maka $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ sehingga $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{f}.$

   $$\int_a^b \left|\left(\boldsymbol{f} + (-\boldsymbol{f})\right)(\boldsymbol{t})\right|^p dt = \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + (-\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$
   $$= \int_a^b |(-\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$
   $$= \int_a^b |\boldsymbol{0}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$

   Jadi, $\exists(-\boldsymbol{f}) \in L^p[a,b] \; \forall \, \boldsymbol{f} \in L^p[a,b]$ *sedemikian sehingga*

   $\boldsymbol{f} + (-\boldsymbol{f}) = (-\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. ■

6. Akan ditunjukkan $\alpha\boldsymbol{f} \in L^p[a,b]$.

   $\boldsymbol{f} \in L^p[a,b]$ maka

   $$\int_a^b |(\alpha\boldsymbol{f})(t)|^p \, dt = \int_a^b |\alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$
   $$= \int_a^b |\alpha|^p |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$
   $$= |\alpha|^p \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt.$$

   Karena $\int_a^b |\boldsymbol{f}|^p \, dt < \infty$, maka

   $$|\alpha|^p \int_a^b |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p \, dt < \infty.$$

   $\therefore \int_a^b |(\alpha\boldsymbol{f})(t)|^p \, dt < \infty.$

   Karena $\int_a^b |(\alpha\boldsymbol{f})(t)|^p \, dt < \infty$. Jadi, $(\alpha\boldsymbol{f})(t) \in L^p[a,b]$. ■

7. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \alpha\boldsymbol{f} + \alpha\boldsymbol{g}$.

   $\boldsymbol{f} \in L^p[a,b]$ maka

   $$\int_a^b \left|\alpha\left((\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})\right)\right|^p dt = \int_a^b |\alpha(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))|^p \, dt$$
   $$= \int_a^b |\alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) + \alpha\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|^p \, dt$$
   $$= \int_a^b |(\alpha\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t}) + (\alpha\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})|^p \, dt.$$

   Jadi, $\alpha(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \alpha\boldsymbol{f} + \alpha\boldsymbol{g}.$ ■

8. Akan ditunjukkan bahwa $(\alpha+\beta)\boldsymbol{f}=\alpha\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{f}$

   $\boldsymbol{f}\in L^p[a,b]$ maka

   $$\int_a^b\left|\left((\alpha+\beta)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\right)\right|^p\,dt=\int_a^b|\alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})+\beta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|^p\,dt$$
   $$=\int_a^b|(\alpha\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})|^p\,dt.$$

   Jadi, $(\alpha+\beta)\boldsymbol{f}=\alpha\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{f}$. ■

9. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(\beta\boldsymbol{f})=(\alpha\beta)\boldsymbol{f}$.

   $\boldsymbol{f}\in L^p[a,b]$ maka

   $$\int_a^b\left|\alpha\left((\beta\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})\right)\right|^p\,dt=\int_a^b|\alpha(\beta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}))|^p\,dt$$
   $$=\int_a^b|(\alpha\beta)f(\boldsymbol{t})|^p\,dt.$$

   Jadi, $\alpha(\beta\boldsymbol{f})=(\alpha\beta)\boldsymbol{f}$. ■

10. Akan ditunjukkan bahwa $1\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}$. Dengan menggunakan sifat perkalian scalar dengan $\alpha=1$ diperoleh

    $\boldsymbol{f}\in L^p[a,b]$ maka

    $$\int_a^b|(1\boldsymbol{f})(t)|^p\,dt=\int_a^b|1\boldsymbol{f}(t)|^p\,dt$$
    $$=\int_a^b|\boldsymbol{f}(t)|^p\,dt$$

    Jadi, untuk setiap $\boldsymbol{f}\in L^p[a,b], 1\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}$. ■

Karena semua sifat ruang vektor terpenuhi, maka $L^p[a,b]$ adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. ■

2.4 Ketaksamaan Minkowski

Ketaksamaan Minkowski merupakan ketaksamaan dasar yang dikembangkan dari ketaksamaan segitiga yang ditemukan pertama kali oleh Matematikawan asal Jerman pada tahun 1907. Karena fungsi dalam analisis dan aplikasinya, ketaksamaan ini mendapat perhatian yang cukup besar dalam beberapa dekade terakhir dan banyak penelitian telah muncul yang membahas berbagai perumuman, perluasan, dan penerapannya. Salah satunya adalah penelitian dalam jurnal yang ditulis oleh Ondrej Hutnik mengenai definisi ketaksamaan Minkowski diskrit dan integral.

Definisi 2.4 *Misalkan $p \in \mathbb{R}$ dimana $p > 1$. Kemudian bentuk diskrit dan integral dari ketaksamaan Minkowski diberikan dengan*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

untuk barisan a_i, b_i, dan

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{u}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

untuk fungsi kontinu f dan g di $[a, b]$.

(Hutnik, 2000).

2.5 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan bentuk umum dari konsep panjang suatu vektor pada sistem bilangan real.

Definisi 2.5 *Pasangan $(V, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma riil dengan V merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan riil R dan fungsi $\|\cdot\| : V \to R$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ memenuhi sifat-sifat berikut:*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \boldsymbol{0}$ dan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$.
3. $\|c\boldsymbol{x}\| = |c| \, \|\boldsymbol{x}\|$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dan $c \in \mathbb{R}$.
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

(Kreyszig, 1989).

Contoh 2.3 Ruang $L^p[a, b]$ merupakan ruang bernorma, dengan norma yang didefinisikan sebagai berikut

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bukti:

Ambil $f, g \in L^p[a, b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) Akan ditunjukkan bahwa $\|f\| \geq 0$.

Misalkan $F'(x) = f(x)$,

maka $\int_a^b |f(x)|^p \, dx = |F(b) - F(a)|$

dimana $|F(b) - F(a)| \geq 0$ sehingga $|F(b) - F(a)|^{\frac{1}{p}} \geq 0$.

Jadi, $\|f\| \geq 0$.

(ii) Akan ditunjukkan $\|\mathrm{f}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathrm{f} = 0$.

Akan dibuktikan jika $\|f\| = 0$ maka $f = 0$.

Asumsikan $\|f\| = 0$, maka

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\int_a^b |f(x)|^p \ dx = 0^p$$

$$|f(x)|^p = 0$$

$$|f(x)| = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$f = 0.$$

Lebih lanjut, diperoleh $\int_a^b |f|^p \ dx = 0$, sehingga $f = 0$.

Akan dibuktikan jika $f = 0$ maka $\|f\| = 0$.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |0|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_{L^p} = 0.$$

Diperoleh jika $f = 0$ maka $\|f\| = 0$.

Jadi, terbukti $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$. ■

(iii) Akan ditunjukkan $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

$$\|\alpha f\| = \left(\int_a^b |\alpha f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Berdasarkan sifat nilai mutlak, maka

$$\|\alpha f\| = \left(\int_a^b |\alpha|^p |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|\alpha|^p \int_a^b |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \left(\int_a^b |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|f\|. \blacksquare$$

(iv) Akan ditunjukkan $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Berdasarkan ketaksamaan Minkowski, maka

$$\|f + g\|_{L^p} = \int_a^b |f + g|^p \ dx$$

$$\leq \left(\int_a^b |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Jadi, diperoleh $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

Karena ruang L^p memenuhi 4 aksioma ruang bernorma, maka dapat disimpulkan $(L^p, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

2.6 Barisan Cauchy

Definisi 2.6 *Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $\boldsymbol{x} \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$,*

$$\|x_n - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon.$$

Barisan (x_n) di X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$,

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

(Bartle, 2010).

Contoh 2.4 Barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ adalah barisan yang konvergen ke $0 \in \mathbb{R}$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Akan ditunjukan bahwa terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$,

$$\|x_n - 0\| < \varepsilon.$$

Pilih $N > \frac{1}{\varepsilon}$, mengakibatkan $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Karena $n \geq N$ maka $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ sehingga

$$\|x_n - 0\| = \|x_n\| = \left\|\frac{1}{n}\right\| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Atau $\|x_n - 0\| < \varepsilon$.

Jadi barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ konvergen ke $0 \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ merupakan barisan Cauchy.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan pilih $N > \frac{2}{\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2},$$

diperoleh :

$$\|\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{x_n}\| = \left\|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right\| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ juga merupakan barisan Cauchy (Bartle, 2010).

2.7 Ruang Banach

Definisi 2.7 *Ruang bernorma X disebut ruang yang lengkap jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen ke suatu elemen dalam X. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach* (Dominic, 2017).

Contoh 2.5 Ruang L^{p} merupakan ruang Banach.

Berdasarkan teorema Riesz-Fischer, L^p terbukti merupakan ruang banach (Lihat referensi [8]).