EFEKTIVITAS METODE SAUL'YEV DALAM MENENTUKAN HARGA OPSI EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN

S K R I P S I

MUHAMMAD AWALUDDIN

H111 16 003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2023

EFEKTIVITAS METODE SAUL'YEV DALAM MENENTUKAN HARGA OPSI EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN

S K R I P S I

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar

MUHAMMAD AWALUDDIN

H111 16 003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Muhammad Awaluddin
NIM	: H11116003
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Efektivitas Metode Saul'yev dalam Menentukan Harga Opsi Eropa dengan Pembagian Dividen

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 3 Agustus 2023

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

9FCAKX605803644

Muammad Awaluddin

NIM. H11116003

LEMBAR PENGESAHAN

EFEKTIVITAS METODE SAUL'YEV DALAM MENENTUKAN HARGA OPSI EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN

Disusun dan diajukan oleh
MUHAMMAD AWALUDDIN
H11116003

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal, 3 Agustus 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19641112 198703 1 002	**NIP. 19680601 199512 2 001**

Ketua Program Studi

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807200003 1 002

KATA PENGANTAR

Ucapan puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala karunia serta berkat-Nya yang senantiasa memberikan segala nikmat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Efektivitas Metode Saul'yev dalam Menentukan Harga Opsi Eropa dengan Pembagian Dividen"** untuk memenuhi persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih sebagai wujud penghargaan kepada kedua orang tua tersayang **La Sahidu** dan **Tini** yang dengan penuh kasih sayang dan kesabaran untuk mendukung penulis dalam segala hal, semoga Allah SWT memberikan kesehatan dan umur panjang yang berkah Aamiin. Dan juga kepada saudara-saudara **Muhammad Dirwan, Jumriani, Sarbia, Sarfina, Nur Azizah dan Nur Salva** terima kasih atas kebersamaan dan dukungan yang tiada henti semoga kita selalu dalam lindungan Allah SWT agar selalu menjadi keluarga yang harmonis.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak **Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D.** selaku pembimbing utama dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** selaku pembimbing pertama, yang dengan penuh kesabaran dan keikhlasan meluangkan banyak waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan dan membimbing penulis dari awal penyusunan sampai selesai.

Ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.S.c.** selaku **Rektor Universitas Hasanuddin.**
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku **Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin** serta seluruh staf dekanat.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku Sekretaris

Departemen Matematika, dan segenap bapak dan ibu dosen serta staf Departemen Matematika, yang telah membekali ilmu dan bantuannya selama ini kepada penulis.

4. Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** dan Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku tim penguji yang telah meluangkan waktu untuk memberikan kritik dan saran yang sangat membangun dalam penyusunan skripsi ini.
5. Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** selaku penasehat akademik yang selalu setia membimbing penulis mulai dari awal kuliah sampai tahap akhir.
6. **Zaitun, Mustakim, Wisnu, Alex, Miranda, Devvy,** saudara(i) **A16oritma 2016** dan Saudara(i) **MIPA 2016** yang telah memberikan penulis bantuan dan pengalaman yang sangat berharga yang tak bisa dilupakan mulai sejak awal kuliah sampai tahap akhir. Salam **Bersatu Dalam Kebersamaan dan Seperti Seharusnya.**
7. Keluarga Besar **Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unhas** yang selalu memberikan pembelajaran yang sangat berharga bagi penulis yang tidak bisa didapatkan di tempat lain. Salam ***Queen Of Science*** **BRAVO Himatika.**
8. Keluarga Besar **KM FMIPA Unhas** yang selalu memberikan pembelajaran yang terbaik untuk anggotanya.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebut satu per satu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya. Aamiin.

Makassar, 3 Agustus 2023

Muhammad Awaluddin

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Muhammad Awaluddin
NIM	:	H111 16 003
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusif Royalti-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Efektivitas Metode Saul'yev dalam Menentukan Harga Opsi Eropa dengan Pembagian Dividen"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas Hasanuddin, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama telah mencantumkan nama saya sebagai penulis atau pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Makassar
Pada tanggal : 3 Agustus 2023

Yang menyatakan

(Muhammad Awaluddin)

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang efektivitas metode Saul'yev dalam menentukan harga opsi tipe Eropa. Model yang digunakan adalah model Black-Scholes dengan asumsi adanya pembagian dividen, yang dibangun dari model harga saham. Penentuan harga opsi dengan Metode Saul'yev dilakukan dengan tiga skema pendekatan yaitu *left to right, right to left* dan kombinasi keduanya. Efektivitas metode Saul'yev akan ditinjau dari seberapa kecil galat yang diperoleh dari harga opsi hasil komputasi dan analitik. Adapun hasil yang didapatkan yaitu harga opsi yang diperoleh menggunakan pendekatan metode Saul'yev (gabungan) lebih efektif dari pada metode Saul'yev (*left to right*) dan metode Saul'yev (*right to left*). Hal ini terlihat dari semakin besar jumlah grid waktu t dan saham S maka harga opsi semakin konvergen dengan galat mencapai 10^{-4}. Sedangkan, untuk metode Saul'yev (*left to right*) dan metode Saul'yev (*right to left*) memiliki efektivitas yang serupa yaitu mencapai galat 10^{-2}.

Kata kunci: Opsi Eropa, model Black-scholes, metode Saul'yev, dividen.

ABSTRACT

This research discusses the effectiveness of the Saul’yev method in determining the prices of European type options. The model used is the Black-Scholes model with the assumption of dividend distribution, which is constructed based on the stock price model. The determination of option prices with the Saul’yev method is carried out using three approaches: left to right, right to left, and a combination of both. The effectiveness of the Saul’yev method will be assessed based on the smallness of the error obtained from the computed option prices compared to the analytical ones. The results show that the option prices obtained using the combined Saul’yev method are more effective than those obtained using the Saul’vev method (left to right) and the Saul’yev method (right to left). This is evident from the increasing number of times t and stock grid S points, resulting in the option prices converging with an error reaching 10^{-4}. *On the other hand, the Saul’yev method (left to right) and the Saul’yev method (right to left) have similar effectiveness, both yielding an error of* 10^{-2}.

Keywords: European option, Black-Scholes model, Saul’yev’s method, dividend.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar belakang

Pemanfaatan ilmu matematika telah digunakan dalam dunia terapan. Salah satunya adalah dalam bidang ekonomi seperti investasi dalam pasar modal. Jenis investasi atau instrument keuangan yang diperjualbelikan pada pasar modal merupakan surat berharga yang umumnya memiliki umur lebih dari satu tahun, seperti saham.

Saham adalah sertifikat yang menunjukan bukti kepemilikan suatu perusahaan, dan pemegang saham memiliki hak klaim atas penghasilan dan aktiva perusahaan. Menurut Resmiyanto (2014) pergerakan harga saham selalu berubah-ubah dan dapat berfluktuasi (*volatility*), sehingga memiliki resiko kerugian dalam waktu singkat. Untuk meminimalakan resiko investor dapat memeperdagangkan instrumen derivatif. Hull (2003) menyatakan bahwa, derivatif merupakan instrumen keuangan yang nilainya bergantung pada surat berharga acuan (*underlying asset*). Salah satu instrument derivatif yaitu opsi (*option*).

Opsi merupakan suatu kontrak dengan penulis opsi (*writer*) yang memberikan hak kepada pemegang opsi (*holder*) untuk membeli atau menjual sejumlah aset atau surat berharga acuan (*underlaying asset*) dengan harga yang telah disepakati (*strike price*) dalam jangka waktu yang sudah ditentukan (Resmiyanto, 2014). Opsi dapat digolongkan menjadi dua bagian yaitu berdasarkan haknya dan waktu pelaksanaan hak tersebut. Berdasarkan haknya terdapat dua jenis opsi yaitu opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Opsi beli merupakan hak pemegang opsi untuk membeli surat berharga acuan dengan harga kesepakatan dalam jangka waktu yang telah ditentukan. Sebaliknya, opsi jual merupakan hak pemegang opsi untuk menjual surat berharga acuan dengan harga kespakatan dalam jangka waktu yang telah ditentukan. Kemudian, berdasarkan waktu untuk melaksanakan haknya opsi dibagi menjadi dua jenis. Pertama, opsi tipe Eropa (*European option*) yang hanya dapat dilaksanakannya pada saat waktu jatuh tempo. Kedua, opsi tipe Amerika (*American option*) yang memungkinkan dilaksanakannya opsi mulai dari persetujuan kontrak hingga berakhirnya masa opsi atau jatuh tempo (Hull, 2003).

Dalam mementukan harga opsi saham, ada beberapa faktor yang harus diperhatikan, Resmiyanto (2014) menguraikan bahwa faktor – faktor yang dapat mempengaruhi harga suatu opsi yaitu harga saham, harga kesepakatan (*strike price*), jangka waktu jatuh tempo, volatilitas (*volatility*), suku bunga bebas risiko, dan dividen. Menurut Brandimarte (2006) salah satu cara yang paling terkenal untuk menentukan harga opsi saham adalah model Black-Scholes. Model ini dikembangkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 yang berhasil merumuskan masalah penentuan harga opsi ke dalam bentuk persamaan diferensial parsial (PDP) Black-Scholes. Salah satu asumsi dalam model ini adalah nilai dividen yang dianggap konstan. Resmiyanto (2014) menyatakan bahwa, dividen adalah keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada para pemegang saham. Dividen diberikan setelah mendapat persetujuan dalam RUPS (Rapat Umum Pemegang Saham). Kondisi ini menegaskan bahwa pada kenyataannya tidak semua kontrak opsi disepakati tanpa pembagian atau pembayaran dividen. Sehingga model Black-Scholes dapat dikembangkan dengan asumsi adanya pembagian dividen pada saham acuan. Selanjutnya, model ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode beda hingga.

Metode beda hingga adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan kondisi awal dan batas (Resmiyanto, 2014). Metode ini menggunakan deret Taylor untuk melakukan pendekatan pada turunan-turunan yang ada di persamaan, sehingga berubah menjadi bentuk aljabar. Pendekatan ini biasa dikenal dengan sebutan beda maju, beda mundur dan beda pusat. Salah satu metode beda hingga metode Saul'yev.

Noye (1983) menjelaskan bahwa metode Saul'yev merupakan metode yang dikemukakan oleh Saul'yev pada sekitar tahun 1964. Metode ini didasari dengan melakukan diskritisasi menggunakan pendekatan beda pusat untuk laju perubahan u tehadap waktu t dan terhadap spasial x degan titik $u\left(i\Delta x, n\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t\right)$ dengan i adalah gird terhadap spasial x dan n gird terhadap waktu t. Metode ini dapat diselesaikan dengan tiga Skema yaitu menggunakan sapuan dari kiri kekanan (*left to right*), sapuan dari kanan kekiri (*right to left*), dan menggabungkan *left to right* dengan *right to left* .

Penerapan metode beda hingga dalam menentukan nilai opsi Eropa telah dilakukan pengkajian oleh beberapa peneliti dalam penelitiannya yaitu seperti Siswanto, dkk. (2014) yang menentukan nilai opsi pada model Black-Scholes standar menggunakan metode beda hingga skema Dufort-Frankel dan Abidin (2020) yang menentukan nilai opsi Eropa menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson dengan pembagian dividen. Adapun Penggunaan metode Saul'yev dalam menentukan harga opsi Eropa belum pernah dilakukan.

Oleh karena itu, pada penelitian kali ini akan dibahas mengenai bagaimana menentukan harga opsi Eropa menggunakan model Black-Scholes ketika ada pembagian dividen menggunakan metode Saul'yev. Kemudian akan ditinjau efektifitas hasil komputasi dari ketiga skema penyelesaiaan metode Saul'yev setelah dibandingkan dengan solusi analitiknya.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model Black-Scholes ketika adanya pembayaran atau pembagian dividen?
2. Bagaimana efektifitas penggunaan metode Saul'yev dalam menentukan harga opsi Eropa dengan adanya pembagian dividen?

1.3. Batasan Masalah

1. Penentuan harga opsi menggunakan metode Saul'yev.
2. Pembayaran dividen dilakukan secara kontinu, artinya pembayaran dilakukan secara terus menerus selama masa periode yang telah ditentukan dengan harga atau nilai yang konstan.

1.4. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penulisan ini diuraikan sebagai berikut:

1. Memformulasikan model Black-Scholes ketika adanya pembayaran atau pembagian dividen.

2. Meninjau efektifitas penggunaaan metode Saul'yev dalam menentukan harga opsi Eropa dengan adanya pembagian dividen.

1.5. Manfaat Penulisan

Penulisan ini diharapkan akan memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan tambahan literatur mengenai metode beda hingga khususnya metode Saul'yev.
2. Memberikan gambaran mengenai efektivitas aplikasi metode beda hingga pada bidang ekonomi khususnya penentuan harga opsi Eropa.
3. Sebagai dasar penelitian-penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan model Black-Scholes dalam penentuan harga opsi Eropa.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Saham

Saham adalah sertifikat yang menunjukkan bukti kepemilikan suatu perusahaan, dan pemegang saham memiliki hak klaim atas penghasilan dan aktiva perusahaan. Ada dua keuntungan bagi pemodal yang memiliki saham, yakni dividen dan laba modal (*capital gain*).

Dividen merupakan keuntungan emiten yang dibagikan kepada para pemgang saham.Sedangkan, laba modal atau *capital gain* merupakan selisih harga beli dan harga jual saham. Harga Sebuah saham dipengaruhi oleh hukum permintaan dan penawaran, semakin banyaknya permintaan maka harga saham akan cenderung naik serta cenderung turun jika terjadi kelebihan penawaran (Sudirman, 2015).

Saham dikenal dengan karakteristik high risk-high return. Artinya, saham merupakan surat berharga yang memberikan peluang keuntungan tinggi namun juga memiliki resiko besar. Saham memungkinkan pemodal untuk mendapatkan hasil pengembalian (*return*), dalam hal ini laba modal, dalam jumlah besar dalam waktu singkat. Namun, fluktuasi harga saham juga dapat membuat pemodal mengalami kerugian besar dalam waktu singkat (Resmiyanto, 2014).

Untuk meraup keuntungan yang besar dan meminimalakan resiko dari karakteristik harga saham, investor dapat memeperdagangkan salah satu instrument derivatif yaitu opsi (o*ption*). Dalam pembahasan selanjutnya, penulisan opsi dimaksudkan sebagai opsi atas saham.

2.2. Aspek-Aspek Opsi

Menurut Resmiyanto (2014) opsi adalah suatu hak yang dimiliki oleh pemegangnya, bukan kewajiban yang harus dilaksanakan pada waktu kontrak tersebut jatuh tempo. Secara lebih lengkap, opsi merupakan kontrak dengan penulis opsi (*option writer*) yang menjamin hak pembeli opsi (*option holder*) untuk membeli atau menjual suatu surat berharga acuan (*underlying asset*) kepada penulis opsi pada harga tertentu dalam periode waktu tertentu. Penulis opsi memberikan hak ini sebagai ganti dari pembayaran sejumlah uang yang diterimanya. Pembayaran ini disebut dengan premi opsi. Harga surat berharga acuan untuk dibeli atau dijual pada waktu yang akan datang disebut dengan harga laksana (*exercise price/strike price*). Tanggal yang setelahnya opsi dinyatakan tidak berlaku lagi disebut tanggal jatuh tempo atau tanggal kadaluarsa (*maturity* atau *expiration date*).

Dalam kontrak opsi, faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi dapat dibagi menjadi tiga kelompok besar. Kelempok pertama terdiri dari peubah yang berhubungan dengan harga saham acuan, yakni harga saat ini, kemeruapan (volatilitas) dan dividen kasnya. Kelompok kedua terdiri dari peubah yang berhubungan dengan kontrak opsi itu sendiri yaitu harga laksana dan jangka waktu jatuh temponya. Kelompok ketiga adalah peubah suku bunga bebas resiko. Jadi, faktor –faktor yang mempengaruhi harga opsi yaitu :

1. Harga Saham (S)

   Peningkatan harga saham acuan akan meningkatkan harga opsi beli karena nilai instrinsik juga meningkat. Hal yang berlawan berlaku bagi opsi jual, peningkatan harga saham acuan akan menyebabkan penurunan opsi jual. Diketahui nilai *payoff* atau nilai intrinsik dari opsi beli adalah $S - K$ dan nilai intrinsik dari opsi jual adalah $K - S$, sehingga semakin besar nilai intrinsik semakin mahal harga opsi.

2. Harga Laksana (K)

   Harga laksana bersifat tetap sepanjang usia opsi dan mempengaruhi antisipasi pembayaran pada saat opsi jatuh tempo. Jika semua faktor lain diasumsikan tetap, semakin tingginya harga laksana maka harga opsi beli semakin rendah, tetapi harga opsi jual semakin tinggi.

3. Waktu Jatuh Tempo (T)

   Jika semua faktor lain dianggap tetap, semakin lama waktu jatuh tempo sebuah kontrak opsi maka semakin tinggi harga opsi, baik opsi jual maupun opsi beli. Hal ini dikarenakan jika waktu jatuh tempo sebuah opsi relatif pendek, maka akan sedikit waktu yang dimiliki bagi investor untuk berspekulasi terhadap naik turunnya harga saham. Setelah waktu jatuh tempo maka sebuah opsi tidak mempunyai nilai apa-apa.

4. Volatilitas (σ)

Volatilitas merupakan fluktuasi dari sebuah harga saham. Jika semua faktor lain dianggap tetap, semakin besar volatilitas harga saham maka harga opsi juga semakin meningkat. Hal ini dikarenakan besarnya peluang harga saham mengalami perubahan.

5. Tingkat Suku Bunga Bebas Risiko (r)

   Tingkat suku bunga bebas risiko merupakan tingkat suku bunga yang bebas risiko sama sekali. Pada tingkat suku bunga bebas risiko jangka pendek, investor akan lebih tertarik untuk membeli opsi beli daripada membeli saham karena kenaikan suku bunga bebas resiko seiring dengan berkurangnya nilai harga laksana. Sehingga harga opsi beli cenderung meningkat sedangkan harga opsi jual turun.

6. Dividen (q)

   Dividen merupakan keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada para pemegang saham. Dividen memepengaruhi harga opsi jika ada pembagian dividen selama berlakunya opsi saham acuan. Jika saham acuan memberikan dividen, maka akan cenderung menurunkan harga opsi beli dari saham tersebut. Hal ini dikarenakan investor lebih tertarik untuk membeli saham itu sendiri daripada membeli opsi beli. Sebaliknya pada opsi jual, adanya dividen cenderung meningkatkan harga opsi jual tersebut.

2.3. Jenis-Jenis Opsi

Opsi dapat digolongkan menjadi dua bagian yaitu berdasarkan haknya dan waktu pelaksanaan hak tersebut. Hull (2003) menjelaskan bahwa berdasarkan haknya, terdapat dua jenis opsi yaitu opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Opsi beli merupakan hak pemegang opsi untuk membeli surat berharga acuan dengan harga kesepakatan dalam jangka waktu yang telah ditentukan. Sebaliknya, opsi jual merupakan hak pemegang opsi untuk menjual surat berharga acuan opsi dengan harga kespakatan dalam jangka waktu yang telah ditentukan. Kemudian, berdasarkan waktu untuk melaksanakan haknya opsi dibagi menjadi dua jenis. Pertama, opsi tipe Eropa (*European option*) yang hanya dapat dilaksanakannya pada saat waktu jatuh tempo. Kedua, opsi tipe Amerika (*American option*) yang memungkinkan dilaksanakannya opsi mulai dari persetujuan kontrak hingga berakhirnya masa opsi atau jatuh tempo. Lebih lanjut akan dijelaskan opsi beli dan opsi jual pada opsi tipe Eropa.

1. Opsi Beli (*Call Option*)

   Jika $S(T)$ merupakan harga saham saat tanggal jatuh tempo T dan K merupakan harga laksana (*exercise price/strike price*) maka keuntungan atau nilai *payoff* dinyatakan sebagai berikut:

   $$C = maks(S(T) - K, 0). \tag{2.1}$$

   Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa jika $S(T) > K$ maka pemegang opsi akan melaksanakan opsi beli dengan membayar sejumlah K dan menerima harga saham acuan $S(T)$ yang akan memeberi *payoff* sebesar $S(T) - K$. Dalam kondisi ini opsi dikatakan sebagai *in the money*. Jika $S(T) < K$ maka *payoff* opsi beli bernilai nol. Dalam kondisi ini opsi dikatakan sebagai *out of the money*. Sedangkan, jika $S(T) = K$ opsi dikatakan sebagai *at of the money*.

2. Opsi Jual (*Put Option*)

   Jika $S(T)$ merupakan harga saham saat tanggal jatuh tempo T dan K merupakan harga laksana (*exercise price/strike price*) maka keuntungan atau nilai *payoff* dinyatakan sebagai berikut:

   $$P = maks(K - S(T), 0)\,. \tag{2.2}$$

   Persamaan (2.2) menunjukkan bahwa jika $S(T) > K$ maka *payoff* opsi jual bernilai nol. Dalam kondisi ini opsi dikatakan sebagai *out the money*. Jika $S(T) < K$. maka pemegang opsi akan melaksanakan opsi jual dengan keuntungan atau *payoff* sebesar $S(T) - K$. Dalam kondisi ini opsi dikatakan sebagai *in the money*. Sedangkan, jika $S(T) = K$ opsi dikatakan sebagai *at of the money*.

2.4. Portofolio

Menurut Andriyani (2014) portofolio adalah kombinasi dari aset-aset yang dimiliki oleh seorang investor. Portofolio merupakan salah satu strategi yang digunakan oleh investor untuk melindungi *(hedging*) atas aset yang mereka miliki. Portofolio dapat dibentuk dengan mengkombinasikan opsi saham dan saham acuan pada posisi yang berlawanan sehingga diperoleh posisi bebas resiko.

Salah satu strategi yang digunakan untuk melindungi nilai portofolio adalah *reversed covered call*. Strategi ini merupakan strategi investasi dimana sejumlah saham berada dalam posisi *short* yang artinya, kondisi yang dapat memberikan hak kepada investor untuk menjual aset keuangan yang dimilikinya. Sedangkan opsi saham berada pada posisi *long* yang artinya, kondisi dimana investor dapat membeli aset keuangan. Sehingga dapat dibentuk nilai portofolio dengan harga opsi saham V dan nilai saham yang dilindungi oleh *delta hedging* ΔS. Portofolio pada waktu t ditunjukkan pada persamaan berikut

$$\pi = V - \Delta S$$

pada interval dt di peroleh

$$d\pi = dV - \Delta(dS) \tag{2.3}$$

dengan Δ merupakan turunan dari harga opsi atas harga saham $\frac{\partial V}{\partial S}$ yang bernilai negatif jika saham dijual dan positif jika saham dibeli.

Jika terjadi pembayaran dividen q, maka menyebabkan harga saham jatuh sebesar dividen. Sehingga diproleh nilai portofolio pada rentang waktu dt sebagai berikut

$$d\pi = dV + \Delta(dS) + q\Delta S\ dt. \tag{2.4}$$

2.5. Gerak Brown

Gerak Brown biasa disebut proses Wiener adalah gerak yang ditemukan oleh Robert Brown yang paling banyak digunakan dalam terapan teori probabilitas. Gerak ini banyak dimanfaatkan pada bidang-bidang seperti pengujian statisik kesesuaian, mesin kuantum dan analisis harga di pasar saham (Rossa, 1996).

Definisi 1 (Proses Stokastik)

Proses Stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ adalah suatu kumpulan atau himpunan dari peubah acak dengan t menyatakan waktu dan $X(t)$ menyatakan proses saat t (Rossa, 1996).

Definisi 2 (Gerak Brown)

Suatu proses Stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ dikatakan gerak brown jika (Resmiyanto, 2014) :

1. $X(0) = 0$.

2. proses $\{X(t), t \geq 0\}$ mempunyai kenaikan saling bebas yang stasioner, yakni untuk $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ kenaikan dari $B(t_n) - B(t_{n-1})$, $B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \ldots, B(t_2) - B(t_1)$ merupakan peubah acak yang saling bebas,
3. Untuk $t > 0, X(t)$ terdistribusi normal dengan rataan 0dan variansi $\sigma^2 t$.

Resmiyanto (2014) menjelaskan bahwa jika suatu proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah gerak brown dengan laju pertumbuhan μ dan variansi σ^2 , maka persamaan gerak brown secara umum yaitu :

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t)$$

Dalam bentuk persamaan turunan dapat ditulis

$$dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dB(t) \tag{2.5}$$

2.6. Formula Ito

Menurut Bazz dan Chacko (2004), proses Ito $X(t)$ memenuhi persamaan diferensial stokastik berikut

$$dX = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW(t) \tag{2.6}$$

Dimana $\mu(X,t)$ dan $\sigma(X,t)$ adalah fungsi dari peubah acak X dan waktu t serta $dW(t)$ adalah gerak Brown.

Misalkan $X(t)$ memenuhi proses ito pada persamaan (2.6) dan didefinisikan sebuah fungsi $Y = F(X,t)$ yang merupakan sebuah fungsi dari variable acak X dan waktu t. Formula Ito untuk fungsi Y yaitu dengan melakukan turunan fungsi F terhadap X minimal dua kali dan terhadap t minimal satu kali. Sehingga dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dua variabel, fungsi Y memenuhi persamaan:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial t}dXdt + R_3. \tag{2.7}$$

Kemudian, Subtitusi persamaan (2.6) ke dalam persamaan (2.7) dengan memperhatikan perkalian *ito proses* pada Tabel 1 (Lyuu, 2012) sehingga diperoleh

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X}\left(\mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW(t)\right) + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\left(\sigma(X,t)\right)^2 dt$$

$$dY = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X}\mu(X,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\sigma(X,t))^2\right] + \frac{\partial F}{\partial X}\sigma(X,t)dW(t). \tag{2.8}$$

Tabel 1. Hasil Perkalian *Ito Process*

$\times$	dB	dt
dB	dt	0
dt	0	0

2.7. Model Harga Saham

2.7.1. Model Harga Saham Non-Dividen

Dalam investasi saham, pemodal menginginkan adanya keuntungan yang cukup sebagai kompensasi karena ketidakpastian harga saham. Kompensasi ini dikenal sebagai timgkat pengembalian yang diharapkan. Dengan demikian, tingkat pengembalian ini merupakan laju pertumbuhan dalam investasi saham seperti bunga dalam deposito. Artinya pemodal akan selalu menerima pendapatan atau pengembalian sebesar kompensasi dalam setiap periode (Resmiyanto, 2014).

Misalkan S adalah harga saham pada waktu t dan μ menyatakan rata-rata pertumbuhan saham per satuan waktu. Kemudian, harga saham berubah dari S menjadi $S + dS$ dari waktu t ke waktu $t + dt$. Jika tidak ada ancaman kerugian, model hasil pengembalian (*return*) dari S dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut.

$$dS(t) = \mu S(t)dt$$

atau

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt \tag{2.9}$$

dengan μ menyatakan laju rata-rata pertumbuhan saham dan dt interval waktu. Artinya harga saham akan tumbuh dipengaruhi laju μ dalam persatuan waktu.

Namun pada kenyataaanya, harga saham selalu berubah atau memiliki fluktuasi pergerakan harga yang disebut volatilitas. Resmiyanto (2014) menjelaskan bahwa, dalam tinjauan hipotesis pasar efisien, pergerakan harga saham mengikuti proses stokastik. Sehingga, harga saham bukan hanya proses deterministik saja, namun juga sebagai aset yang lekat dengan gangguan fluktuasi stokastik. Karena itu, perubahan harga saham dS dalam rentang waktu sempit dt seharusnya terdiri dari dua bentuk, yaitu bentuk deterministik dan bentuk stokastik. Sehingga model pengembalian (*return*) dari Sdapat dinyatakan sebagai persamaan berikut.

$$dS = \mu S(t)dt + \ \sigma S(t)dB \tag{2.10}$$

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \ \sigma\, dB$$

bagian deterministik ditunjukan oleh μdt dengan μ menyatakan laju rata-rata pertumbuhan saham dan dt menyatakan interval waktu. Kemudian, bagian stokastik ditunjukan oleh $\sigma\, dB$ dengan σ merupakan votalitas atau ukuran standar deviasi dari hasil pengembalian dan dB menyatakan gerak Brown.

Berdasarkan formula ito, menunjukkan bahwa persamaan (2.10) dapat dibangun seperti persamaan (2.8) dengan fungsi F dalam S dan t yang dapat di tunjukkan dalam persamaan berikut

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right] + \frac{\partial F}{\partial S}\sigma S dB(t). \tag{2.11}$$

2.7.2. Model Harga Saham dengan Dividen

Andriyani (2014) menyatakan dividen merupakan keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada para pemegang saham. Dividen yang dibayarkan diasumsikan besarnya tetap dan dibayarkan secara kontinu pada presentase q. Setelah interval waktu dt maka besarnya dividen yang diperoleh oleh pemgang saham adalah

$$qSdt. \tag{2.12}$$

Pembayaran dividen membuat nilai saham turun agar tidak memberikan kesempatan arbitrasi. Jika harga saham tidak jatuh maka investor akan membeli saham sebelum dividen dibayarkan kemudian akan menjualnya kembali setelah dividen dibayarkan. Kondisi ini menimbulkan kesempatan arbitrasi dan pemegang saham akan mendapatkan keuntungan tanpa resiko sebesar dividen yang dibayarkan. Sehingga pembagian dividen q secara kontinu mengakibatkan turunnya ukuran laju rata-rata pertumbuhan saham μ. Jadi model harga saham dengan pembagian dividen dapat dinyatakan dalam persamaan berikut

$$dS = (\mu - q)\ sdt + \ \sigma s\ dB. \tag{2.13}$$

2.8. Model Black-Scholes

Salah satu model yang sering digunakan untuk menentukan nilai opsi adalah model Black Scholes. Dalam menyusun model menentukan harga opsi ada beberapa asusmsi yang di tetapkan yaitu (Suritno, 2004) :

1. Harga dari aset yang mendasari mengikuti gerak Brown dengan μ dan σ konstan
2. Tidak ada biaya transaksi dan pajak
3. Tidak ada pembayaran dividen pada opsi
4. Tidak terdapat peluang arbitrasi
5. Opsi hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau opsi Eropa
6. Short selling diizinkan
7. Suku bunga bebas risiko r adalah konstan dan sama hingga waktu jatuh tempo

Dari asumsi-asumsi diatas model Black Scoles dibangun dari model harga saham pada persamaan (2.10) yaitu

$$dS = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB.$$

Diketahui bahwa opsi merupakan surat berharga derivatif yang nilainya bergantung dari saham acuan. Jadi, harga opsi V adalah fungsi atas harga saham $S(t)$dan waktu t. Sehingga dapat di terapkan formula Ito pada model harga saham pada persamaan (2.12) untuk fungsi V yaitu:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, dB \qquad (2.14)$$

Karena diasumsikan bahwa tidak ada biaya transaksi dan peluang abitrasi, sehingga tingkat pengembalian portofolio ini harus sama dengan tingkat pengembalian setiap surat berharga bebas risiko. Dengan kata lain, kedua asumsi ini menegaskan bahwa pengembalian portofolio merupakan proses deterministik. Akibatnya suku stokastik (dB) dapat dihilangkan. Misalkan portofolio π kombinasi dari investasi opsi bernilai V dan jumlah Δ saham acuan. Kemudian dilakukan strategi *reversed covered call* yaitu membeli suatu opsi V dan di jual sejumlah Δ saham acuan. Karena dijual maka nilai $\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, Sehingga nilai portofolio pada waktu t yaitu

$$\pi = V - \Delta S$$

atau

$$\pi = V - \frac{\partial V}{\partial S} S. \tag{2.15}$$

Perubahan portofolio pada selang waktu dt yaitu

$$d\pi = dV - \frac{\partial V}{\partial S} dS. \tag{2.16}$$

Subtitusi persamaan (2.10) dan (2.14) kedalam persamaan (2.16), diperoleh

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, dB - \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S\, dt + \ \sigma S\, dB)$$

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S dt - \frac{\partial V}{\partial S}\mu S dt\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, dB - \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, dB\right)$$

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{2.17}$$

Pengembalian dari portofolio π pada saham bebas resiko akan mengalami pertumbuhan sebesar $r\pi dt$ dalam selang waktu t dengan r adalah suku bunga bebas resiko, maka nilai pengembalian π yaitu

$$d\pi = r\pi dt. \tag{2.18}$$

Subtitusi persamaan (2.15) dan (2.17) kedalam (2.18) , menghasilkan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) dikenal dengan persamaan Black-Scholes

Jika terjadi pembayaran dividen, model Black-Scholes dibangun dengan mengunakan model harga saham dengan pembagian dividen pada persamaan (2.13) yaitu

$$dS = (\mu - q)\, sdt + \ \sigma s\, dB.$$

Kemudian, dengan cara yang sama dalam menentukan persamaan (2.19) maka diperoleh model Black-Scholes dengan pembagian dividen yaitu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.20}$$

Menurut Ntwiga (2005), misalkan $\tau = T - t$ harga opsi jual dan opsi beli tipe Eropa dengan pembagian dividen pada pers (2.20) pada keadaan *constant market* adalah

$$C(S,t) = Se^{-q\tau}N(d_1) - (Ke^{-r\tau})N(d_2)$$

$$P(S,t) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - (Se^{-q\tau})N(-d_1)$$

dengan

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-S^2}{2}} \, ds$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Pembayaran dividen menurunkan harga saham dari S menjadi $Se^{-q\tau}$ dan tingkat suku bunga bebas resiko r menjadi $(r - q)$.

2.9. Estimasi Volatilitas

Volatilitas merupakan fluktuasi dari sebuah harga saham. semakin besar volatilitas harga saham maka harga opsi juga semakin meningkat. Hal ini dikarenakan besarnya peluang harga saham mengalami perubahan. Menurut Ntwiga (2005) ada dua cara menentukan nilai volatilitas yaitu volatilitas tersirat (*implied volatility*) dan volatilitas historis (*historical volatility*). *implied volatility* adalah estimasi volatilitas yang didasari dari harga opsi, dengan asumsi harga opsi yang diperoleh dengan cara teoritis sama dengan harga pasar. *historical volatility* adalah estimasi volatilitas dengan menghitung standar deviasi dari log perubahan harga saham yang diambil dari data masa lalu. Adapun tahapan yang perlu dilakukan untuk menentukan volatilitas dengan *historical volatility* yaitu:

Pertama, menetukan *return* harga saham

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right). \tag{2.21}$$

Kemudian, ditentukan variansi dan standar deviasi

$$Var = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{t=1}^{n}(R_t^2 - \bar{R}^2)\right]. \tag{2.22}$$

Dari variansi pada persamaan (2.26) diperoleh standar deviasi atau volatilitas harian yaitu

$$S_{R_t} = \sqrt{Var}. \tag{2.23}$$

Jika data harian yang digunakan, standar deviasi S_{R_t} yang dihitung sama dengan nilai volatilitas harian. Untuk volatilitas tahunan diperoleh dengan persamaan berikut

$$\sigma = S_{R_t} \times \sqrt{n} \tag{2.24}$$

Keterangan:

σ = volatilitas harga saham

R_t = return harga saham

$\bar{R}$ = rata-rata return saham harian

S_{R_t} = Standar deviasi

n = jumlah perdagangan.

Jika terjadi pembayaran dividen, Maka Transisi dari cum-dividen ke ex-dividen akan mempengaruhi harga aset. Pembayaran dividen akan meningkatkan *return* yang harus dibayarkan kepada investor. Maka persamaan *return* harga saham pada persamaan (2.21) berubah menjadi persamaan berikut

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t + q}{S_{t-1}}\right). \tag{2.25}$$

2.10. Time Value of Money

Resmiyanto (2014) menjelaskan bahwa dalam konsep nilai waktu dari uang (*time value of money*) dinyatakan bahwa satu rupiah yang dipegang sekarang jauh lebih bernilai dari pada satu rupiah yang dipegang dimasa yang akan datang, sebab tidak memiliki daya beli yang sama dikarenakan kemungkinan terjadinya kenaikan harga. Begitu pula dalam kontrak opsi eropa karna adanya jangka waktu tempo yang telah disepakati sehingga uang yang diperoleh diwaktu jatuh tempo yang akan datang tidak dapat digunakan segera. Sehingga perlu adanya kompensasi atas risiko tersebut.

Misalkan $U(0)$ adalah nilai sekarang dari uang nasabah sebanyak $U(t)$ pada tahun yang akan datang. Bila suku bunga pertahun adalah r, maka bunga yang diperoleh dari $U(0)$ adalah $rU(0)$. Jadi setelah penyimpanan 1-2 tahun, nasabah tersebut akan memperoleh

$$U(1) = U(0)(1 + r)$$
$$U(2) = U(1) + rU(1) = U(1)(1 + r)$$
$$U(2) = U(0)(1 + r)^2$$

untuk penyimpanan selama t tahun, nasabah memperoleh

$$U(t) = U(0)(1 + r)^t.$$

Kemudian jika terdapat m kali pembayaran bunga yang dilakukan per tahun maka tabungan nasabah tersebut setelah t tahun adalah

$$U(t) = (1 + \frac{r}{m})^{tm}\, U(0) \tag{2.26}$$

Persamaan (2.26) dapat ditulis sebagai berikut

$$U(t) = \left[(1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{r}}\right]^{tr}\; U(0) \tag{2.27}$$

Selanjutnya untuk nilai $m \to \infty$, dari persamaan (2.27) diperoleh

$$U(t) = e^{tr}\, U(0) \tag{2.28}$$

dengan

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Persamaan diatas adalah formula yang digunakan untuk menentukan nilai yang akan datang (*future value*) dengan mengetahui nilai sekarang (*present value*).

Sebaliknya, untuk menunjukkan formula untuk menetukan nilai sekarang (*present value*) dengan mengetahui nilai yang akan datang (*future value*) dari persamaan (2.28) diperoleh

$$U(0) = e^{-tr}\, U(t) \tag{2.29}$$

2.11. Deret Taylor

Menurut Triatmodjo (2002), deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots + f^m(x_i)\frac{\Delta x^m}{m!} + R^m \tag{2.30}$$

dengan

$f(x_{i+1})$	: fungsi di titik x_{i+1}
$f', f'', \ldots, f^m$	: turunan pertama, kedua, ... , ke-n dari fungsi
Δx	: jarak antara x_i dengan x_{i+1}
R^m	: kesalahan pemotongan
!	: operator faktorial

Deret Taylor memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error,* R^m), yang ditulis dalam bentuk $R^m = O(\Delta x^{m+1})$ dengan indeks m menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke m. Pada hampiran orde satu, besarnya kesalahan pemotongan adalah

$$O(\Delta x^2) = f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \ ...$$

sehingga (persamaan 2.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + O(\Delta x^2).$$

2.12. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaiakan persamaan diferensial dengan kondisi awal dan batas (Resmiyanto, 2014). Metode ini menggunakan deret Taylor untuk melakukan pendekatan pada turunan-turunan yang ada di persamaan, sehingga berubah menjadi bentuk aljabar. Pendekatan ini biasa dikenal dengan sebutan beda maju, beda mundur dan beda pusat.

2.12.1. Beda Hingga Maju

Dengan menggunakan turunan pertama pada deret Taylor persamaan (2.30), dan suku turunan kedua dan suku turunan yang lebih tinggi merupakan kesalaan pemotongan maka diperoleh

$$f'(x_{i+1}) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!}f'(x_i) + O\{(\Delta x)^2\}$$

dapat ditulis menjadi

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - O\{\Delta x\} \qquad (2.31)$$

Persamana (2.31) merupakan bentuk beda hingga maju untuk turunan pertama. Jika kesalahan pemotongan diabaikan, persamaan (2.31) menjadi

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \qquad (2.32)$$

2.12.2. Beda Hingga Mundur

Bentuk beda hingga mundur pada turunan pertama di peroleh dengan melakukan pendekatan pada deret taylor dengan menggunkan titik x_i dan x_{i-1}, didapatkan

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots \tag{2.33}$$

Selanjutnya, jika turunan kedua dan turunan yang lebih tinggi merupakan kesalah pemotongan maka diperoleh

$$f'(x_{i-1}) = f(x) - \frac{\Delta x}{1!}f'(x_i) + O\{(\Delta x)^2\} \tag{2.34}$$

dapat ditulis menjadi

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

2.12.3. Beda Hingga Pusat

Bentuk beda hingga pusat pada turunan pertama dilakukan pendekatan pada deret taylor dengan titik x_{i+1} dan x_{i-1},. Diperoleh dengan cara mengurangi persamaan (2.30) dengan (2.33) diperoleh

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2\Delta x f'(x_i) + O\{(\Delta x)^2\}$$

dapat ditulis menjadi

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + O\{(\Delta x)^2\} \tag{2.35}$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x}$$

Kemudian, Bentuk beda pusat untuk turunan kedua dapat ditentukan dengan menjumlahkan persamaan (2.30) dengan persamaan (2.33) sehingga diperoleh

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + 2f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + 2f''''(x_i)\frac{\Delta x^4}{4!} + \cdots \tag{2.36}$$

Selanjutnya, jika turunan keempat dan turunan yang lebih tinggi merupakan kesahan pemotongan maka diperoleh

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} + O\{(\Delta x)^2\} \tag{2.37}$$

2.13. Metode Saul'yev

Noye (1983) menjelaskan bahwa metode Saul'yev merupakan yang dikemukakan oleh Saul'yev pada sekitar tahun 1964. Metode ini terdapat dua skema penyelesaian yaitu penyelesaian sapuan dari kiri ke kanan (*left to right*) dan kanan ke kiri (*right to left*). Terdapat tiga titik yang diperlukan untuk masing-masing skema yaitu grid $u(i-1,n+1)$, $u(i,n+1)$, $u(i,n)$ dan $u(i+1,n)$ untuk *left to right* dan titk grid $u(i+1,n+1)$, $u(i,n+1)$, $u(i,n)$ dan $u(i-1,n)$. Titik-titk yang diperlukan ini akan diperoleh dengan melakukan diskritisasi menggunakan pendekatan beda pusat untuk laju perubahan perubahan V pada titik $V\left(i\Delta x, n\Delta\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau\right)$ dengan i adalah grid terhadap spasial S dan n grid terhadap waktu t. Titik $V\left(i\Delta x, n\Delta\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau\right)$ hanya digunakan sebagai titk acuan untuk memperoleh titik-titk grid yang diperlukan pada metode Saul'yev.

Misal diberikan persamaan difusi sebagai berikut.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=K\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.38}$$

spasial x ditunjukkan dengan grid i dan waktu t ditunjukkan dengan gird n. kemudian $u(i\Delta x, n\Delta t)$ ditulis u_i^n, maka diskritisasi persamaan (2.37) diperoleh

- $$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_i^{n+\frac{1}{2}}=\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\Delta t}+O\{(\Delta t)^2\} \tag{2.39}$$
- $$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_i^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\Bigg|_i^{n+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right]+O\{(\Delta x)^2\}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i+\frac{1}{2}}^{n}-\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}\right]+O\{\Delta t\}+O\{(\Delta x)^2\}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{V_{i+1}^n-V_i^n}{\Delta x}-\frac{V_i^{n+1}-V_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right]+O\left\{\frac{\Delta t}{\Delta x},(\Delta x)^2\right\}$$

$$=\frac{V_{i+1}^n-V_i^n-V_i^{n+1}+V_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+O\left\{\frac{\Delta t}{\Delta x},(\Delta x)^2\right\} \tag{2.40}$$

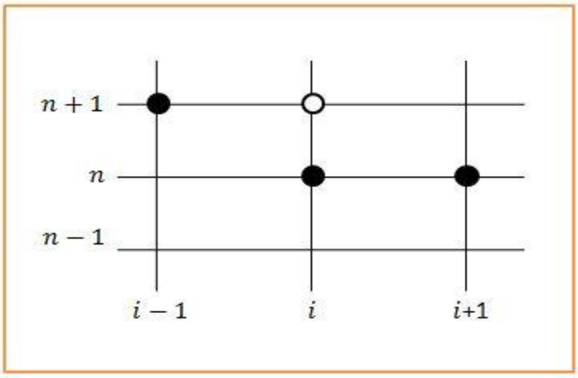
Subtitusi persamaan (2.39) dan (2.40) ke dalam (2.38)diperoleh

$$\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\Delta t}+O\{(\Delta t)^2\}=K\frac{V_{i+1}^n-V_i^n-V_i^{n+1}+V_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+O\left\{\frac{\Delta t}{\Delta x},(\Delta x)^2\right\} \tag{2.41}$$

Jika kesalahan pemotongan diabaikan dan menata ulang persamaan, maka diperoleh persamaan beda

$$u_i^{n+1} = \left[\frac{1-s}{1+s}\right] u_i^n + \left[\frac{s}{1+s}\right] u_{i-1}^{n+1} + \left[\frac{s}{1+s}\right] u_{i+1}^n \quad (2.42)$$

dengan $s = K\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ dimana langkah penyelesaian skema diatas adalah sapuan dari kiri ke kanan (*left to right*). Lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 1. Gambar titik grid pendekatan dari skema *left to right*

Lambang ○ menunjukkkan titik yang dicari

● menunjukkan titik diketahui

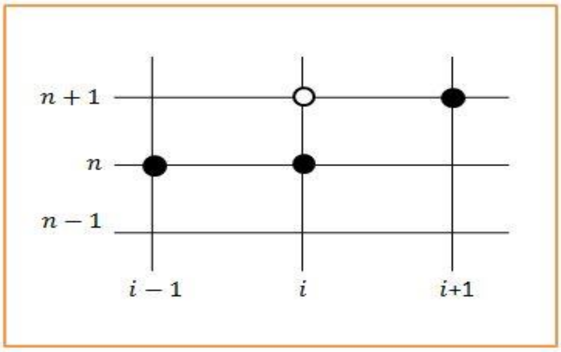
Dengan menggunakan cara yang sama diskritisasi, dapat diturunkan persamaan dengan langkah penyelesaiaan dari kanan ke kiri(*right to left*) sehingga diperoleh hasil diskritisasi sebagai berikut

- $\left.\frac{\partial V}{\partial \tau}\right|_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta \tau} + O\{(\Delta\tau)^2\}$
- $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1} - V_i^n + V_{i-1}^n}{\Delta S^2} + O\left\{\frac{\Delta\tau}{\Delta S}, (\Delta S)^2\right\}.$

Kemudian, disubtitusi pad persamaan (2.38) diperoleh persamaan untuk skema *left to right* sebagai berikut

$$u_i^{n+1} = \left[\frac{1-s}{1+s}\right] u_i^n + \left[\frac{s}{1+s}\right] u_{i+1}^{n+1} + \left[\frac{s}{1+s}\right] u_{i-1}^n \quad (2.43)$$

dengan $= K\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut

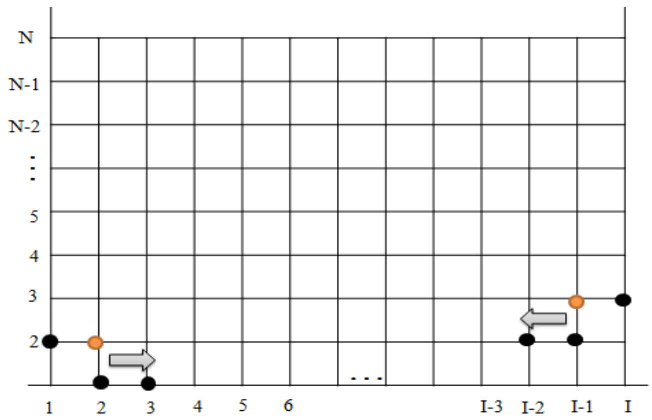


Gambar 2. Gambar titik grid pendekatan skema *right to left*

Lambang ○ menunjukkkan titik yang dicari

● menunjukkan titik diketahui

Apabila diskritisasi domain untuk spasial x dan waktu t adalah L grid dan dan N grid, maka semua nilai grid untuk stiap grid spasial i dapat di evaluasi dengan menggunakan persamaan (2.42) untuk mengevaluasi grid $n = 2,4,6, \ldots N(genap)$ dengan langkan penyelsaiaan kiri ke kanan serta pesamaan (2.43) untuk mengealuasi grid $n = 3,5,7, \ldots N(ganjil)$ dengan langkah penyelesaian kanan ke kiri. Secara jelas, berikut diskritisasi domain yang dilakukan Saul'yev.



Gambar.3. Gambar titik grid pendekatan metode Saul'yev (gabungan)

Menurut Noye (1983) metode ini dapat menghasilkan solusi yang lebih akurat daripada hanya menggunakan salah satu persamaan karena kesalahan pemutusan dari sebagian metode adalah $O\left\{\Delta x, \frac{\Delta t}{\Delta x}\right\}$ dan untuk dua langkah prosedur yang digunakan adalah $O\left\{(\Delta x)^4, \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x}\right\}$.

2.14. Konsistensi, Stabilitas dan Konvergensi

Dalam skema numrik khususnya metode beda hingga kesalahan pemotongan dalam diskritisasi menyebabkan adanya galat (*error*) atau solusi nilai eksak yang diperoleh tidak sama persis dari masalah yang diselesaikan. Sehingga, ada beberapa faktor mendasar yang perlu diperhatikan yaitu :

terdapat tiga faktor mendasar yang harus diperhatikan yaitu, :

1. Konsistensi

   Persamaan beda hingga (PBH) dikatakan konsisten dengan persamaan difensial parsial (PDP) jika limit dengan interval atau jarak grid mendekati nol maka pesamaan beda akan kembali atau menjadi sama dengan persmaan diferensial parsial (Noye, 1983). Dengan kata lain, selisih antara persamaan diferensial parsial (PDP) dan persamaan beda hingga (PBH) adalah nol untuk interval grid mendekati nol atau dapat dinyatakan sebagai

$$\lim_{(\Delta x,\Delta t)\to 0}(PDP - PBH) = 0$$

2. Stabilitas

   Suatu konsep kestabilan pada metode beda hingga akan menentukan ada atau tidaknya kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan. Solusi metode beda hingga dikatakan stabil jika galat dari sumber mana pun tidak akan tumbuh tanpa batas dalam rentang waktu atau solusi tidak terlalu sensitif terhadap perubahan kecil (Ntwiga, 2005). Salah satu metode yang digunakan untuk menganalisis kestabilan adalah metode Von Neumann. Metode ini diterapkan dengan mensubstitusi elemen fourier $U_i^n = \rho^n e^{I\theta i}$ pada persamaan beda hingga dengan ρ adalah bilangan gelombang (*Wave Number*), *n* menunjukkan grid waktu, *i* menunjukan titik grid pada ruang, $I = \sqrt{-1}$, dan θ adalah sudut fase gelombang dengan interval $[0,2\pi\,]$. Kemudian dikatakan stabil jika nilai $|\rho|^2 \leq 1$.

3. Konvergensi

   Solusi metode beda hingga dikatakan konvergen jika solusi tersebut mendekati solusi analitik dari persamaan diferensial parsial permasalahan yang didekati saat ukuran ruang diskritisasi mendekati nol dan ukuran waktu mendekati nol.

Ketiga faktor ini dihubungkan dalam suatu teorema yang dikenal sebagai Teorema kesetaraan Lax-Richtmyer. Teorema kesetaraan Lax-Richtmyer menyatakan bahwa skema beda hingga yang konsisten untuk persamaan diferensial parsial dengan nilai awal yang *well posed* adalah konvergen jika dan hanya jika itu stabil. teknik untuk membangun konvergensi dapat digunakan melalui hukum umum berikut

$$Stabil \,\&\, Konsisten \implies Konvergen.$$