

**ANALISIS PERBANDINGAN ALGORITMA GREEDY DENGAN
ALGORITMA WELCH POWELL PADA PEWARNAAN PETA
KELURAHAN KABUPATEN MAROS**



OLEH:

**ZULHIJRAH RA
H01181503**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
AGUSTUS 2023**

**ANALISIS PERBANDINGAN ALGORITMA GREEDY
DENGAN ALGORITMA WELCH POWELL PADA
PEWARNAAN PETA KELURAHAN KABUPATEN
MAROS**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**



**ZULHIJRAH RA
H011181503**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
AGUSTUS 2023**

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh
bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Analisis Perbandingan Algoritma Greedy dengan Algoritma Welch Powell
pada Pewarnaan Peta Kelurahan Kabupaten Maros**

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah
dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 2 Agustus 2023




Zulhijrah RA

NIM. H011181503

HALAMAN PENGESAHAN

**ANALISIS PERBANDINGAN ALGORITMA GREEDY DENGAN
ALGORITMA WELCH POWELL PADA PEWARNAAN PETA
KELURAHAN KABUPATEN MAROS**

Disusun dan diajukan oleh :

ZULHIJRAH RA

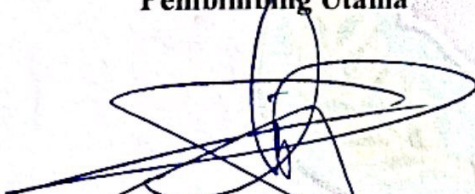
H011181503

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 2 Agustus 2023 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama



Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002



Prof. Dr. Hasmawati, M. Si.
NIP. 19641231 199003 2 007

Ketua Program Studi



Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002



KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Rabbil Alamin, puji syukur atas kehadiran-Nya yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul “Analisis perbandingan algoritma greedy dengan algoritma welch powell pada pewarnaan peta kelurahan kabupaten Maros” dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dalam penyusunannya, penulis memperoleh banyak inspirasi bantuan dari berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** Selaku dosen pembimbing utama dan juga Penasehat Akademik yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
2. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** Selaku dosen pembimbing pertama yang menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini;
3. **Dra. Nur Erawati, M.Si.** Selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
4. **Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.** Selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini;
5. **Para Dosen dan Staf Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan selama proses perkuliahan dan membantu berbagai persuratan untuk penyusunan skripsi ini;
6. Teristimewa untuk kedua orang tua tercinta **M Rabbany Khalid dan Syumriati** yang tak henti-hentinya selalu memberi kasih sayang, motivasi dan cinta, yang selalu memberikan semangat untuk mewujudkan cita-cita penulis. Terimakasih atas do'a dan dukungan yang selalu diberikan dan terimakasih telah menjadi support system terbaikku. Saya persembahkan karya tulis sederhana ini untuk kalian.

7. Saudaraku tercinta **Muhammad Anas RA, M.Si., Zulfahmi RA, S.IP.** dan **Muhammad Ilham RA, S.IP** yang selalu memberikan dukungan, serta semangat untuk mewujudkan cita-cita penulis;
8. Calon suamiku **Ilham Resky, S.T., M.Mar.E.** terimakasih banyak sudah menjadi pendamping dalam segala hal, yang selalu sabar menunggu kelulusan saya dalam 1 tahun terakhir ini, yang selalu menemani, meluangkan waktunya, dan memberi semangat untuk selalu maju tanpa kenal kata menyerah;
9. Sahabat **Petir Geng** yaitu **Afni, Nisa, Aqiela, Nannah, Gresye, Ayu, dan irfan** yang telah kebersamai selama perkuliahan, memberikan semangat, motivasi, bantuan, serta doa dalam mengerjakan skripsi ini;
10. Sahabat SMA **Wanita Karir** yaitu **Ifa, Risma, Irma, Fina, Andi Ashar, dan Dasrul** memberi hiburan serta semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini;
11. Sahabat Per-KKN yaitu **Anggi** memberi hiburan serta semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini;
12. Teman-teman seperjuangan **Matematika 2018**, dan **Integral 2018** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini;
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu per satu;

Akhir kata, penulis berharap kepada Allah subhanahu wa ta'ala agar membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat sebagai bahan pustaka dan penambah informasi khususnya bagi mahasiswa Universitas Hasanuddin. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini, masih banyak kekurangan sehingga saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan untuk menyempurnakan skripsi ini.

Makassar, 2 Agustus 2023

Zulhijrah RA

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMIK**

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zulhijrah RA
NIM : H011181503
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**“Analisis Perbandingan Algoritma Greedy dengan Algoritma Welch Powell
pada Pewarnaan Peta Kelurahan Kabupaten Maros”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 2 Agustus 2023

Yang menyatakan

(Zulhijrah RA)

ABSTRAK

Pewarnaan pada teori graf terdiri atas tiga macam yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pada pewarnaan simpul, setiap simpul diberi warna sedemikian sehingga setiap simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Tujuan utama dari pewarnaan simpul adalah mendapatkan banyaknya warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai suatu graf, yang biasa disebut bilangan kromatik. Salah satu penerapan pewarnaan simpul adalah pewarnaan suatu peta sedemikian sehingga setiap daerah yang bersebelahan harus diberi warna yang berbeda. Algoritma yang digunakan pada tugas akhir ini ialah algoritma Greedy dan algoritma Welch Powell. Kedua algoritma ini akan digunakan untuk mewarnai peta kelurahan kabupaten Maros. Pewarnaan peta kelurahan kabupaten Maros dengan kedua algoritma tersebut, mendapatkan bilangan kromatik yang sama yaitu $X(G) \leq 5$. Kemudian dari hasil pewarnaan peta kelurahan kabupaten Maros dapat disimpulkan bahwa algoritma Welch Powell lebih efisien dibandingkan algoritma Greedy karena jumlah operasi Algoritma Welch Powell lebih kecil dibandingkan Algoritma Greedy yaitu Algoritma Welch Powell 106 operasi sedangkan Algoritma Greedy 108 operasi.

Kata Kunci : Algoritma Greedy, Algoritma Welch Powell, Bilangan Kromatik

ABSTRACT

Coloring in graph theory consists of three types, namely vertex coloring, edge coloring, and region coloring. In node coloring, each node is given a color such that each neighboring node has a different color. The main goal of vertex coloring is to get the minimum number of colors needed to color a graph, which is commonly called the chromatic number. One application of vertex coloring is coloring a map in such a way that each adjacent area must be given a different color. The algorithms used in this final project are Greedy's algorithm and Welch Powell's algorithm. These two algorithms will be used to color the Maros district urban village map. Coloring the Maros district sub-district map with the two algorithms, obtains the same chromatic number, namely $X(G) \leq 5$. Then from the coloring results of the Maros district sub-district map it can be concluded that the Welch Powell algorithm is more efficient than the Greedy algorithm because the number of Welch Powell Algorithm operations is smaller compared to the Greedy Algorithm, namely the Welch Powell Algorithm 106 operations while the Greedy Algorithm 108 operations.

Keywords : Greedy Algorithm, Welch Powell Algorithm, Chromatic Numbers

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	2
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Masalah	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Definisi Graf	4
2.2 Graf Planar	5
2.3 Graf Dual pada Peta	6
2.4 Representasi Graf	6
2.5 Pewarnaan Graf	8
2.6 Algoritma Greedy	11
2.7 Algoritma Welch Powell	13
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Jenis Penelitian	16
3.2 Tahapan Penelitian	16
3.3 Waktu dan Tempat	16
3.4 Alur Kerja	17
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	18
4.1 Wilayah Kelurahan Kabupaten Maros	18
4.2 Mempresentasikan Peta Kelurahan Kabupaten Maros ke Dalam Bentuk Graf	21
4.3 Graf Dual dari Peta Kelurahan Kabupaten Maros	23
4.4 Membuat Matriks Ketetanggaan Wilayah Kelurahan	

Kabupaten Maros	25
4.5 Menentukan Derajat Setiap Titik pada Graf Dual Peta Kelurahan Kabupaten Maros	25
4.6 Pewarnaan Peta pada Wilayah Kelurahan di Kabupaten Maros	26
4.6.1 Pewarnaan Peta Menggunakan Algoritma <i>Greedy</i>	26
4.6.2 Pewarnaan Peta Menggunakan Algoritma <i>Welch Powell</i>	134
4.7 Menentukan Jumlah Warna Minimum pada Pewarnaan Peta Kelurahan Kabupaten Maros	179
4.8 Analisis Perbandingan Algoritma Greedy dan Algoritma Welch Powell pada Pewarnaan Peta Kelurahan Kabupaten Maros	179
BAB V Kesimpulan dan Saran	182
5.1 Kesimpulan	182
5.2 Saran	182
DAFTAR PUSTAKA	183
LAMPIRAN	185

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang cukup penting, karena mempunyai segi terapan yang sangat banyak pada bidang keilmuan. Beberapa permasalahan dunia nyata dapat di transformasikan ke dalam graf dengan menggunakan sejumlah simpul dan sisi. Salah satu aplikasi dari teori graf yang menarik untuk dibahas adalah pewarnaan graf.

Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada simpul atau sisi yang biasanya dipresentasikan sebagai bilangan terurut mulai dari 1 atau dapat juga direpresentasikan langsung dengan menggunakan warna merah, kuning, hijau dan lain-lain. Persoalan pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai simpul atau sisi dengan warna berbeda dari warna simpul atau sisi tetangganya saja, namun juga menggunakan jumlah warna minimum yang disebut dengan bilangan kromatik ($X(G)$) pada graf. Pewarnaan wilayah dari sebuah graf dalam pengaplikasiannya adalah pemberian warna-warna pada wilayah di peta, dengan batasan bahwa semua daerah yang bertetangga diberikan warna yang berbeda.

Teori pewarnaan wilayah ini akan diaplikasikan pada pewarnaan wilayah peta Kelurahan Kabupaten Maros yang terdiri dari 14 kecamatan dan 103 kelurahan. Kabupaten Maros merupakan wilayah yang berbatasan langsung dengan ibukota provinsi Sulawesi Selatan, dalam hal ini adalah kota Makassar

Beberapa algoritma yang dikenal dalam topik pewarnaan graf antara lain; Algoritma *Greedy*, Algoritma *Welch Powell*, Algoritma baris, Algoritma *Sequential*, dan sebagainya. Pada penelitian ini, peneliti menggunakan 2 algoritma dalam pewarnaan peta diantaranya Algoritma *Greedy* dan Algoritma *Welch Powell*.

Algoritma *Greedy* merupakan algoritma yang sederhana dan fleksibel sehingga dapat digunakan pada berbagai kasus persoalan dengan hasil yang cukup memuaskan. Algoritma *Greedy* selalu mengambil penyelesaian sementara/lokal yang terbaik dalam setiap langkahnya untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Pilihan terbaik akan diambil pada setiap langkah tanpa perlu memikirkan bagaimana pengaruhnya terhadap penyelesaian secara keseluruhan.

Sedangkan perulangan itu sendiri berarti ada sesuatu yang dilakukan lebih dari sekali pada Algoritma greedy ini dilakukan perulangan pada kombinasinya, jadi dalam satu kombinasi terdapat angka yang ditampilkan lebih dari sekali. (Roihan, 2022)

Terdapat algoritma lain selain Algoritma greedy yaitu Algoritma *Welch Powell*. Algoritma *Welch Powell* adalah salah satu algoritma pewarnaan graf yang pewarnaan berdasarkan derajat tertinggi dari simpul-simpulnya. Menurut Purnamasari, mengatakan Algoritma *Welch Powell* tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai graf, tetapi algoritma ini cukup praktis untuk digunakan dalam pewarnaan simpul sebuah graf. Adapun menurut Ammar, algoritma ini dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf secara efisien.

Beberapa penelitian yang menggunakan pewarnaan graf (graph coloring) diantaranya, Largest First Pada Pewarnaan Peta Untuk Wilayah Daerah Istimewa Yogyakarta oleh Vianni Febbe Sutanto (2013), Pewarnaan Graf Pada Peta Menggunakan Algoritma Greedy (Studi Kasus: Peta Provinsi Dki Jakarta) oleh Khaerul Irsal (2017), Implementasi Algoritma Sequential dan Welch Powell Pada Pewarnaan Graf (Studi Kasus Pewarnaan Peta Kota Makassar) oleh Muhammad Ammar (2019), Penerapan Algoritma Welch Powell Pada Pewarnaan Graf Dalam Pemetaan Wilayah Di Kota Medan oleh Lida Lestari, dkk (2020).

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik melakukan penelitian dengan mengangkat judul **“ANALISIS PERBANDINGAN ALGORITMA GREEDY DENGAN ALGORITMA WELCH POWELL PADA PEWARNAAN PETA KELURAHAN KABUPATEN MAROS”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan penelitian ini sebagai berikut :

1. Bagaimana menggunakan Algoritma *Greedy* dan Algoritma *Welch Powell* dalam pewarnaan graf pada peta Kabupaten Maros ?
2. Berapakah warna minimum $X(G)$ yang dibutuhkan untuk mewarnai wilayah pada peta Kabupaten Maros dengan Algoritma *Greedy* dan Algoritma *Welch Powell* ?

3. Bagaimana analisis perbandingan hasil pewarnaan peta menggunakan Algoritma *Greedy* dengan Algoritma *Welch Powell* ?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi masalah pada wilayah Kabupaten Maros yang berada di provinsi Sulawesi Selatan. Dimana dalam penentuan wilayah yang dianggap strategis yang terdapat 103 kelurahan/desa dengan menggunakan dua Algoritma yaitu Algoritma *Greedy* dan Algoritma *Welch Powell*.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui cara menggunakan Algoritma *Greedy* dan Algoritma *Welch Powell* dalam kasus pewarnaan graf peta Kabupaten Maros.
2. Mengetahui jumlah warna minimum $X(G)$ yang dibutuhkan untuk mewarnai peta Kabupaten Maros.
3. Mengetahui analisis perbandingan hasil pewarnaan peta menggunakan Algoritma *Greedy* dengan Algoritma *Welch Powell*.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pewarnaan graf banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang bisa dimodelkan oleh graf. Salah satu masalah yang diselesaikan dalam metode pewarnaan graf adalah pewarnaan peta. Pewarnaan graf pada peta dapat mengetahui jumlah minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai peta sedemikian sehingga tidak ada wilayah dari peta yang berbatasan langsung menggunakan warna yang sama.

Aplikasi dalam pewarnaan graf pada peta diperlukan beberapa teori agar dapat menyelesaikan masalah tersebut. Adapun teori yang mendukung ialah Definisi Graf, Graf Planar, Graf Dual Pada Peta, Representasi Graf, Pewarnaan Graf, Algoritma Greedy dan Algoritma Welch Powell.

2.1 Definisi Graf

Definisi 2.1.1 Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) yang terdiri dari sebuah himpunan berhingga tidak kosong V dari elemen-elemen yang disebut simpul dan himpunan E yang merupakan himpunan pasangan tidak berurut dua elemen dari V yang disebut sisi.

Banyaknya simpul di G sering disebut order dari G . Sedangkan banyaknya sisi adalah ukurannya. Karena himpunan simpul dari setiap graf tidak kosong, maka order setiap graf minimal 1. Graf dengan tepat satu simpul disebut graf trivial, sedangkan untuk orde minimal 2 disebut nontrivial.

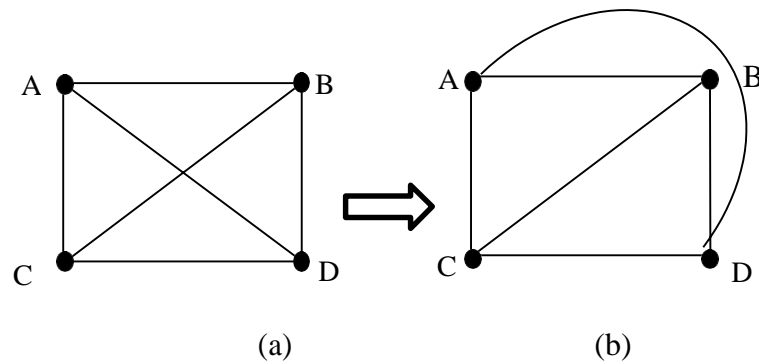
Jadi graf G adalah pasangan dari dua himpunan V dan E yang dapat ditulis $G = (V, E)$, dengan $V(G)$ merupakan himpunan simpul dari graf G dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi dari graf G . Misalkan sisi $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan sisi e terkait dengan titik u dan v serta titik u bertetangga dengan titik v . Jika $uv = vu$ dan $u \in G, v \in G$ maka G disebut graf sederhana.

Beberapa graf sederhana yang khusus seperti siklus, lintasan, pohon, graf roda, graf lengkap, graf bintang dan sebagainya. Selain graf itu adapun graf yang dikenal dengan graf planar. Berikut ini pembahasan tentang graf planar.

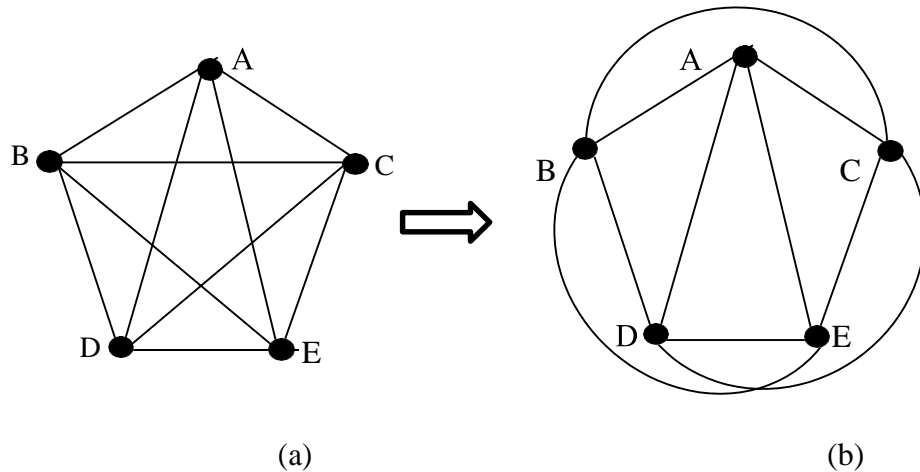
2.2 Graf Planar

Sebuah graf G dapat dikatakan sebuah graf planar jika graf G dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada dua sisi yang saling berpotongan satu sama lain. Sebuah graf yang tidak planar disebut nonplanar.

Contoh graf planar dapat dilihat pada Gambar 2.1 graf G dikatakan graf planar karena pada gambar 2.1 (a) ada sisi berpotongan tetapi bisa digambarkan kembali sedemikian sehingga tidak ada lagi sisi yang berpotongan seperti pada gambar 2.1 (b), dengan G digambarkan sebagai graf bidang.



Gambar 2.1 Graf Planar dan graf bidang



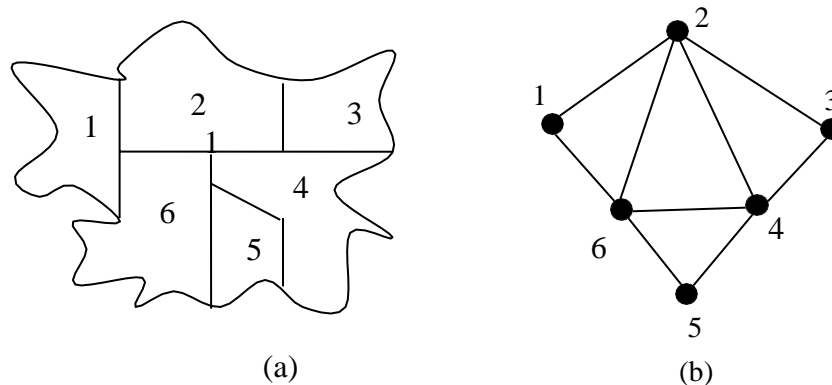
Gambar 2.2 Graf nonplanar

2.3 Graf Dual Pada Peta

Misalkan kita mempunyai sebuah graf planar G yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Kita dapat membuat suatu graf G^* yang secara geometri merupakan dual dari graf planar tersebut dengan cara sebagai berikut:

- (a) Pada setiap wilayah f di G , dimisalkan sebagai simpul v^* yang merupakan simpul untuk G^* .
- (b) Selanjutnya, setiap simpul v^* yang bertetangga ditarik sebuah sisi e^* . Dua buah wilayah dikatakan bertetangga apabila kedua wilayah berbatasan atau terhubung langsung.

Graf G^* yang terbentuk dengan cara penggambaran demikian disebut graf dual (atau tepatnya dual geometri) dari graf G (Renaldi Munir, 2009). Misalkan peta M yang terdiri dari 6 wilayah yaitu 1,2,3,4,5,dan 6. Gambar 2.3 (a) menunjukkan suatu peta dan graf dual pada Gambar 2.3 (b).



Gambar 2.3 Peta M dan pembentukan graf dual G^*

Salah satu aplikasi graf dual yang penting adalah untuk mempresentasikan peta (map). Setiap peta pada bidang datar terdiri dari sejumlah wilayah (region). Setiap wilayah pada peta dinyatakan sebuah simpul, sedangkan sisi menyatakan bahwa dua wilayah berbatasan langsung (bertetangga).

2.4 Representasi Graf

Penyajian suatu matriks dapat mempermudah seseorang untuk menganalisa suatu graf, apabila analisa tersebut memerlukan perhitungan. Terdapat beberapa representasi yang mungkin pada suatu graf yaitu :

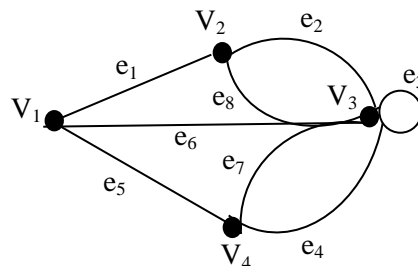
2.4.1 Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

Representasi graf yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah matriks ketetanggaan (adjacency matrix). Matriks ketetanggaan adalah matriks yang berukuran $n \times n$ dengan jumlah baris dan kolom sama dengan jumlah simpul dalam graf atau graf bujur sangkar. Matriks ketetanggaan digunakan untuk menyatakan keterhubungan antar simpul-simpulnya.

Definisi 2.4.1 (Biggs, 1996). Matriks ketetanggaan $A(G) = (\alpha_{ij})$ dari suatu graf $G = (V, E)$ dengan n titik yaitu $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah matriks berukuran $n \times n$, dengan

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika titik } v_i \text{ bertetangga dengan } v_j \\ 0, & \text{jika titik } v_i \text{ tidak bertetangga dengan } v_j \end{cases}$$

Sebagai contoh misal graf G seperti gambar berikut.



Gambar 2.4 Graf G Direpresentasikan Ke dalam Matriks Ketetanggaan
Matriks ketetanggaan dari graf G diatas adalah

Tabel Matriks Ketetanggaan dari Graf

Titik	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	1
v_2	1	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	0

2.4.2 Matriks Bersisian (*Incidency Matrix*)

Matriks bersisian digunakan untuk menyatakan kebersisian simpul dengan sisi. Matriks bersisian adalah matriks yang berukuran $n \times m$. Baris menunjukkan label simpul dan kolom menunjukkan label sisinya. Jika simpul terhubung dengan sisi maka elemen matriks bernilai 1, sebaliknya jika simpul tidak terhubung dengan sisi maka elemen matriks bernilai 0.

Berdasarkan Gambar 2.4, dapat dipresentasikan dalam matriks bersisian sebagai berikut :

Tabel Matriks Bersisian dari Graf

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1	0	0	0	1	1	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0	0	1
v_3	0	1	1	1	0	1	1	1
v_4	0	0	0	1	1	0	1	0

2.5 Pewarnaan Graf

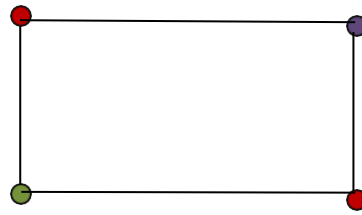
Dalam sebuah teori graf, metode pewarnaan graf (*graph colouring*) merupakan kasus khusus dari pelabelan sebuah graf. Terdapat tiga macam pewarnaan graf yaitu pewarnaan simpul (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), dan pewarnaan wilayah (*face colouring*).

2.5.1 Pewarnaan Simpul

Pewarnaan simpul adalah mewarnai setiap simpul pada suatu graf sedemikian sehingga setiap dua simpul yang bertetangga memiliki warna berbeda.

Definisi 2.5.1 *Pewarnaan simpul pada suatu graf G adalah pemberian warna pada himpunan simpul dari graf G dengan aturan masing-masing simpul diberi hanya satu warna, sedemikian sehingga simpul-simpul yang bertetangga berwarna berbeda (G.Chartrand and P.Zhang, 2005).*

Contoh pewarnaan simpul pada graf diberikan pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Pewarnaan Simpul

2.5.2 Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi pada suatu graf G , sedemikian sehingga setiap dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Contoh pewarnaan sisi pada graf diberikan pada Gambar 2.6.

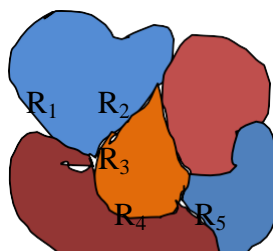


Gambar 2.6 Pewarnaan Sisi

2.5.3 Pewarnaan Wilayah

Pewarnaan wilayah merupakan pemberian warna pada setiap wilayah pada suatu graf sehingga tidak ada wilayah yang bersebelahan yang memiliki warna yang sama. Pewarnaan wilayah ini diterapkan pada pewarnaan peta. Pada pewarnaan peta, diberikan warna yang berbeda pada setiap wilayah yang saling bersebelahan. Dalam mengerjakan pewarnaan wilayah, kita dapat menggunakan prinsip pewarnaan simpul pada graf. Setiap wilayah pada peta dinyatakan sebagai simpul graf. Sedangkan sisi dinyatakan perbatasan secara langsung dua wilayah (disebut juga bertetangga).

Contoh pewarnaan wilayah pada graf diberikan pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Pewarnaan Wilayah

Dalam persoalan pewarnaan graf yang ingin dituju tidak hanya sekedar mewarnai titik-titik dengan warna berbeda dari warna titik tetangganya saja, namun diinginkan jumlah jenis warna yang digunakan sesedikit mungkin (Munir, 2008).

Bilangan kromatik (chromatic number) adalah k bilangan terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan k warna. Bilangan kromatik dari graf G , dinyatakan dengan $\chi(G)$. Warna-warna yang digunakan untuk mewarnai dapat dinyatakan dengan bilangan $1, 2, 3, \dots, k$.

2.6 Algoritma Greedy

Algoritma greedy adalah algoritma yang menghasilkan solusi optimum melalui penyelesaian masalah langkah per langkah (*step by step*) dengan menerapkan 2 hal berikut pada tiap langkahnya :

- (a) Pilihan yang diambil merupakan pilihan yang terbaik yang dapat diperoleh pada saat itu tanpa memperhatikan konsekuensinya ke depan nanti, hal ini harus bersesuaian dengan prinsip Algoritma *Greedy* yaitu "*take what you can get now*".
- (b) Berharap dengan memilih pilihan terbaik saat itu (optimum lokal) dapat mencapai solusi terbaik dari permasalahan yang dihadapi (optimum global). Dalam Algoritma *Greedy* diasumsikan bahwa optimum lokal merupakan bagian dari optimum global. Sedangkan untuk aplikasinya Algoritma *Greedy* digunakan untuk pemecahan masalah yang memerlukan solusi.

2.6.1 Komponen Algoritma Greedy

Komponen Algoritma *Greedy* terdiri dari:

- a. Himpunan Kandidat C
Himpunan yang berisi elemen pembentuk solusi S .
- b. Himpunan Solusi S
Himpunan yang berisi elemen solusi pemecahan masalah.
- c. Fungsi Seleksi
Fungsi yang memilih kandidat yang paling memungkinkan dari himpunan kandidat untuk dimasukkan ke dalam himpunan solusi agar solusi optimal terbentuk. Kandidat yang sudah

terpilih pada suatu langkah tidak akan dipertimbangkan lagi pada langkah selanjutnya.

d. Fungsi Kelayakan

Fungsi yang memeriksa apakah suatu kandidat yang terpilih akan menimbulkan solusi yang layak, yaitu kandidat tersebut, bersama dengan himpunan solusi yang terpilih tidak akan melanggar kendala yang berlaku pada masalah.

e. Fungsi Obyektif

Fungsi yang memaksimalkan atau meminimalkan nilai solusi.

Adapun langkah-langkah pewarnaan graf dengan menggunakan Algoritma *Greedy* sebagai berikut :

1. Tentukan matriks ketetanggaan suatu graf G , berukuran $n \times n$ (matriks bujur sangkar)
2. Matriks A terdiri dari elemen 1 dan 0 dimana $A_{ij} = 1$, jika ada sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j . $A_{ij} = 0$, jika tidak ada sisi yang hubungkan simpul v_i dan v_j .
3. Mengurutkan simpul-simpul dari derajat terbesar ke derajat terkecil.
4. Melakukan pemilihan simpul yang akan diisi warnanya dengan fungsi seleksi simpul. Prioritas pengerjaan dilihat dari simpul dengan derajat terbesar.
5. Memilih kandidat warna dengan menggunakan fungsi seleksi warna sedemikian sehingga tidak ada simpul bertetangga dengan warnayang sama.
6. Periksa kelayakan warna yang dipilih menggunakan fungsi kelayakan. Jika tidak layak, kembali ke langkah 4. Jika layak, masukkan ke himpunan solusi.
7. Periksa apakah solusi sudah meliputi perwarnaan seluruh simpul. Jika sudah maka algoritma berhenti, dan jika belum maka kembali ke langkah 4.

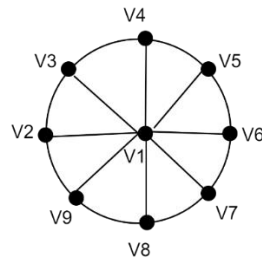
2.7 Algoritma Welch Powell

Algoritma Welch Powell adalah salah satu Algoritma pewarnaan graf yang melakukan pewarnaan berdasarkan derajat tertinggi dari simpul-simpulnya atau disebut *Largest Degree Ordering* (LDO). Algoritma ini dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf G secara efisien. Algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G , namun cukup praktis untuk digunakan dalam pewarnaan simpul sebuah graf.

Adapun langkah-langkah dari Algoritma Welch Powell sebagai berikut :

- (a) Tentukan matriks ketetanggaan suatu graf G , berukuran $n \times n$ (matriks bujur sangkar) dinotasikan sebagai $A[i,j]$.
- (b) Matriks A terdiri dari elemen 1 dan 0 dimana $A_{ij} = 1$, jika ada sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j . $A_{ij} = 0$, jika tidak ada sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j .
- (c) Urutkan derajat setiap simpul dari graf G melalui matriks ketetanggaan $A[i,j]$ dari derajat yang besar ke kecil. Misalkan urutan itu adalah $L = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Kemudian warnai simpul v_1 (simpul yang berderajat tertinggi) dan warna itu disebut warna sekarang.
- (d) Kumpulkan semua simpul yang tidak bertetangga dengan v_1 (simpul berderajat tertinggi) sebut $N[v_1] = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Selanjutnya warna v_2 dengan warna sekarang.
- (e) Kumpulkan semua simpul yang bertetangga dengan v_2 (simpul berderajat tertinggi) disebut $M[v_2]$ kemudian kelompokkan simpul yang belum diwarnai. Misalkan $M[v_2] = \{v_3, v_5, \dots, v_n\}$.
- (f) Misalkan $D = N[v_1] \cap M[v_2]^c$ jika D ada maka warnai simpul dengan warna sekarang kemudian ulangi langkah (e) dan (f). Jika D tidak ada maka lanjutkan warna baru pada simpul di barisan L yang belum diwarnai. Kemudian ulangi langkah (d), (e), dan (f) sampai semua simpul telah diwarnai. (Rahmat Januar Noor, 2012)

Berikut adalah contoh pewarnaan simpul menggunakan algoritma *Greedy* dan algoritma *Welch Powell* pada Graf roda :



Gambar 2.8 Graf Roda

Berikut adalah matriks ketetanggaan pada graf roda :

Tabel Matriks Ketetanggaan dari Graf Roda

Simpul	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_3	1	1	0	1	0	0	0	0	0
v_4	1	0	1	0	1	0	0	0	0
v_5	1	0	0	1	0	1	0	0	0
v_6	1	0	0	0	1	0	1	0	0
v_7	1	0	0	0	0	1	0	1	1
v_8	1	0	0	0	0	0	1	0	1
v_9	1	1	0	0	0	0	0	1	0

Berdasarkan matriks ketetanggaan dapat ditentukan derajat setiap titiknya disajikan dalam tabel berikut :

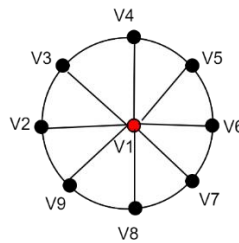
Tabel Derajat Simpul Graf Roda

No.	Titik Graf v_i	Derajat titik $d(v_i)$
1.	1	8
2.	2	3
3.	3	3
4.	4	3
5.	5	3

6.	6	3
7.	7	3
8.	8	3
9.	9	3

1. Pewarnaan Graf Roda menggunakan Algoritma *Greedy*

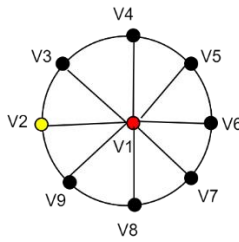
- a. Terpilih v_1 karena memiliki derajat terbanyak $d(v_1) = 8$ dengan menggunakan warna merah karena tidak ada tetangga yang menggunakan warna sama. Dapat dilihat pewarnaan pada simpul v_1 berwarna merah, seperti Gambar 2.9 :



Gambar 2.9 Simpul v_1 menggunakan Warna Merah

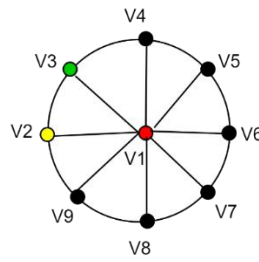
- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_1
 - Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
 - Fungsi seleksi Warna : Warna merah
 - Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_1 bertetangga dengan 8 buah simpul yang belum diwarnai sama sekali, sehingga warna merah tersebut secara otomatis dianggap layak digunakan untuk v_1 .
 - Himpunan solusi S : {Merah}
 - Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.
- b. Seleksi titik dari titik berderajat 3, yaitu $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$
 Terpilih v_2 menggunakan warna kuning, warna merah tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang

sama yakni warna merah. Dapat dilihat pewarnaan pada simpul v_2 berwarna kuning, seperti Gambar 2.10 :



Gambar 2.10 Simpul v_2 menggunakan Warna Kuning

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_2
 - Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
 - Fungsi seleksi Warna : Warna kuning
 - Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetanggannya simpul v_2 bertetangga dengan 2 buah simpul yang belum diwarnai sama sekali dan 1 buah simpul telah diberi warna merah, sehingga warna merah tersebut tidak layak digunakan untuk v_2 .
 - Himpunan solusi S : {Merah, Kuning}
 - Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.
- c. Terpilih simpul v_3
- Terpilih v_3 menggunakan warna hijau, warna merah dan kuning tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah dan kuning. Dapat dilihat pewarnaan pada simpul v_3 berwarna hijau, seperti Gambar 2.11 :

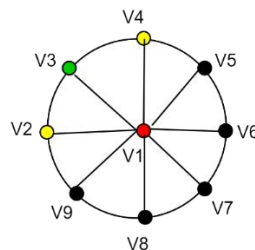


Gambar 2.11 Simpul v_3 menggunakan Warna Hijau

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_3
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna Hijau
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_3 bertetangga dengan 1 buah simpul yang belum diwarnai dan 2 buah simpul telah diwarnai, sehingga warna merah dan kuning tersebut tidak layak digunakan untuk v_3 .
- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.

d. Terpilih simpul v_4

Terpilih v_4 menggunakan warna kuning, warna merah tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah. Dapat dilihat pewarnaan pada simpul v_4 berwarna kuning, seperti Gambar 2.12 :

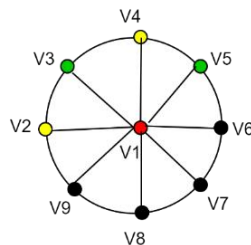


Gambar 2.12 Simpul v_4 menggunakan Warna Kuning

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_4
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna kuning
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_4 bertetangga dengan 1 buah simpul yang belum diwarnai dan 2 buah simpul telah diwarnai, sehingga warna merah tidak layak digunakan untuk v_4 .
- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.

e. Terpilih simpul v_5

Terpilih v_5 menggunakan warna hijau, warna merah dan kuning tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah dan kuning. Dapat dilihat pewarnaan pada simpul v_5 berwarna hijau, seperti Gambar 2.13 :



Gambar 2.13 Simpul v_5 menggunakan Warna Hijau

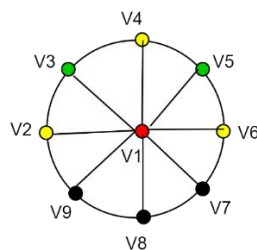
- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_5
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna hijau
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_5 bertetangga dengan 1 buah simpul yang belum diwarnai dan 2 buah simpul telah diwarnai, sehingga warna merah dan kuning tidak layak

digunakan untuk v_5 .

- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.

f. Terpilih simpul v_6

Terpilih v_6 menggunakan warna kuning, warna merah tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah. Dapat dilihat pada pewarnaan simpul v_6 berwarna kuning, seperti Gambar 2.14 :



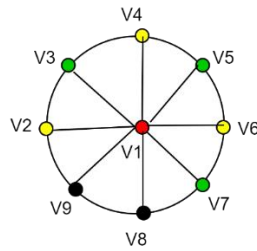
Gambar 2.14 Simpul v_6 menggunakan Warna Kuning

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_6
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna kuning
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_6 bertetangga dengan 1 buah simpul yang belum diwarnai dan 2 buah simpul telah diwarnai, sehingga warna merah tidak layak digunakan untuk v_6 .
- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.

g. Terpilih simpul v_7

Terpilih v_7 menggunakan warna hijau, warna merah dan kuning tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah dan kuning. Dapat dilihat

pada pewarnaan simpul v_7 berwarna hijau, seperti Gambar 2.15 :

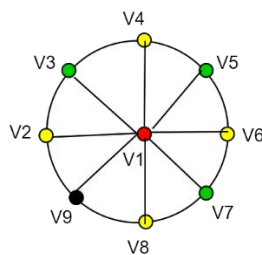


Gambar 2.15 Simpul v_7 menggunakan Warna Hijau

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_7
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna hijau
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_7 bertetangga dengan 1 buah simpul yang belum diwarnai dan 2 buah simpul telah diwarnai, sehingga warna merah dan kuning tidak layak digunakan untuk v_7 .
- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.

h. Terpilih simpul v_8

Terpilih v_8 menggunakan warna kuning, warna merah tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah. Dapat dilihat pada pewarnaan simpul v_8 berwarna kuning, seperti Gambar 2.16 :

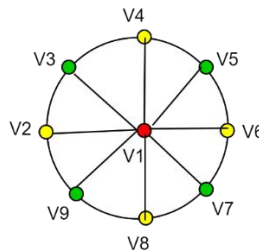


Gambar 2.16 Simpul v_8 menggunakan Warna Kuning

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_8
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna kuning
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_8 bertetangga dengan 1 buah simpul yang belum diwarnai dan 2 buah simpul telah diwarnai, sehingga warna merah dan kuning tidak layak digunakan untuk v_8 .
- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi belum optimal karena semua simpul belum diwarnai.

i. Terpilih simpul v_9

Terpilih v_9 menggunakan warna hijau, warna merah dan kuning tidak layak karena, terdapat simpul tetangga menggunakan warna yang sama yakni warna merah dan kuning. Dapat dilihat pada pewarnaan simpul v_9 berwarna hijau, seperti Gambar 2.17 :



Gambar 2.17 Simpul v_9 menggunakan Warna Hijau

- Fungsi seleksi simpul : Simpul v_9
- Himpunan kandidat C : {Himpunan Warna}
- Fungsi seleksi Warna : Warna hijau
- Fungsi kelayakan :Dilihat dari matriks ketetangannya simpul v_9 bertetangga dengan 3 buah simpul yang telah diwarnai, sehingga warna merah dan kuning tidak layak digunakan untuk v_9 .

- Himpunan solusi S : {Merah, Kuning, Hijau}
- Fungsi obyektif : Solusi optimal karena semua simpul telah diwarnai.

2. Pewarnaan Graf Roda menggunakan Algoritma *Welch Powell*

a. Untuk mewarnai graf pada gambar 2. dengan menggunakan implementasi algoritma pewarnaan graf, langkah pertama yang dilakukan adalah menyusun derajat titik berdasarkan derajatnya dari besar ke kecil. Jadi, urutannya $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$
Misalkan $V(G_1) := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.

b. Selanjutnya, ambil warna pertama, misalkan merah. Beri warna merah pada simpul v_1 (karena v_1 adalah simpul urutan pertama). Kemudian kumpul semua simpul yang tidak bertetangga dengan v_1 .

$$N[v_1] = \emptyset$$

Karena $N[v_1]$ adalah himpunan kosong sehingga didapatkan simpul yang sudah diberi warna pertama yaitu v_1 .

c. Kemudian kumpul semua simpul yang belum diberi warna yaitu sebagai berikut :

Urutannya adalah $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$.

Misalkan $V(G_2) := \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.

d. Ambil warna kedua, misalkan kuning. Beri warna kuning pada simpul v_2 (karena v_2 sekarang ada di urutan pertama). Kemudian kumpul semua simpul yang tidak bertetangga dengan v_2 pada simpul yang belum diberi warna.

$$N[v_2] = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

Pilih salah satu di $N[v_2]$, misalkan v_4 beri warna yang sama pada simpul v_2 yaitu kuning, kemudian kumpul semua simpul yang bertetangga dengan v_4 pada simpul yang belum diberi warna.

$$n(v_4) = \{v_3, v_5\}$$

$$M[v_4] = \{v_4\} \cup n(v_4)$$

$$= \{v_4, v_3, v_5\}$$

$$\begin{aligned}
\text{e. } A_1 &= N[v_2] \cap M[v_4]^c \\
&= \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \cap \{v_4, v_3, v_5\} \\
&= \{v_6, v_7, v_8\}
\end{aligned}$$

Pilih salah satu di A_1 , misalkan v_6 beri warna yang sama pada simpul v_2 dan v_4 yaitu kuning, kemudian kumpul semua simpul yang bertetangga dengan v_6 pada simpul yang belum diberi warna.

$$\begin{aligned}
n(v_6) &= \{v_5, v_7\} \\
M[v_6] &= \{v_6\} \cup n(v_6) \\
&= \{v_6, v_5, v_7\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f. } A_2 &= A_1 \cap M[v_6]^c \\
&= \{v_6, v_7, v_8\} \cap \{v_6, v_5, v_7\} \\
&= \{v_8\}
\end{aligned}$$

Pilih salah satu di A_2 , misalkan v_8 beri warna yang sama pada simpul v_2 , v_4 , dan v_6 yaitu kuning, kemudian kumpul semua simpul yang bertetangga dengan v_8 pada simpul yang belum diberi warna.

$$\begin{aligned}
n(v_8) &= \{v_7, v_9\} \\
M[v_8] &= \{v_8\} \cup n(v_8) \\
&= \{v_8, v_7, v_9\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g. } A_3 &= A_2 \cap M[v_8]^c \\
&= \{v_8\} \cap \{v_8, v_7, v_9\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Karena A_3 adalah himpunan kosong sehingga didapatkan simpul yang sudah diberi warna kedua yaitu v_2, v_4, v_6 , dan v_8 .

h. Kemudian kumpul semua simpul yang belum diberi warna yaitu sebagai berikut :

Urutannya adalah v_3, v_5, v_7, v_9

Misalkan $V(G_3) := \{v_3, v_5, v_7, v_9\}$.

i. Ambil warna ketiga, misalkan hijau. Beri warna hijau pada simpul v_3 (karena v_3 sekarang ada di urutan pertama). Kemudian kumpul semua simpul yang tidak bertetangga dengan v_3 pada simpul yang belum diberi warna.

$$N[v_3] = \{v_5, v_7, v_9\}$$

Pilih salah satu di $N[v_3]$, misalkan v_5 beri warna yang sama pada simpul v_3 yaitu hijau, kemudian kumpul semua simpul yang bertetangga dengan v_5 pada simpul yang belum diberi warna.

$$\begin{aligned}n(v_5) &= \emptyset \\M[v_5] &= \{v_5\} \cup n(v_5) \\&= \{v_5\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{j. } B_1 &= N[v_3] \cap M[v_5]^c \\&= \{v_5, v_7, v_9\} \cap \{v_5\} \\&= \{v_7, v_9\}\end{aligned}$$

Pilih salah satu di B_1 , misalkan v_7 beri warna yang sama pada simpul v_3 dan v_5 yaitu hijau, kemudian kumpul semua simpul yang bertetangga dengan v_7 pada simpul yang belum diberi warna.

$$\begin{aligned}n(v_7) &= \emptyset \\M[v_7] &= \{v_7\} \cup n(v_7) \\&= \{v_7\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{k. } B_2 &= B_1 \cap M[v_7]^c \\&= \{v_7, v_9\} \cap \{v_7\} \\&= \{v_9\}\end{aligned}$$

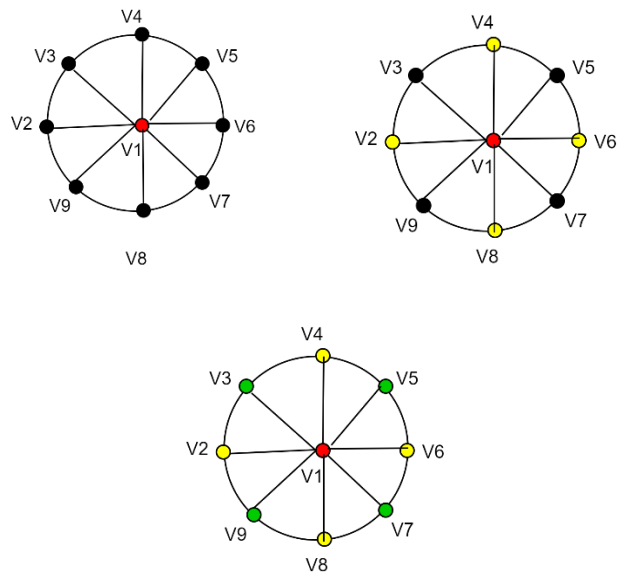
Pilih salah satu di B_2 , misalkan v_9 beri warna yang sama pada simpul v_3, v_5, v_7 yaitu hijau, kemudian kumpul semua simpul yang bertetangga dengan v_9 pada simpul yang belum diberi warna.

$$\begin{aligned}n(v_9) &= \emptyset \\M[v_9] &= \{v_9\} \cup n(v_9) \\&= \{v_9\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{l. } B_3 &= B_2 \cap M[v_9]^c \\&= \{v_9\} \cap \{v_9\} \\&= \emptyset\end{aligned}$$

Karena B_3 adalah himpunan kosong sehingga didapatkan simpul yang sudah diberi warna ketiga yaitu v_3, v_5, v_7, v_9 .

m. Karena semua simpul telah diberi warna, maka pewarnaan telah selesai.



Gambar 2.18 Hasil Pewarnaan Graf Roda berorder 9

Kesimpulan :

Pada pewarnaan menggunakan algoritma *Greedy* dan algoritma *Welch Powell* graf roda merupakan Graf berwarna 3. Jadi $X(G) \leq 3$ yaitu sebagai berikut :

- Warna merah (1) = $\{v_1\}$
- Warna kuning (2) = $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$
- Warna hijau (3) = $\{v_3, v_5, v_7, v_9\}$.