

**METODE ELEMEN BATAS UNTUK MASALAH NILAI  
AWAL DAN BATAS TAK TUNAK YANG DIATUR  
OLEH PERSAMAAN LAPLACE PADA MEDIA TAK  
HOMOGEN ANISOTROPIK**

**SKRIPSI**



**SAMUEL EDISON PARDOMUAN SITORUS**

**H011191070**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

**METODE ELEMEN BATAS UNTUK MASALAH NILAI  
AWAL DAN BATAS TAK TUNAK YANG DIATUR  
OLEH PERSAMAAN LAPLACE PADA MEDIA TAK  
HOMOGEN ANISOTROPIK**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada  
Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan**

**Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

**SAMUEL EDISON PARDOMUAN SITORUS**

**H011191070**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2023**

## LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Metode Elemen Batas untuk Masalah Nilai Awal dan Batas Tak Tunak yang Diatur oleh Persamaan Laplace pada Media Tak Homogen Anisotropik**

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat, dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 3 Juli 2023



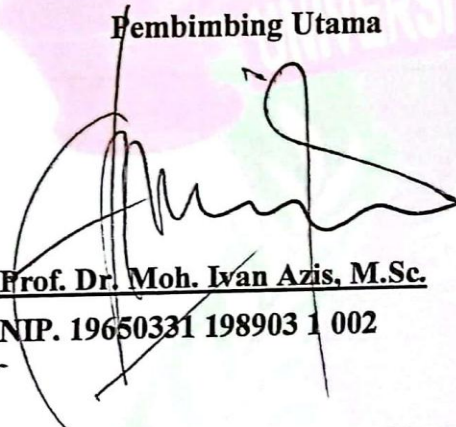
**Samuel Edison Pardomuan Sitorus**

**NIM. H011191070**

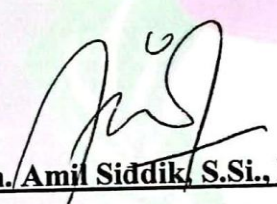
**METODE ELEMEN BATAS UNTUK MASALAH NILAI AWAL  
DAN BATAS TAK TUNAK YANG DIATUR OLEH PERSAMAAN  
LAPLACE PADA MEDIA TAK HOMOGEN ANISOTROPIK**

**Disetujui oleh:**

**Pembimbing Utama**

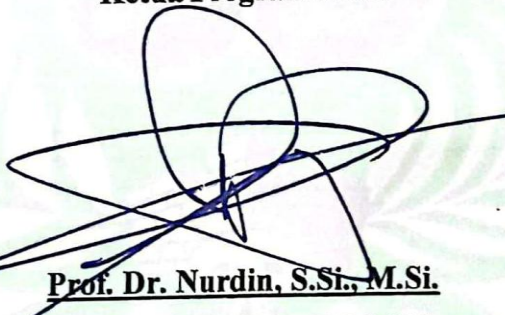
  
**Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc.**  
**NIP. 19650331 198903 1 002**

**Pembimbing Pertama**

  
**A. Muh. Amil Siddik, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19911003 201903 1 015**

**Ketua Program Studi**



  
**Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 19700807 200003 1 002**

Pada tanggal 3 Juli 2023

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :  
Nama : Samuel Edison Pardomuan Sitorus  
NIM : H011191070  
Program Studi : Matematika  
Judul Skripsi : Metode Elemen Batas untuk Masalah Nilai Awal dan Batas Tak Tunak yang Diatur oleh Persamaan Laplace pada Media Tak Homogen Anisotropik

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua : Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc. (.....)

Sekretaris : A. Muh. Amil Siddik, S.Si., M.Si. (.....)

Anggota : Dr. Firman, S.Si., M.Si. (.....)

Anggota : Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D. (.....)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 3 Juli 2023

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan karena atas berkat dan anugerahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Metode Elemen Batas untuk Masalah Nilai Awal dan Batas Tak Tunak yang Diatur oleh Persamaan Laplace pada Media Tak Homogen Anisotropik”** guna memenuhi persyaratan untuk meraih gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari dalam penyusunan skripsi ini terdapat keterbatasan dan kendala yang dialami penulis, namun dapat terselesaikan berkat bantuan, doa, dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua penulis, yaitu Bapak Albon Sitorus dan Ibu Liner Sirait yang telah membesarkan, membantu, dan mendampingi penulis sehingga dapat menyelesaikan pendidikan hingga di tingkat perguruan tinggi. Penulis juga menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaludin Jompa, M.Sc. selaku rektor Universitas Hasanuddin
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin S.SI., M.Si. Selaku ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan ilmunya serta kelancaran dalam penyusunan skripsi ini, serta staf Departemen Matematika yang sangat membantu penulis dalam proses administrasi.
4. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika serta dosen lainnya yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
5. Bapak Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc. dan Bapak A. Muh. Amil Siddik, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan waktunya untuk mendukung dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.

6. Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si. dan Prof. Dr. Jeffry Kusuma, Ph.D. selaku Tim Penguji atas masukan, saran, dan kritikan guna menyempurnakan penyusunan skripsi ini
7. Keluarga dan saudara penulis yang senantiasa membantu, memotivasi, dan mendukung penulis di setiap kegiatan yang penulis lakukan.
8. Teman-teman penulis di kampus serta seluruh kerabat yang memberikan semangat dan membantu memantapkan penyusunan skripsi ini.

Akhir kata, Penulis berharap bahwa skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, serta setiap bantuan yang telah diberikan kepada penulis kiranya Tuhan yang memberikan balasannya.

Makassar, 3 Juli 2023

Samuel Edison Pardomuan Sitorus

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK  
KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Samuel Edison Pardomuan Sitorus  
NIM : H011191070  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**Metode Elemen Batas untuk Masalah Nilai Awal dan Batas Tak Tunak yang  
Diatur oleh Persamaan Laplace pada Media Tak Homogen Anisotropik**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 3 Juli 2023

Yang Menyatakan

Samuel Edison Pardomuan Sitorus



## ABSTRAK

Pengaplikasian persamaan Laplace pada penelitian berkaitan dengan Metode Elemen Batas masih terus dilakukan. Salah satu media yang sering digunakan dalam penerapannya ialah media anisotropik. Media anisotropik merupakan media dengan konduktivitas yang dinyatakan dalam matriks  $\mathbf{D}$ , yaitu matriks berukuran  $2 \times 2$  yang memenuhi  $\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$  atau  $\lambda_{12} \neq 0$  dan  $|\mathbf{D}| = \lambda_{11}\lambda_{22} - (\lambda_{12})^2 > 0$ . Sedangkan kehomogenan media anisotropik tersebut ditentukan menggunakan fungsi  $g(x)$ . Pada penelitian ini akan disajikan pemaparan mengenai Metode Elemen Batas untuk masalah nilai awal dan batas menggunakan persamaan Laplace sebagai persamaan pengaturannya dan media tak homogen anisotropik serta penerapannya pada beberapa kasus. Hasil MEB yang diperoleh kemudian dibandingkan dengan solusi analitik, dimana semakin banyak titik diskritisasi yang digunakan menghasilkan solusi MEB yang semakin akurat, dengan perubahan solusi sesuai dengan karakteristik fungsi  $f(t)$ , serta nilai/syarat batas yang memberikan pengaruh terhadap keakuratan solusi MEB.

Kata Kunci: *Metode Elemen Batas, media tak homogen anisotropik, persamaan Laplace.*

Judul : Metode Elemen Batas untuk Masalah Nilai Awal dan Batas Tak  
Tunak yang Diatur oleh Persamaan Laplace pada Media Tak  
Homogen Anisotropik

Nama : Samuel Edison Pardomuan Sitorus

NIM : H011191070

Program Studi : Matematika

## ABSTRACT

The application of the Laplace equation in research related to the Boundary Element Method is still being carried out. One of the media that is often used in its application is anisotropic media. Anisotropic media is media with conductivity stated in matrix  $D$ , which is a  $2 \times 2$  matrix that satisfies  $\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$  or  $\lambda_{12} \neq 0$  and  $|D| = \lambda_{11}\lambda_{22} - (\lambda_{12})^2 > 0$ . While the homogeneity of the anisotropic media is determined using the  $g(x)$  function. In this research will present an explanation of the Boundary Element Method for initial and boundary value problems using the Laplace equation as the governing equation and anisotropic inhomogeneous media along its application in several cases. The BEM results obtained are then compared with the analytical solutions, where the more discretization points used produce a more accurate BEM solution, with changes in the solution according to the characteristics of the function  $f(t)$ , as well as boundary values that influence the accuracy of the BEM solution.

Keywords: *Boundary Element Method, anisotropic inhomogeneous media, Laplace equation.*

Title : Boundary Element Method for Unsteady Initial Value and Boundary Problems Governed by Laplace Equation on Anisotropic Inhomogeneous Media

Name : Samuel Edison Pardomuan Sitorus

Student ID : H011191070

Study Program: Mathematics

## DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL .....	i
HALAMAN JUDUL .....	ii
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
HALAMAN PENGESAHAN .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
KATA PENGANTAR .....	vi
PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI .....	viii
ABSTRAK .....	ix
ABSTRACT .....	x
DAFTAR ISI .....	xi
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
DAFTAR TABEL .....	xiv
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Tujuan Penelitian .....	2
1.4 Manfaat Penelitian .....	3
1.5 Sistematika Penulisan .....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	4
2.1 Teorema Gauss-Green .....	4
2.2 Teorema Divergensi Gauss .....	4
2.3 Fungsi Dirac Delta .....	5
2.4 Media Tak Homogen Anisotropik .....	6
2.5 Persamaan Laplace pada Keadaan Tak Tunak .....	7
2.6 Metode Elemen Batas .....	8
2.7 Transformasi Laplace .....	25
2.8 Invers Transformasi Laplace Secara Numerik .....	26
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	28
3.1 Metode Penelitian .....	28
3.2 Waktu dan Tempat Penelitian .....	28
3.3 Prosedur Penelitian .....	28
3.4 Alur Penelitian .....	30
BAB IV PEMBAHASAN DAN HASIL .....	31

4.1	Persamaan Integral Batas .....	31
4.2	Solusi Fundamental $\Phi$ .....	37
4.3	Tingkat Keakuratan MEB .....	37
4.4	Perubahan solusi MEB di keadaan tak tunak .....	70
4.5	Nilai Batas pada MEB .....	74
BAB V PENUTUP .....		85
5.1	Kesimpulan.....	85
5.2	Saran .....	85
DAFTAR PUSTAKA .....		86

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.3.1 Interpretasi fungsi $f_k(x) = \frac{k}{\pi(1+k^2x^2)}$ .....	6
Gambar 2.4.1 Media tak homogen dengan $g(x) = (3 + 0,75 x_1 + 2,25 x_2)^2$ .....	7
Gambar 2.6.1 Diskritisasi pada batas $\Gamma$ .....	10
Gambar 2.6.2 Diskritisasi pada contoh kasus.....	12
Gambar 4.3.1 Syarat Batas Kasus 1 .....	38
Gambar 4.3.2 Syarat Batas Kasus 2.....	67
Gambar 4.4.1 Syarat Batas Kasus 1, 2, dan 3 .....	70
Gambar 4.4.2 Perbandingan Solusi Kasus 1 pada titik $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .....	72
Gambar 4.4.3 Perbandingan Solusi Kasus 2 pada titik $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .....	73
Gambar 4.4.4 Perbandingan Solusi Kasus 3 pada titik $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .....	73
Gambar 4.5.1 Syarat Batas pada Kasus 1 .....	75
Gambar 4.5.2 Syarat Batas pada Kasus 2 .....	76
Gambar 4.5.3 Syarat Batas pada Kasus 3 .....	76
Gambar 4.5.4 Grafik Solusi Kasus 2(a) dengan 32 titik diskritisasi untuk $t = 4$ .....	78
Gambar 4.5.5 Error Absolut tiap titik Kasus 2(a) dengan 32 titik diskritisasi untuk $t = 4$ .....	79
Gambar 4.5.6 Grafik Akumulasi Error Absolut dengan 32 titik diskritisasi .....	79
Gambar 4.5.7 Grafik Akumulasi Error Absolut dengan 320 titik diskritisasi.....	80
Gambar 4.5.8 Grafik Akumulasi Error Relatif dengan 32 titik diskritisasi .....	82
Gambar 4.5.9 Grafik Akumulasi Error Relatif dengan 320 titik diskritisasi .....	83

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.7.1 Transformasi Laplace fungsi $f$ dengan konstanta $a$ , $b$ , dan $c$ .....	26
Tabel 3.3.1 Tahapan Prosedur Penelitian.....	29
Tabel 4.3.1 Solusi pada titik $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{5}\right)$ menggunakan integral analitik .....	64
Tabel 4.3.2 Solusi pada titik $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{5}\right)$ menggunakan integral Bode.....	64
Tabel 4.3.3 Solusi pada titik $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{4}\right)$ dan $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dengan 4 titik diskritisasi.....	65
Tabel 4.3.4 Solusi untuk 32 dan 320 titik diskritisasi.....	66
Tabel 4.3.5 Solusi MEB 4 titik diskritisasi pada titik $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .....	68
Tabel 4.3.6 Solusi pada titik $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{4}\right)$ dan $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{5}\right)$ dengan 4 titik diskritisasi.....	68
Tabel 4.3.7 Solusi untuk 32 dan 320 titik diskritisasi.....	69
Tabel 4.4.1 Solusi Kasus 1 pada titik $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .....	72
Tabel 4.4.2 Solusi Kasus 2 pada titik $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .....	72
Tabel 4.4.3 Solusi Kasus 3 pada titik $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .....	73
Tabel 4.5.1 Akumulasi Error Absolut dengan 320 titik diskritisasi Kasus 1 dan 2....	76
Tabel 4.5.2 Akumulasi Error Absolut dengan 320 titik diskritisasi Kasus 3 .....	77
Tabel 4.5.3 Akumulasi Error Absolut dengan 32 titik diskritisasi Kasus 1 dan 2.....	77
Tabel 4.5.4 Akumulasi Error Absolut dengan 32 titik diskritisasi Kasus 3 .....	78
Tabel 4.5.5 Akumulasi Error Relatif dengan 320 titik diskritisasi Kasus 1 dan 2 .....	80
Tabel 4.5.6 Akumulasi Error Relatif dengan 320 titik diskritisasi Kasus 3.....	81
Tabel 4.5.7 Akumulasi Error Relatif dengan 32 titik diskritisasi Kasus 1 dan 2 .....	81
Tabel 4.5.8 Akumulasi Error Relatif dengan 32 titik diskritisasi Kasus 3.....	81

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Metode Elemen Batas (MEB) merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk mencari solusi pendekatan dari suatu masalah nilai batas dan awal. Terdapat beberapa metode lainnya seperti Metode Beda Hingga (MBH) dan Metode Elemen Hingga (MEH). Diskritisasi pada MEB dilakukan pada batas domainnya. Hal tersebut merupakan perbedaan mendasar antara MEB dengan MBH dan MEH, dimana pada kedua metode tersebut diskritisasi dilakukan di dalam domainnya (Azis, 2019). Hingga pada awal abad 19, MEB lebih dikenal sebagai Metode Persamaan Integral Batas. Metode ini diterapkan untuk memecahkan persoalan fisika matematika yang berawal dari G. Green. Pada tahun 1828, Green merumuskan representasi integral dari solusi untuk masalah Dirichlet dan Neumann dari persamaan Laplace dengan memperkenalkan fungsi Green. Meskipun demikian, Metode Elemen Batas tidak dapat dilepaskan dari peran Fredholm. Pada awal abad 20, Fredholm merupakan orang pertama yang menggunakan persamaan integral batas tunggal untuk menemukan besaran batas yang tidak diketahui untuk masalah teori potensial (Katsikadelis, 2002).

Salah satu persamaan yang sangat penting dari semua persamaan differensial parsial dalam bidang matematika terapan ialah persamaan Laplace. Beberapa masalah yang diatur oleh persamaan Laplace ialah konduksi panas (baik dua dimensi maupun 3 dimensi), fungsi potensial listrik dalam pertimbangan medan elektrostatik, serta fungsi lengkung dalam elastisitas (Boyce & DiPrima, 2012).

Saat ini, pengaplikasian persamaan Laplace pada penelitian berkaitan dengan Metode Elemen Batas masih terus dilakukan. Salah satu media yang sering digunakan dalam penerapannya ialah media anisotropik. Media anisotropik sendiri merupakan media dengan konduktivitas matriks berukuran  $2 \times 2$  definit positif yang memenuhi  $k_{11} \neq k_{22}$  atau  $k_{12}$  dan  $k_{21} \neq 0$  (Azis, 2019).

Salah satu penelitian yang membahas tentang media anisotropik dilakukan oleh Haddade dkk. Dalam penelitian ini, digunakan media anisotropik yang tergradasi secara kuadrat, dimana hasilnya menunjukkan keakuratan serta konsistensi solusi MEB (Haddade *et al.*, 2019). Kemudian Jabir dkk menggunakan media anisotropik yang tergradasi secara trigonometri. Penelitian ini juga memperlihatkan solusi MEB yang akurat berdasarkan solusi analitik (Jabir *et al.*, 2019). Kemudian Azis melakukan penelitian pada media anisotropik yang tergradasi secara eksponensial dalam keadaan tak tunak. Dengan mengkombinasikan transformasi Laplace dan MEB, solusi fundamental yang diperoleh bebas dari variabel waktu dan solusi numerik yang dihasilkan akurat (Azis, 2021). Selanjutnya, Bilaku dkk mengaplikasikan MEB untuk menyelesaikan persamaan Laplace 2 dimensi. Hasilnya diperoleh solusi numerik dengan nilai galat yang kecil (Bilaku *et al.*, 2021).

Dari uraian latar belakang tersebut, terlihat bahwa penerapan MEB pada media anisotropik yang diatur oleh persamaan Laplace menunjukkan hasil yang sangat baik, oleh karena itu penulis ingin mengajukan tugas akhir dengan judul **“Metode Elemen Batas dengan Masalah Nilai Awal dan Batas Tak Tunak yang Diatur oleh Persamaan Laplace pada Media Tak Homogen Anisotropik”**

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas adalah mencari solusi pendekatan dari masalah tak tunak yang dibangun oleh persamaan Laplace pada media tak homogen anisotropik.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini ialah:

1. Untuk mengetahui tingkat keakuratan solusi yang dihasilkan oleh MEB.
2. Untuk memahami perubahan yang terjadi pada sistem seiring berjalannya waktu.
3. Untuk mengetahui pengaruh nilai batas terhadap solusi yang dihasilkan.



#### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian yang diharapkan oleh penulis ialah dapat menambah pemahaman pengetahuan bagi penulis dan pembaca dalam penerapan Metode Elemen Batas, serta sebagai referensi untuk penelitian yang lebih lanjut.

#### 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini ialah sebagai berikut

##### **BAB I PENDAHULUAN**

Dalam bab ini dipaparkan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

##### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bagian ini akan dibahas tentang dasar-dasar MEB dan penggunaannya pada media isotropik homogen. Selain itu, terdapat juga materi tentang transformasi Laplace.

##### **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Dalam bab ini dijelaskan tentang metode penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur penelitian, serta alur penelitian yang digunakan oleh penulis.

##### **BAB IV PEMBAHASAN DAN HASIL**

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dan hasil dari tugas akhir ini, yaitu mengenai persamaan integral batas untuk media anisotropik tak homogen dalam keadaan tak tunak dan penerapannya pada beberapa kasus.

##### **BAB V PENUTUP**

Bab ini memuat tentang kesimpulan pada penelitian ini dan saran penulis untuk penelitian berikutnya.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Teorema Gauss-Green

Teorema Gauss-Green merupakan komponen penting yang menghubungkan integral dari turunan fungsi  $f(x_1, x_2)$  di dalam domain  $\Omega$  ke integral fungsi  $f$  di batas  $\Gamma$ . Untuk domain dua dimensi, Teorema Gauss-Green didasarkan pada persamaan berikut:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_1 ds \quad (2.1.1)$$

Ubah variabel  $x_1$  menjadi  $x_2$  menghasilkan

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_2 ds \quad (2.1.2)$$

dimana  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  merupakan vektor normal pada batas  $\Gamma$ . Jika terdapat fungsi lain, misalkan fungsi  $g(x_1, x_2)$ , dengan menggunakan persamaan (2.1.1) diperoleh:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (fg)}{\partial x_1} d\Omega = \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_1} d\Omega = \int_{\Gamma} fg n_1 ds$$

Sehingga didapatkan persamaan baru, yaitu:

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_1} d\Omega = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Gamma} fg n_1 ds \quad (2.1.3)$$

Persamaan (2.1.3) dikenal sebagai teorema Gauss-Green (Katsikadelis, 2002).

#### 2.2 Teorema Divergensi Gauss

Teorema divergensi Gauss diperoleh sebagai hasil dari dari aplikasi teorema Gauss-Green. Misalkan medan vektor  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$ . Menggunakan persamaan (2.1.1) untuk  $f = u_1$  dan persamaan (2.1.2) untuk  $f = u_2$  sehingga diperoleh:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (u_1 n_1 + u_2 n_2) ds \quad (2.2.1)$$

Menggunakan notasi vektor, persamaan (2.2.1) dapat ditulis menjadi:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.2.2)$$

dengan vektor  $\nabla$  didefinisikan sebagai

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Persamaan (2.2.2) menghubungkan divergensi total dengan fluks total pada suatu medan vektor, yang dinamakan dengan teorema divergensi Gauss (Katsikadelis, 2002).

### 2.3 Fungsi Dirac Delta

Dalam mekanika padat seringkali ditemukan beban terkonsentrasi yang terjadi pada wilayah (titik, ruang, atau waktu) yang sangat kecil. Misalkan fungsi  $f_k(x) = \frac{k}{\pi(1+k^2x^2)}$ . Untuk nilai  $k$  yang besar, fungsi tersebut akan memiliki nilai yang besar (terkonsentrasi) di sekitar  $x = 0$ . Fungsi delta atau Dirac delta didefinisikan sebagai

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad (2.3.1)$$

Fungsi delta dalam satu dimensi dinyatakan dalam persamaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)h(x)dx = h(x_0) \quad (2.3.2)$$

dimana  $h(x)$  merupakan fungsi kontinu pada interval berhingga yang memuat titik  $x_0$  sebagai sumbernya, serta bernilai nol di luar interval tersebut. Selain itu, fungsi delta juga dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (2.3.4)$$

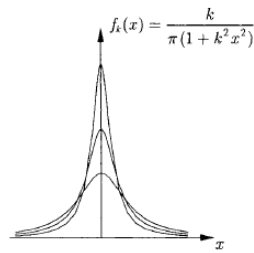
Untuk dua dimensi, Fungsi delta menjadi

$$\int_{\Omega} \delta(Q - Q_0)h(Q)d\Omega = h(Q_0) \quad (2.3.5)$$

dengan  $h(Q(x, y))$  sebarang fungsi yang kontinu di domain  $\Omega$  yang memuat  $Q_0(x_0, y_0)$ , serta

$$\delta(Q - Q_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(r) \quad (2.3.6)$$

dimana  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  dan  $f_k(r) = \frac{k}{\pi(1+k^2r^2)}$  (Katsikadelis, 2002).



Gambar 2.3.1 Interpretasi fungsi  $f_k(x) = \frac{k}{\pi(1+k^2x^2)}$

#### 2.4 Media Tak Homogen Anisotropik

Konduktivitas panas pada suatu media dapat didefinisikan dalam bentuk matriks. Matriks tersebut dimisalkan berupa matriks  $\mathbf{D}$ , dimana

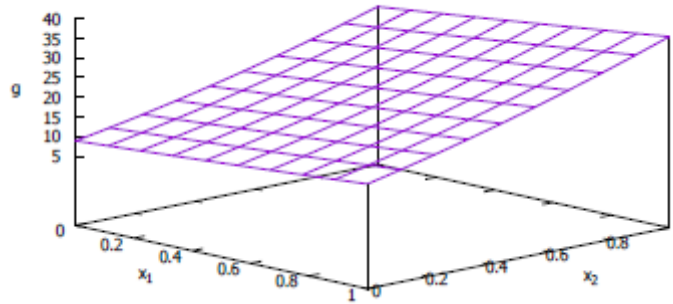
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

memuat informasi tentang perpindahan panas di segala arah. Determinan matriks  $\mathbf{D}$ , yaitu  $|\mathbf{D}|$  memenuhi  $|\mathbf{D}| = \lambda_{11}\lambda_{22} - (\lambda_{12})^2 > 0$ . Untuk penyederhanaan masalah, matriks  $\mathbf{D}$  diasumsikan simetri, yaitu  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ . Perbedaan antara media anisotropik dengan media isotropik ialah untuk media isotropik berlaku  $\lambda_{11} = \lambda_{22}$  dan  $\lambda_{12} = 0$ , sedangkan untuk media anisotropik berlaku sebaliknya, yaitu  $\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$  atau  $\lambda_{12} \neq 0$  (Katsikadelis, 2002).

Media tak homogen merupakan media yang memiliki karakteristik yang tidak sama untuk titik yang berbeda pada sistem. Pada media tertentu, khususnya sistem yang dibuat oleh manusia, terkadang ditemui sifat tak homogen dengan perubahan karakteristik berupa fungsi tertentu. Hal ini dimaksudkan dengan tujuan untuk meningkatkan kinerja sistem tersebut pada aspek tertentu. Oleh karena itu, pada media tak homogen anisotropik, konduktivitas panasnya dapat berupa

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}g(x) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{11} & \bar{\lambda}_{12} \\ \bar{\lambda}_{21} & \bar{\lambda}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

dengan  $g(x)$  merupakan fungsi kontinu pada sistem. Untuk media homogen, fungsi  $g(x)$  bernilai konstan, yaitu tidak bergantung pada nilai  $x$  (Azis, 2019).



Gambar 2.4.1 Media tak homogen dengan  $g(x) = (3 + 0,75 x_1 + 2,25 x_2)^2$

### 2.5 Persamaan Laplace pada Keadaan Tak Tunak

Persamaan Laplace merupakan persamaan pengatur yang digunakan untuk masalah konduksi panas. Persamaan ini merupakan persamaan eliptik dua dimensi, yaitu:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \beta u = 0 \quad (2.5.1)$$

dengan  $u$  merupakan fungsi yang akan dicari,  $x_1$  dan  $x_2$  merupakan komponen koordinat titik, matriks  $[\lambda_{ij}]$  ialah konstanta matriks koefisien, serta konstanta riil  $\beta$ . Persamaan Laplace dapat ditemukan dengan menentukan nilai  $\beta = 0$ , sehingga diperoleh persamaan baru berikut (Azis, 2019).

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.5.2)$$

Untuk keadaan tak tunak yang bergantung terhadap waktu, persamaan Laplace akan berupa

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.5.3)$$

dengan  $\alpha$  merupakan konstanta panas jenis. Perhatikan bahwa persamaan tersebut berlaku pada media homogen, yaitu  $[\lambda_{ij}]$  bernilai konstan. Sedangkan pada media tak homogen, persamaan yang digunakan ialah sebagai berikut (Azis, 2021).

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \bar{\lambda}_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \bar{\lambda}_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \bar{\lambda}_{12} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \bar{\lambda}_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] = \bar{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.5.4)$$

## 2.6 Metode Elemen Batas

Metode Elemen Batas merupakan metode pendekatan/numerik untuk permasalahan nilai batas, sehingga dalam penyelesaiannya memiliki beberapa tahapan terlebih dahulu yang nantinya akan menghasilkan solusi numerik. Oleh karena itu, pada bagian ini akan dipaparkan tentang langkah-langkah dalam pengaplikasian Metode Elemen Batas.

### 1. Persamaan Integral Batas

Langkah pertama untuk menggunakan MEB ialah mengubah persamaan pengaturnya yang berupa persamaan differensial ke bentuk persamaan integral batas. Misalkan persamaan (2.5.2) digunakan sebagai persamaan pengatur dengan menganggap  $g(x) = 1$ , serta terdapat fungsi  $\Phi(x, y)$ , sehingga jika kedua ruas dikalikan dengan  $\Phi$  kemudian diintegrasikan, maka diperoleh

$$\int_{\Omega} L(u)\Phi d\Omega = 0 \quad (2.6.1)$$

dengan  $L(u) = \lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  dan kondisi batas

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad di \Gamma_1 \\ \nabla u \cdot \mathbf{m} &= \bar{q}_n \quad di \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

dimana  $\mathbf{m} = (\lambda_{11} n_1 + \lambda_{12} n_2)\mathbf{i} + (\lambda_{12} n_1 + \lambda_{22} n_2)\mathbf{j}$ . Menggunakan persamaan (2.1.3) pada persamaan integral (2.6.1), maka ( $i = 1, 2$  dan  $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(u)\Phi d\Omega &= - \int_{\Omega} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \Phi ds = 0 \\ \int_{\Omega} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d\Omega &= - \int_{\Omega} \lambda_{ij} u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda_{ij} u \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_i ds \\ \rightarrow \int_{\Omega} uL(\Phi) d\Omega &= \int_{\Gamma} (u\nabla\Phi \cdot \mathbf{m} - \Phi\nabla u \cdot \mathbf{m}) ds \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Ambil fungsi  $\Phi$  yang memenuhi

$$L(\Phi) = \delta(Q - P) \quad (2.6.4)$$

dengan  $Q$  dan  $P(\xi, \eta)$  merupakan titik di domain  $\Omega$  atau batas  $\Gamma$ . Berdasarkan sifat fungsi delta, dari persamaan (2.3.5) dan (2.6.4) diperoleh persamaan integral batas berikut (Azis, 2019).

$$\zeta(P)u(P) = \int_{\Gamma} (u\nabla\Phi \cdot \mathbf{m} - \Phi\nabla u \cdot \mathbf{m})ds \quad (2.6.5)$$

Dimana

$$\zeta(P) = \begin{cases} 0, & P \notin \Omega \\ \frac{1}{2}, & P \in \Gamma \\ 1, & P \in \Omega \setminus \Gamma \end{cases} \quad (2.6.6)$$

## 2. Solusi Fundamental

Solusi fundamental dari fungsi  $\Phi$  dan  $\nabla\Phi \cdot \mathbf{m}$  dengan menggunakan persamaan Laplace pada media anisotropik homogen tunak, sehingga nilai  $\beta = 0$  serta  $g(x)$  konstan dipaparkan oleh Katsikadelis sebagai berikut (Katsikadelis, 2002).

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{D}|}} \ln r \quad (2.6.7)$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{D}|}} \frac{\nabla r \cdot \mathbf{m}}{r} \quad (2.6.8)$$

dimana

$$|\mathbf{D}| = \lambda_{11}\lambda_{22} - (\lambda_{12})^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\lambda_{22}(\xi - x_1)^2 - 2\lambda_{12}(\xi - x_1)(\eta - x_2) + \lambda_{11}(\eta - x_2)^2}{|\mathbf{D}|}}$$

$$\nabla r \cdot \mathbf{m} = \frac{\partial r}{\partial x_1} m_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} m_2$$

$$m_1 = \lambda_{11} n_1 + \lambda_{12} n_2$$

$$m_2 = \lambda_{12} n_1 + \lambda_{22} n_2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \left( -\lambda_{22} \frac{\xi - x_1}{r} + \lambda_{12} \frac{\eta - x_2}{r} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \left( \lambda_{12} \frac{\xi - x_1}{r} - \lambda_{11} \frac{\eta - x_2}{r} \right)$$

Kemudian Azis juga memaparkan solusi fundamental fungsi  $\Phi$  dan  $\nabla\Phi \cdot \mathbf{m}$  menggunakan persamaan Laplace pada media anisotropik homogen tunak sebagai berikut (Azis, 2017).

$$\Phi = \frac{\ddot{t}}{\pi(\lambda_{11} + 2\lambda_{12}\dot{t} + \lambda_{22}(\dot{t}^2 + \ddot{t}^2))} \ln R \quad (2.6.9)$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{m} = \frac{\ddot{t}}{\pi(\lambda_{11} + 2\lambda_{12}\dot{t} + \lambda_{22}(\dot{t}^2 + \ddot{t}^2))} \frac{\nabla R \cdot \mathbf{m}}{R} \quad (2.6.10)$$

Dimana  $\tau$  merupakan akar-akar dari  $\lambda_{11} + 2\lambda_{12}\tau + \lambda_{22}\tau^2 = 0$  serta

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi + \dot{t}(x_2 - \eta))^2 + (\ddot{t}(x_2 - \eta))^2}$$

$$\nabla R \cdot \mathbf{m} = \frac{\partial R}{\partial x_1} m_1 + \frac{\partial R}{\partial x_2} m_2$$

$$m_1 = \lambda_{11} n_1 + \lambda_{12} n_2$$

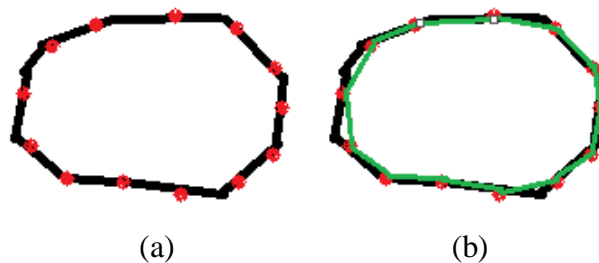
$$m_2 = \lambda_{12} n_1 + \lambda_{22} n_2$$

$$\tau = \dot{t} + i\ddot{t}$$

### 3. Diskritisasi

Pada tahap ini, batas  $\Gamma$  didiskritisasi menjadi beberapa bagian sehingga diperoleh persamaan integral pada setiap batas tersebut, dimana akan diperoleh jumlahan dari integral bagian-bagian batas sebagai solusi pendekatan dari solusi analitik. Beberapa hal yang diperhatikan dalam diskritisasi ini ialah penghitungan nilai  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  serta evaluasi integral pada tiap bagiannya. Setelah mendapatkan nilai-nilai tersebut pada tiap bagiannya, diperlukan penyelesaian SPAL untuk mendapatkan nilai  $u$  di  $\Gamma_2$  dan nilai  $\nabla u \cdot \mathbf{m}$  di  $\Gamma_1$  (Azis, 2019).

Perhatikan gambar 2.3.1. Gambar a merupakan tahap awal mendiskritisasi batas  $\Gamma$ , yaitu pemberian titik-titik pada batas  $\Gamma$ . Kemudian pada gambar b, setiap titik dihubungkan sehingga terbentuk bagian-bagian batas, dimana pada setiap bagian tersebut akan dilakukan evaluasi untuk mendapatkan solusi dari masalah nilai batas.



Gambar 2.6.1 Diskritisasi pada batas  $\Gamma$



## 4. Solusi

Setelah nilai  $u$  dan  $\nabla u \cdot \mathbf{n}$  diperoleh pada kedua batas  $\Gamma_1$  dan  $\Gamma_2$ , maka dapat ditentukan solusi  $u$  pada seluruh titik dalam domain  $\Omega$ .

Berikut diberikan contoh masalah nilai batas pada media homogen isotropik dengan menggunakan MEB

Contoh

Diberikan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.6.11)$$

dimana  $0 \leq x_1 \leq 1$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$  dengan nilai batas

$$u(x_1, 0) = 0 \quad u(x_1, 1) = 60$$

untuk  $x_1 = 0$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ ,  $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$

untuk  $x_1 = 1$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ ,  $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$

Penyelesaian:

## 1. Persamaan Integral Batas

Dengan mengalikan persamaan (2.6.11) dengan fungsi  $\Phi$  kemudian diintegrasikan diperoleh

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \Phi \, ds = 0 \quad (2.6.12)$$

Menggunakan persamaan (2.1.3) pada persamaan (2.6.12) diperoleh ( $i = 1, 2$  dan  $j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \Phi \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \Phi \, ds = 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \, d\Omega &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \, d\Omega + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_i \, ds \\ \rightarrow \int_{\Omega} u \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) \, d\Omega &= \int_{\Gamma} [u(\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}) - \Phi(\nabla u \cdot \mathbf{n})] \, ds \quad (2.6.13) \end{aligned}$$

Karena penyelesaian akan menggunakan nilai batas yang diberikan, maka menurut persamaan (2.6.6), persamaan (2.6.13) menjadi

$$\frac{1}{2} u(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} [u(\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}) - \Phi(\nabla u \cdot \mathbf{n})] \, ds \quad (2.6.14)$$

2. Solusi Fundamental

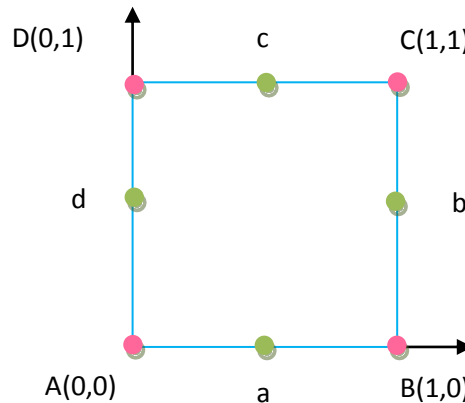
Solusi Fundamental yang akan digunakan serupa dengan persamaan (2.6.7) dan (2.6.8) dengan penyesuaian nilai pada konduktivitas panas media isotropik, yaitu  $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1$  dan  $\lambda_{12} = 0$ .

3. Diskritisasi

Pada bagian diskritisasi, daerah batas akan dibagi menjadi beberapa bagian. Misalkan daerah batas dibagi menjadi 4 bagian dengan 4 titik yang membagi batas tersebut ialah (0,0), (1,0), (1,1), dan (0,1). Karena terdapat 4 bagian, maka setiap bagian tersebut juga akan menghasilkan 4 persamaan, dimana persamaan (2.6.14) diubah menjadi

$$\frac{1}{2}u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma} [u_i(\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i - \Phi_i(\nabla u \cdot \mathbf{n})_i] ds \quad (2.6.15)$$

Penyelesaian integral batas pada persamaan (2.6.15) dapat dilakukan secara analitik maupun numerik, namun dalam contoh ini akan dilakukan secara analitik



Gambar 2.6.2 Diskritisasi pada contoh kasus

Keterangan

- Titik diskritisasi
- Titik tengah dari 2 titik diskritisasi
- Garis pengintegralan

- Bagian  $i = 1$  (untuk (0,0) ke (1,0) maka  $0 \leq x_1 \leq 1$  dan  $x_2 = 0$ ) diketahui  $u_1 = u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0$ .

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2) = \frac{(x_2^2 - x_2^1, x_1^1 - x_1^2)}{\sqrt{(x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_1^1 - x_1^2)^2}}$$

$$= (0 - 0, 0 - 1) / \sqrt{0 + 1} = (0, -1)$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{D}|}} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta)^2}\end{aligned}$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} \frac{1}{2} \frac{-2(\eta - x_2)}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} n_2$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\eta - x_2}{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2} (-1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\eta}{(\xi - x_1)^2 + \eta^2}$$

a) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = (\frac{1}{2}, 0)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{0}{(\frac{1}{2} - x_1)^2 + 0^2} dx_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + 0^2} dx_1 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1}{2} - x_1 \right| dx_1 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{2} - x_1 \right) dx_1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2\pi} \ln \left( x_1 - \frac{1}{2} \right) dx_1\end{aligned}$$

Misalkan  $a = \frac{1}{2} - x_1$  maka  $da = -dx_1$  serta misalkan  $b = x_1 - \frac{1}{2}$  maka  $db = dx_1$  sehingga

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \Phi_1 ds &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\frac{1}{2}}^0 -\ln a da + \int_0^{\frac{1}{2}} \ln b db \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} \ln a da + \int_0^{\frac{1}{2}} \ln b db \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ a \ln a \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} da + b \ln b \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} db \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \right) - a \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \right) - b \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \right] \\
&\cong -\frac{1}{2\pi} (1,6931472)
\end{aligned}$$

b) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{2}}{(1-x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx_1 \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1-x_1)^2 + \frac{1}{4}} dx_1
\end{aligned}$$

Misalkan  $a = 1 - x_1$ , maka  $da = -dx_1$ , sehingga

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 ds = -\frac{1}{4\pi} \int_1^0 \frac{1}{a^2 + \frac{1}{4}} da = -\frac{1}{4\pi} \int_1^0 \frac{4}{4a^2 + 1} da$$

Misalkan  $b = 2a$ , maka  $db = 2 da$ , yang menghasilkan

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_2^0 \frac{1}{b^2 + 1} db = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{b^2 + 1} db \\
&= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(b) \Big|_0^2 = \frac{1}{2\pi} (\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(0)) \\
&\cong \frac{1}{2\pi} (1,1071487)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(1-x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx_1$$

Misalkan  $c = 1 - x_1$ , maka  $dc = -dx_1$ , sehingga dengan menggunakan integral parsial akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \Phi_1 ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \ln \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}} dc = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^1 \ln \left( c^2 + \frac{1}{4} \right) dc \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ c \ln \left( c^2 + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{8c^2}{4c^2 + 1} dc \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{5}{4} \right) - 8 \int_0^1 \frac{c^2}{4c^2 + 1} dc \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{5}{4} \right) - 8 \int_0^1 \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4c^2 + 1)} dc \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 2 \int_0^1 dc + 2 \int_0^1 \frac{1}{(4c^2 + 1)} dc \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 2c \Big|_0^1 + \tan^{-1}(e) \Big|_0^2 \right] \quad * e = 2c \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 2 + \tan^{-1}(2) \right] \cong -\frac{1}{2\pi} (0,3348539)
 \end{aligned}$$

c) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla v \cdot \mathbf{n})_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + 1^2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + 1} dx_1
 \end{aligned}$$

Misalkan  $a = \frac{1}{2} - x_1$ , maka  $da = -dx_1$ , sehingga

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{a^2 + 1} da = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a^2 + 1} da \\
 &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(a) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\
 &\cong \frac{1}{2\pi} (0,9272952)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + 1^2} dx_1$$

Misalkan  $b = \frac{1}{2} - x_1$ , maka  $db = -dx_1$ , sehingga dengan menggunakan integral parsial akan diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \Phi_1 ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \ln \sqrt{b^2 + 1} db = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(b^2 + 1) db \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ b \ln(b^2 + 1) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2b^2}{b^2 + 1} db \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{5}{4} - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{b^2 + 1} db \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{5}{4} - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{b^2 + 1} \right) db \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{5}{4} - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} db + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(b^2 + 1)} db \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{5}{4} - 2b \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2 \tan^{-1}(b) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{5}{4} - 2 + 2 \left( \tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) - \tan^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) \right) \right] \\
 &\cong \frac{1}{2\pi} (0,0388670)
 \end{aligned}$$

d) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{2}}{(0 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{(x_1)^2 + \frac{1}{4}} dx_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{4}{4(x_1)^2 + 1} dx_1 \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{4(x_1)^2 + 1} dx_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(a) \Big|_0^2 \quad * a = 2x_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(2) \cong \frac{1}{2\pi} (1,1071487)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(0 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{(x_1)^2 + \frac{1}{4}} dx_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \ln \left( (x_1)^2 + \frac{1}{4} \right) dx_1
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral parsial akan diperoleh

$$\int_{\Gamma} \Phi_1 ds = \frac{1}{4\pi} \left[ x_1 \ln \left( (x_1)^2 + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{8(x_1)^2}{4(x_1)^2 + 1} dx_1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 8 \int_0^1 \frac{(x_1)^2}{4(x_1)^2 + 1} dx_1 \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 8 \int_0^1 \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4(x_1)^2 + 1)} dx_1 \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 2 \int_0^1 dx_1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{(4c^2 + 1)} dx_1 \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 2x_1 \Big|_0^1 + \tan^{-1}(a) \Big|_0^1 \right] \quad * a = 2x_1 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 2 + \tan^{-1}(2) \right] \cong -\frac{1}{2\pi} (0,3348539)
 \end{aligned}$$

- Bagian  $i = 2$  (untuk  $(1,0)$  ke  $(1,1)$  maka  $x_1 = 1$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ ) diketahui  $(\nabla u \cdot \mathbf{m})_2 = (\nabla u \cdot \mathbf{m}) \left(1, \frac{1}{2}\right) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} = (n_1, n_2) &= \frac{(x_2^2 - x_2^1, x_1^1 - x_1^2)}{\sqrt{(x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_1^1 - x_1^2)^2}} \\
 &= \frac{(1 - 0, 1 - 1)}{\sqrt{1 + 0}} = (1, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|D|}} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - 1)^2 + (\eta - x_2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} \frac{1}{2} \frac{-2(\xi - x_1)}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} n_{x_1}$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\xi - x_1}{(\xi - 1)^2 + (\eta - x_2)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \xi}{(\xi - 1)^2 + (\eta - x_2)^2}$$

- a) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ . Proses pengintegralan serupa dengan Bagian  $i = 1$  d).

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - x_2)^2} dx_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + (x_2)^2} dx_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{4} + (x_2)^2} dx_2
 \end{aligned}$$

$$\cong \frac{1}{2\pi} (1,1071487)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - x_2)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{4} + (x_2)^2\right) dx_2 \cong -\frac{1}{2\pi} (0,3348539) \end{aligned}$$

b) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ . Proses pengintegralan serupa dengan Bagian i= 1 a).

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 1}{(1 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{0}{0^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \left|\frac{1}{2} - x_2\right| dx_2 \\ &\cong -\frac{1}{2\pi} (1,6931472) \end{aligned}$$

c) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . Proses pengintegralan serupa dengan Bagian i= 1 b).

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (1 - x_2)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + (1 - x_2)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{4} + (1 - x_2)^2} dx_2 \\ &\cong \frac{1}{2\pi} (1,1071487) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (1 - x_2)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - x_2)^2} dx_2 \cong -\frac{1}{2\pi} (0,3348539)\end{aligned}$$

d) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Proses pengintegralan serupa dengan Bagian i= 1 c).

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 0}{(0 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \cong \frac{1}{2\pi} (0,9272952)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(0 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \cong \frac{1}{2\pi} (0,0388670)\end{aligned}$$

- Bagian  $i = 3$  (untuk (1,1) ke (0,1) maka  $0 \leq x_1 \leq 1$  dan  $x_2 = 1$ ) diketahui  $u_3 = u\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 60$ . Gunakan cara yang sama dengan Bagian  $i = 1$  dan Bagian  $i = 2$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = (n_1, n_2) &= \frac{(x_2^2 - x_2^1, x_1^1 - x_1^2)}{\sqrt{(x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_1^1 - x_1^2)^2}} \\ &= \frac{(1 - 1, 1 - 0)}{\sqrt{1 + 0}} = (0, 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{D}|}} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - 1)^2}\end{aligned}$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} \frac{1}{2} \frac{-2(\eta - x_2)}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} n_2$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \eta}{(\xi - x_1)^2 + (\eta - 1)^2}$$

a) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_3 dx_1 \cong \frac{1}{2\pi}(0,9272952)$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 v_3 dx_1 \cong \frac{1}{2\pi}(0,0388670)$$

b) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = (1, \frac{1}{2})$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_3 dx_1 \cong \frac{1}{2\pi}(1,1071487)$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_3 dx_1 \cong -\frac{1}{2\pi}(0,3348539)$$

c) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = (\frac{1}{2}, 1)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_3 dx_1 = 0$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_3 dx_1 \cong -\frac{1}{2\pi}(1,6931472)$$

d) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = (0, \frac{1}{2})$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_3 dx_1 \cong \frac{1}{2\pi}(1,1071487)$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_3 dx_1 \cong -\frac{1}{2\pi}(0,3348539)$$

- Bagian  $k = 4$  (untuk  $(0,1)$  ke  $(0,0)$  maka  $x_1 = 0$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ ) diketahui  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})_4 = (\nabla u \cdot \mathbf{n}) (0, \frac{1}{2}) = 0$ . Gunakan cara yang sama dengan Bagian  $i = 1$  dan Bagian  $i = 2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = (n_1, n_2) &= \frac{(x_2^2 - x_2^1, x_1^1 - x_1^2)}{\sqrt{(x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_1^1 - x_1^2)^2}} \\ &= \frac{(0 - 1, 0 - 0)}{\sqrt{1 + 0}} = (-1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{D}|}} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + (\eta - x_2)^2} \end{aligned}$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} \frac{1}{2} \frac{-2(\xi - x_1)}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} n_1$$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{\xi^2 + (\eta - x_2)^2}$$

a) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_4 dx_2 \cong \frac{1}{2\pi}(1,1071487)$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_4 dx_2 \cong -\frac{1}{2\pi}(0,3348539)$$

b) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_4 dx_2 \cong \frac{1}{2\pi}(0,9272952)$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_4 dx_2 \cong \frac{1}{2\pi}(0,0388670)$$

c) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_4 dx_2 \cong \frac{1}{2\pi}(1,1071487)$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_4 dx_2 \cong -\frac{1}{2\pi}(0,3348539)$$

d) Untuk titik tengah  $(\xi, \eta) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_3 dx_1 = 0$$

$$\int_{\Gamma} \Phi_i ds = \int_0^1 \Phi_3 dx_1 \cong -\frac{1}{2\pi}(1,6931472)$$

Karena nilai integral telah diketahui untuk setiap bagian, maka dengan menggunakan persamaan (2.6.15) diperoleh persamaan yang dinyatakan dalam matriks:

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma} [u_i (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i] ds - \frac{1}{2} u(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma} [\Phi_i (\nabla u \cdot \mathbf{n})_i] ds$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -\pi & 1,1071487 & 0,9272952 & 1,1071487 \\ 1,1071487 & -\pi & 1,1071487 & 0,9272952 \\ 0,9272952 & 1,1071487 & -\pi & 1,1071487 \\ 1,1071487 & 0,9272952 & 1,1071487 & -\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 60 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -1,6931472 & -0,3348539 & 0,0388670 & -0,3348539 \\ -0,3348539 & -1,6931472 & -0,3348539 & 0,0388670 \\ 0,0388670 & -0,3348539 & -1,6931472 & -0,3348539 \\ -0,3348539 & 0,0388670 & -0,3348539 & -1,6931472 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nabla u \cdot \mathbf{n})_1 \\ 0 \\ (\nabla u \cdot \mathbf{n})_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sesuaikan posisi untuk nilai yang telah diketahui dan yang belum diketahui, sehingga diperoleh matriks baru berikut:

$$\begin{pmatrix} 1,6931472 & 1,1071487 & -0,0388670 & 1,1071487 \\ 0,3348539 & -\pi & 0,3348539 & 0,9272952 \\ -0,0388670 & 1,1071487 & 1,6931472 & 1,1071487 \\ 0,3348539 & 0,9272952 & 0,3348539 & -\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nabla u \cdot \mathbf{n})_1 \\ u_2 \\ (\nabla u \cdot \mathbf{n})_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \pi & -0,3348539 & -0,9272952 & -0,3348539 \\ -1,1071487 & -1,6931472 & -1,1071487 & 0,0388670 \\ -0,9272952 & -0,3348539 & \pi & -0,3348539 \\ -1,1071487 & 0,0388670 & -1,1071487 & -1,6931472 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -55,637712 \\ -66,428922 \\ 60\pi \\ -66,428922 \end{pmatrix}$$

Dengan menyelesaikan Sistem Persamaan Aljabar Linier di atas, maka diperoleh hasil

$$\begin{pmatrix} (\nabla u \cdot \mathbf{n})_1 \\ u_2 \\ (\nabla u \cdot \mathbf{n})_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70,4767 \\ 30 \\ 70,4767 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Sebagai pembanding bahwa solusi analitik dari masalah tersebut ialah  $u(x_1, x_2) = 60 x_2$ , sehingga untuk nilai analitiknya ialah

$$\begin{pmatrix} (\nabla u \cdot \mathbf{n})_1 \\ u_2 \\ (\nabla u \cdot \mathbf{n})_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \\ u \left( 1, \frac{1}{2} \right) \\ (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \\ u \left( 0, \frac{1}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 30 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

#### 4. Solusi

Karena nilai  $u$  dan  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})$  telah diperoleh untuk setiap batasnya, maka solusi dari masalah nilai batas tersebut telah dapat ditentukan untuk semua titik. Misalkan akan dicari nilai  $u \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ , maka

- Untuk  $i = 1$  (untuk  $(0,0)$  ke  $(1,0)$  maka  $0 \leq x_1 \leq 1$  dan  $x_2 = 0$ )

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx_1 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \frac{1}{4}} dx_1\end{aligned}$$

Misalkan  $a = \frac{1}{2} - x_1$  maka  $da = -dx_1$

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 ds = -\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{a^2 + \frac{1}{4}} da = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4a^2 + 1} da$$

Misalkan  $b = 2a$ , maka  $db = 2 da$

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_1 ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{b^2 + 1} db = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(b) \Big|_{-1}^1 \cong \frac{1}{2\pi} (1.5707963)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_1 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \frac{1}{4}} dx_1 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \ln \left( \left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \frac{1}{4} \right) dx_1\end{aligned}$$

Misalkan  $a = \frac{1}{2} - x_1$  maka  $da = -dx_1$ . Menggunakan integral parsial diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \Phi_1 ds &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \ln \left( a^2 + \frac{1}{4} \right) da = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( a^2 + \frac{1}{4} \right) da \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ a \ln \left( a^2 + \frac{1}{4} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{8a^2}{4a^2 + 1} da \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \right) - 8 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{a^2}{4a^2 + 1} da \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \right) - 8 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4a^2 + 1)} da \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} da + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4a^2 + 1)} da \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2x_1 \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \tan^{-1}(b) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] \quad * b = 2a \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 + 2 \tan^{-1}(1) \right] \cong -\frac{1}{2\pi} (0,5611754)
 \end{aligned}$$

- Untuk  $i = 2$  (untuk (1,0) ke (1,1) maka  $x_1 = 1$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ )

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \cong \frac{1}{2\pi} (1,5707963)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_2 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2 \right) dx_2 \cong -\frac{1}{2\pi} (0,5611754)
 \end{aligned}$$

- Bagian  $i = 3$  (untuk (1,1) ke (0,1) maka  $0 \leq x_1 \leq 1$  dan  $x_2 = 1$ )

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds &= \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_3 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2} dx_1 \cong \frac{1}{2\pi} (1,5707963)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_3 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x_1\right)^2 \right) dx_1 \cong -\frac{1}{2\pi} (0,5611754)
 \end{aligned}$$

- Untuk  $i = 4$  (untuk (0,1) ke (0,0) maka  $x_1 = 0$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ )

$$\int_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_i ds = \int_0^1 (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n})_4 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \cong \frac{1}{2\pi} (1.5707963) \\
 \int_{\Gamma} \Phi_i ds &= \int_0^1 \Phi_4 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2} dx_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x_2\right)^2\right) dx_2 \cong -\frac{1}{2\pi} (0,5611754)
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh solusi untuk  $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  yaitu

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) &= \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma} [u_k (\nabla \Phi \cdot \mathbf{n})_k - \Phi_k (\nabla u \cdot \mathbf{n})_k] ds \\
 u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \begin{matrix} (0 & 30 & 60 & 30) \\ (0,5611754 & 0,5611754 & 0,5611754 & 0,5611754) \end{matrix} \begin{pmatrix} (1.5707963) \\ (1.5707963) \\ (1.5707963) \\ (1.5707963) \end{pmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. \begin{pmatrix} -70,4767 \\ 0 \\ 70,4767 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} (188,495556) \cong 29,9999995
 \end{aligned}$$

## 2.7 Transformasi Laplace

Transformasi integral merupakan salah satu sarana yang sangat berguna untuk menyelesaikan persamaan differensial linier. Transformasi integral dinyatakan dalam bentuk

$$F(s) = \int_a^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

dimana  $K(s, t)$  fungsi yang diberikan, yang dinamakan kernel dari transformasi. Nilai  $a$  dan  $\beta$  juga diberikan, dimana nilainya dimungkinkan juga  $a = -\infty$  atau  $\beta = \infty$ . Selain itu, fungsi  $F$  disebut transformasi dari fungsi  $f$ . Transformasi Laplace dari  $f$ , yaitu  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  diperoleh dengan menggunakan fungsi kernel  $K(s, t) = e^{-st}$ , serta menggunakan nilai  $a = 0$  dan  $\beta = \infty$  sehingga diperoleh persamaan:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2.7.1}$$

Beberapa transformasi Laplace dari fungsi  $f$  dapat dilihat dalam Tabel 2.7.1 (Boyce & DiPrima, 2012).

**Tabel 2.7.1 Transformasi Laplace fungsi  $f$  dengan konstanta  $a$ ,  $b$ , dan  $c$**

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
$\delta(t-c)$	$e^{-cs}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

## 2.8 Invers Transformasi Laplace Secara Numerik

Invers transformasi Laplace didefinisikan sebagai integral contour Bromwich berikut

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds \tag{2.8.1}$$

Persamaan (2.8.1) merupakan persamaan integral dengan fungsi  $f(t)$  tidak diketahui dengan diberikan fungsi  $F(s)$ . Terdapat banyak metode numerik untuk menghasilkan solusi dari persamaan (2.8.1). Beberapa di antaranya ialah



metode deret Fourier, Talbot, Schapery, dan Gaver-Stehfest. Dalam penelitian ini akan digunakan metode Gaver-Stehfest.

Rumus Post-Widder merupakan pendekatan untuk persamaan (2.8.1) yang hanya memerlukan  $F(s)$  dengan  $s$  bernilai riil untuk merepresentasikan persamaan (2.7.1) sebagai ekspansi asimtotik deret Taylor. Meskipun rumus tersebut sulit untuk digunakan sebagai komputasi numerik, namun Stehfest mengajukan versi diskrit dari rumus Post-Widder menggunakan turunan berhingga dan jumlahan Salzer.

$$f(t, N) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{k=1}^N V_k F\left(k \frac{\ln 2}{t}\right) \quad (2.8.2)$$

Dimana koefisien  $V_k$  hanya bergantung pada bilangan ekspansi  $N$  (yang bernilai genap).

$$V_k = (-1)^{k+N/2} \sum_{j=\lfloor (k+1)/2 \rfloor}^{\min\{k, N/2\}} \frac{j^{N/2} (2j)!}{\left(\frac{N}{2} - j\right)! j! (j-1)! (k-j)! (2j-k)!}$$

Dari rumusnya terlihat bahwa  $s$  secara eksplisit merupakan fungsi dari  $t$ . Salah satu alasan metode ini dipilih untuk digunakan pada penelitian ini ialah karena implementasinya yang lebih mudah dibandingkan dengan metode lainnya seperti deret Fourier dan Schapery. Selain itu batasan penggunaan pada metode Gaver-Stehfest ialah  $f(t)$  merupakan fungsi yang kontinu dan bukan merupakan fungsi yang berosilasi (Kuhlman, 2013).