VARIASI PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

SKRIPSI

DARA DARUL NURUL HAYYU

H011191008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JULI 2023

VARIASI PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

DARA DARUL NURUL HAYYU

H011191008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JULI 2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	: Dara Darul Nurul Hayyu
Nim	: H011191008
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

dengan ini menyatakan bahwa skripsi yang berjudul

Variasi Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier

adalah karya ilmiah saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya di dalam naskah skripsi ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi, dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 07 Juli 2023

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL A7EAKX517362850

Dara Darul Nurul Hayyu

Nim.H011191008

LEMBAR PENGESAHAN

VARIASI PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI FOURIER

Disusun dan diajukan oleh:

DARA DARUL NURUL HAYYU

H011191008

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal, 07 Juli 2023

Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
NIP.19701231 199802 1 001	**NIP.19711003 199702 2 001**

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP.19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas berkat, rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis diberikan kesehatan, kesempatan dan pengetahuan dalam menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "**Variasi Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier"**, sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar **Sarjana Sains (S.Si)** pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahun Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini, penulis memperoleh dukungan, bantuan, bimbingan, dan doa dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, perkenankan penulis memberikan penghargaan dan menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta, Bapak **Darul** dan Ibu **Rahmatia Muhammad** yang telah sabar dalam membesarkan dan mendidik penulis, membantu dan memberikan dukungan baik moral, spiritual, dan material serta doa yang tiada hentinya kepada penulis. Dan juga kepada kedua adik terbaik, **Dwi Darul Nurul Annisa** dan **Tri Darul Nurul Pratiwi**, serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan rasa hormat dan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta Bapak dan Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama menuntut ilmu di Program Studi Matematika serta staf Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
3. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.** dan Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.** selaku dosen pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan banyak waktu di tengah kesibukan dan prioritasnya untuk

mengarahkan, membimbing dan memotivasi penulis dalam penulisan skripsi ini.

4. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.** selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan koreksi dan saran yang membantu dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. **Ibu Sri, Ibu Wahyuni, Kak Nas, Kak Ajeng, Kak Sirah, Kak Fitri, Kak Hilmah, Kak Afdhal** dan **Kak Topan** yang telah memberikan pengetahuan, dukungan dan membersamai selama penyusunan skripsi ini.
6. Sahabat penulis, **Esse, Qalbi, Pio, Azizah, Dilong, Mufidah, Nisa, Irfa, Nanda, Inayah, Ichsan** dan **Zidan** yang telah membantu, memberikan dukungan dan membersamai penulis selama perkuliahan dan dalam proses penyusunan skripsi.
7. Teman-teman **Matematika 2019, POL19ON 2019** dan **Borimasunggu Crew** yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan moril kepada penulis, serta memberikan momen berharga bagi penulis selama perkuliahan.
8. Bapak **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.** dan teman-teman **PKM** atau penghuni **Lab Aljabar** yang telah memberikan pengetahuan, saran, kebaikan dan dukungan yang luar biasa serta momen ngambis bareng dan momen berharga lainnya bagi penulis.
9. **Na Jaemin** dan 7 member **NCT Dream**, **Stray Kids** dan **Treasure** selaku namjachinggu yang telah menemani dan menghibur penulis dengan karyanya sehingga penulis tetap happy kiyowo mengerjakan skripsi ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan doa, dukungan, motivasi dan inspirasi kepada penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapatkan balasan dari Allah SWT. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 07 Juli 2023

Dara Darul Nurul Hayyu

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dara Darul Nurul Hayyu
Nim	: H011191008
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya saya yang berjudul:

Variasi Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya,
Dibuat di Makassar pada, 07 Juli 2023

Yang menyatakan,

Dara Darul Nurul Hayyu

ABSTRAK

Prinsip ketidakpastian Heisenberg secara umum menjelaskan tentang ketidakpastian terhadap posisi dan momentum suatu partikel, sedangkan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada harmonik analisis menjelaskan fungsi dan transformasi Fouriernya tidak dapat terlokalisasi dengan baik secara bersamaan. Semakin besar suatu nilai fungsi, maka akan semakin kecil nilai transformasi Fouriernya, begitu pun sebaliknya. Tugas akhir ini bertujuan untuk membuktikan formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ dan ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $1 < p \leq 2$ dan p adalah bilangan riil. Prinsip ini dibuktikan dengan menggunakan teorema Plancherel, pertidaksamaan Cauchy-Schwarz, pertidaksamaan Hausdorff-Young, serta sifat bilangan kompleks dan transformasi Fourier. Melalui pembuktian tersebut, diperoleh batas bawah formulasi untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ adalah $\frac{\pi}{2}\|f\|_2^4$ dan batas bawah formulasi untuk ruang $L^p(\mathbb{R})$ adalah $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|f\|_2^2$. Khususnya untuk ruang $L^p(\mathbb{R})$, perubahan nilai p memberikan variasi formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier.

Kata kunci: Transformasi Fourier, Prinsip Ketidakpastian Heisenberg, Ruang Lebesgue.

ABSTRACT

The Heisenberg uncertainty principle, in general, explains the uncertainty in measuring the position and momentum of a particle, while the Heisenberg uncertainty principle in harmonic analysis states a function and its Fourier transform cannot both be sharply localized at the same time. The larger the value of a function, the smaller the value of its Fourier transform, and vice versa. This thesis aims to prove the formulation of the Heisenberg uncertainty principle in Fourier transform for $L^2(\mathbb{R})$ and $L^p(\mathbb{R})$ spaces with $1 < p \leq 2$, where p is a real number. This principle is proved using the Plancherel theorem, the Cauchy-Schwarz inequality, the Hausdorff-Young inequality, the properties of complex numbers, and the Fourier transform. Through the proof, the lower bound for the $L^2(\mathbb{R})$ space is obtained as $\frac{\pi}{2}\|f\|_2^4$ and the lower bound for the $L^p(\mathbb{R})$ space is obtained as $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|f\|_2^2$. Specifically for the $L^p(\mathbb{R})$ space, changing the value of p gives a variation in the formulation of the Heisenberg uncertainty principle in Fourier transform.

Keywords: Fourier transform, Heisenberg Uncertainty Principle, Lebesgue spaces.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu logika tentang bentuk, susunan, besaran dan konsep yang saling berkaitan dalam jumlah besar yang terbagi menjadi tiga bidang yaitu aljabar, analisis dan geometri. Analisis matematis merupakan cabang matematika yang meliputi teori turunan, integral, ukuran, limit, deret, dan analisis fungsional. Teori ini sering dipelajari dalam konteks bilangan riil dan bilangan kompleks, serta fungsi. Analisis ini dikembangkan dari kalkulus yang meliputi konsep dasar dan teknik analisis. Salah satu hal penting yang dipelajari dalam analisis matematis adalah transformasi Fourier.

Transformasi Fourier digunakan untuk memecahkan berbagai masalah, seperti mencari solusi Persamaan Diferensial Biasa dan Persamaan Diferensial Parsial, serta dalam analisis sinyal, seperti sinyal suara dan pemrosesan citra. Transformasi Fourier merupakan versi kontinu dari deret Fourier yang merupakan penguraian tak berhingga dari fungsi periodik dalam bentuk deret sinus dan cosinus.

Transformasi Fourier pertama kali ditemukan oleh seorang matematikawan dan fisikawan asal Prancis, yaitu Josep Fourier (1768-1830). Transformasi Fourier adalah alat untuk mengubah fungsi dari domain waktu atau spasial ke domain frekuensi. Di dalam pengolahan citra, transformasi Fourier digunakan untuk menganalisis frekuensi pada operasi seperti perekaman citra, perbaikan kualitas citra, restorasi citra, pengkodean, dan lain-lain. Salah satu hasil terpenting dalam transformasi Fourier adalah prinsip ketidakpastian (*urcentainty principle*).

Prinsip ketidakpastian Heisenberg diusulkan pertama kali oleh Werner Heisenberg pada tahun 1927. Prinsip ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa "posisi dan momentum suatu partikel yang diukur dalam waktu yang bersamaan, tidak mungkin memperoleh hasil pengukuran dengan tingkat ketelitian sempurna". Artinya, apabila dikaitkan dengan aktivitas dalam kehidupan sehari-hari, prinsip ini menjelaskan bahwa kita tidak akan memperoleh hasil yang maksimal, jika mengerjakan dua atau lebih pekerjaan dalam suatu waktu. Misalnya, jika pada saat yang bersamaan, seorang mahasiswa sedang mengajar mata kuliah di kelas sebagai asisten dosen dan mengerjakan tugas akhirnya, maka kedua pekerjaan tersebut tidak akan memperoleh hasil yang maksimal.

Banyak peneliti yang tertarik untuk mempelajari lebih jauh perkembangan dan mengkaji penelitian formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg. Ozawa (2005) telah memodifikasi prinsip ketidakpastian Heisenberg dengan cara melakukan peninjauan terhadap standar deviasi posisi $\sigma(x)$ dari operator kesalahan pengukuran posisi dan standar deviasi momentum $\sigma(p)$ dari operator gangguan pada momentum. Rahmah (2022) telah mengkaji formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier untuk fungsi pada ruang $L^2(\mathbb{R})$ dengan menggunakan rumus diskriminan pada persamaan kuadrat.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg dalam tranformasi Fourier, menyatakan bahwa “fungsi dari $f(t)$ dan transformasi Fouriernya dinyatakan dengan $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan. Jika $f(t)$ terkonsentrasi dalam interval waktu yang sempit, maka $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ tersebar pada $\mathbb{R}$ dan sebaliknya”. Artinya, semakin besar interval waktu suatu fungsi $f(t)$, maka akan semakin kecil interval frekuensi transformasi Fouriernya $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$, atau secara grafis semakin lebar kurva $f(t)$, maka akan semakin sempit kurva $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$. Demikian pula sebaliknya.

Berdasarkan penjabaran di atas, dapat disimpulkan bahwa penelitian mengenai prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier sangat bermanfaat dalam perkembangan analisis sinyal, sehingga penulis tertarik untuk mengkaji pengembangan formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier dari bentuk formulasi yang telah dikaji oleh Rahmah (2022). Melalui penelitian ini, penulis akan melakukan modifikasi bentuk formulasi menggunakan metode pembuktian atau tahapan penurunan formulasi yang berbeda, yaitu dengan menggunakan teorema Plancherel, pertidaksamaan Cauchy-Schwarz, pertidaksamaan Hausdorff-Young, serta sifat bilangan kompleks dan transformasi Fourier. Selain itu, formulasi yang dihasilkan untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ akan diperluas dan dibuktikan untuk ruang $L^p(\mathbb{R})$. Hasil-hasil ini akan dituangkan dalam bentuk penelitian pada tugas akhir dengan judul ***“Variasi Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Fourier”***.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, yaitu bagaimana memberikan dan membuktikan variasi formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ dan $L^p(\mathbb{R})$.

1.3 Batasan Masalah

Masalah pada penelitian ini dibatasi pada prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ dan ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $1 < p \leq 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah untuk memberikan dan membuktikan variasi formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ dan $L^p(\mathbb{R})$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian tugas akhir ini adalah diharapkan dapat menambah pengetahuan dan pemahaman bagi penulis dan pembaca mengenai transformasi Fourier dan prinsip ketidakpastian Heisenberg, khususnya dapat membantu dalam memberikan peluang munculnya variasi lain prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier, serta dapat menjadi sumber referensi dalam pengembangan cabang ilmu analisis matematis bagi peneliti lain kedepannya.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari lima bab, dengan masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab. Rincian sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan secara singkat mengenai konsep dasar yang menunjang pembahasan masalah, seperti sifat-sifat bilangan kompleks, definisi, teorema dan sifat-sifat yang berkaitan dengan transformasi Fourier, serta formulasi umum prinsip ketidakpastian Heisenberg.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini mencakup jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan pembahasan dari diagram alur penelitian dan hasil yang diperoleh mengenai pembuktian secara detail variasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil dan pembahasan, serta saran untuk penelitian lain yang akan dikaji kedepannya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan disajikan *state of the art* sebagai referensi dalam penelitian ini dan beberapa definisi, teorema dan istilah-istilah sebagai teori pendukung atau dasar penulisan tugas akhir ini. Teori pendukung pada bab ini meliputi bilangan kompleks dan sifat-sifatnya, ruang Lebesgue, transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, serta prinsip ketidakpastian Heisenberg.

2.1 *State of the Art*

Prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah hasil fundamental dari transformasi Fourier. Prinsip ketidakpastian Heisenberg menjelaskan bagaimana sebuah fungsi berelasi dengan transformasi Fouriernya.

Pada tahun 2015, Masanao Ozawa meneliti tentang *Universal Uncertainty Principle in the Measurement Operator Formalism*. Penelitian ini memodifikasi prinsip ketidakpastian Heisenberg dari bentuk formulasi umum. Modifikasi prinsip tersebut diperoleh dengan cara melakukan peninjauan terhadap standar deviasi posisi $\sigma(x)$ dan standar deviasi momentum $\sigma(p)$. Selain itu, Ozawa juga memasukkan faktor tambahan, yaitu faktor kesalahan $\epsilon(x)$ dan faktor gangguan $\eta(p)$ yang dalam proses pengukuran, besaran keduanya akan selalu lebih besar atau sama dengan standar deviasi dari besaran itu sendiri. Berikut adalah formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg yang diajukan oleh Masanao Ozawa.

$$\sigma(x)\eta(p) \geq \frac{h}{2}$$

dengan $\sigma(x)\eta(p) = \epsilon(x)\eta(p) + \epsilon(x)\sigma(p) + \sigma(x)\eta(p)$.

Penlitian selanjutnya berjudul *Prinsip Ketidakpastian Heisenberg pada Transformasi Fourier* yang dilakukan oleh Sitti Rahmah pada tahun 2022. Penelitian ini membahas tentang bagaimana menyajikan dan membuktikan formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier dengan menggunakan rumus diskriminan pada persamaan kuadrat. Formulasi yang dihasilkan oleh Sitti Rahmah adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\,\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt\right)^2.$$

Formulasi yang dihasilkan terbatas pada $L^2(\mathbb{R})$ yaitu untuk $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Penelitian yang akan dilakukan penulis memiliki perbedaan pada cara atau tahapan pembuktian formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier, yaitu dengan menggunakan sifat transformasi Fourier, seperti turunan, teorema Parseval dan Plancherel, sifat bilangan kompleks, dan teorema pendukung lainnya yang akan disajikan pada tugas akhir ini. Selain itu, formulasi yang dihasilkan akan diperluas dan dibuktikan untuk ruang $L^p(\mathbb{R})$.

2.2 Bilangan Kompleks dan Sifat-sifatnya

Konsep bilangan kompleks muncul pada abad ke-16, yaitu ketika matematikawan dihadapkan pada masalah polinomial. Dalam proses penyelesaian masalah polinomial tersebut, ternyata terdapat penyelesaian akar-akar dari polinomial yang tidak terdefinisi dalam sistem bilangan real. Oleh karena itu, agar solusi atau penyelesaian yang berupa akar-akar polinomial terdefinisi, maka diperkenalkan sistem bilangan kompleks.

Definisi 2.1 (Bilangan Kompleks)
Misalkan z adalah bilangan kompleks yang dinyatakan dalam bentuk $(x + iy)$ dimana x dan y bilangan riil dan i dinamakan satuan khayal atau bilangan imajiner yang bersifat $i^2 = -1$ (Kadir, 2016).

Dalam bilangan kompleks $z = x + iy$, x dinamakan bagian riil dari z, dinyatakan dengan $\mathrm{Re}(z)$ dan y dinamakan bagian khayal atau imajiner, dinyatakan dengan $\mathrm{Im}(z)$, dengan $x = \mathrm{Re}(z)$ dan $y = \mathrm{Im}(z)$ merupakan bilangan riil.

Definisi 2.2 (Bilangan Kompleks Sekawan)
Misalkan bilangan kompleks $z = x + iy$, maka sekawan atau konjugat, yaitu kawan dari bilangan kompleks z didefinisikan sebagai $\bar{z} = x - iy$ (Kadir, 2016).

Konjugat dari konjugat bilangan kompleks z adalah z, ditulis $\bar{\bar{z}} = z$. Nilai mutlak atau modulus dari suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan riil non-negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$, ditulis

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1

Jika z, z_1, dan z_2 bilangan kompleks, dengan $z = x + iy$, maka berlaku:

1. $|z|^2 = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$ (2.2)
2. $|z| = |\bar{z}|$ (2.3)
3. $|z|^2 = z\bar{z}$ (2.4)
4. $\bar{\bar{z}} = z$ (2.5)
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (2.6)
6. $2\,\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}$ (2.7)
7. $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ (2.8)

(Kadir, 2016).

Bukti.

Misalkan $z = x + iy$, maka

1. $|z|^2 = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$

$$|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2.$$

2. $|z| = |\bar{z}|$.

   Misalkan $\bar{z} = x - iy$, maka

$$|\bar{z}| = \left(\sqrt{x^2 + (-y)^2}\right)^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

3. $|z|^2 = z\bar{z}$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z\bar{z}.$$

4. $\bar{\bar{z}} = z$

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| \\ &= |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= |z_1||z_2|. \end{aligned}$$

6. $2\,\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}$.

   Misalkan $\bar{z} = x - iy$, maka

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (x + iy) + (x - iy) \\ &= 2x \\ &= 2\,\mathrm{Re}(z). \end{aligned}$$

7. $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

   Diketahui $\mathrm{Re}(z) = x$ dan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

   Akan dibuktikan bahwa $\sqrt{x^2 + y^2} \geq x$.

   Perhatikan bahwa $y^2 \geq 0$. Maka,

   $x^2 + y^2 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| \geq x$.

   Sehingga,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq x = \mathrm{Re}(z).$$

2.3 Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Definisi 2.3 (Integral Tak Wajar)

Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a, \infty)$ dan $(-\infty, b]$. Maka didefiinisikan

1. $$\int_a^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2.9}$$

2. $$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2.10}$$

Jika limit di ruas kanan ada dan berhingga, dikatakan $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergen ke nilai limit (Wrede & Spiegel, 2002).

Definisi 2.4 (Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$)

Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai riil, maka ruang $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan p pada $\mathbb{R}$ $\left(L^p(\mathbb{R})\right)$, dengan $1 \leq p < \infty$, yaitu

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,dt < \infty \right\} \tag{2.11}$$

(Rudin, 1986).

Norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ atau $\|\cdot\|_p$ pada $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Definisi 2.5 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$)

Misalkan f fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty\right\} \tag{2.13}$$

(Gunawan, 2017).

Dari Persamaan (2.12), norma $\|\cdot\|_1$ pada $L^1(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt. \tag{2.14}$$

Contoh 2.1

Misalkan $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-2, 2] \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan integralnya ada.

Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.13), diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt &= \int_{-\infty}^{-2} |f(t)| \, dt + \int_{-2}^{2} |f(t)| \, dt + \int_{2}^{\infty} |f(t)| \, dt \\ &= \int_{-2}^{2} 2 \, dt \\ &= 8 < \infty.\end{aligned}$$

Jadi, $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2.2

Misalkan $f(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan integralnya ada.

Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.13), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{0} |f(t)|\, dt + \int_{0}^{\infty} |f(t)|\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left|e^{-|t|}\right| dt + \int_{0}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right| dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(-t)}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{t}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-t}\, dt \\
&= 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2.3

Misalkan $f(t) = e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$.

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan integralnya ada.

Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.13), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{0} |f(t)|\, dt + \int_{0}^{\infty} |f(t)|\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} |e^{-t}|\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-t}\, dt \\
&= 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $f(t) \in L^1([0, \infty))$.

Definisi 2.6 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$)

Misalkan f fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}. \tag{2.15}$$

(Gunawan, 2017).

Dari Persamaan (2.12), norma $\|\cdot\|_2$ pada $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan *inner product*, $(.,.)$, dengan aturan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka didefinisikan

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \overline{g(t)} dt. \tag{2.17}$$

Dan normanya dinyatakan dengan

$$\|f\|_2^2 = (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt. \tag{2.18}$$

Contoh 2.4

Misalkan $f(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan integralnya ada.

Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.15), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-|t|}\right)^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-2(-t)} \, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \, dt
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt.$$

Jika dimisalkan $2t = p$, maka diperoleh $dt = \frac{dp}{2}$, dengan batas untuk $t \to -\infty$, maka $p \to -\infty$, untuk $t \to 0$, maka $p \to 0$, dan untuk $t \to \infty$, maka $p \to \infty$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{p}\, dp + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-p}\, dp \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{p}\, dp + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-p}\, dp\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{a\to-\infty}[e^{p}]_{a}^{0} - \lim_{b\to\infty}[e^{-p}]_{0}^{b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 \\
&= 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Contoh 2.5

Misalkan $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \in [2, \infty) \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$

Akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan integralnya ada.

Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.15), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt &= \int_{-\infty}^{2} |f(t)|^2\, dt + \int_{2}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \\
&= \int_{2}^{\infty} \left|\frac{1}{t}\right|^2 dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b} \frac{1}{t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

2.4 Transformasi Fourier

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menjumpai sinyal, baik disadari maupun tidak disadari. Contoh sinyal yang sering kita jumpai meskipun tidak terlihat secara visual adalah sinyal suara yang kita hasilkan, deyak jantung, ponsel, televisi, dan citra digital.

Dalam situasi dimana sinyal masih dalam domain waktu, pemrosesan yang dapat dilakukan terbatas. Namun, ketika sinyal diubah menjadi domain frekuensi, pemrosesan sinyal menjadi lebih efektif dan efisien. Sebagai contoh, misalkan kita akan menghilangkan suara bising atau *noise* pada rekaman audio. Dengan mengubah sinyal menjadi domain frekuensi, kita dapat menghilangkan frekuensi tertentu yang merupakan *noise*, sehingga menghasilkan rekaman audio yang lebih jernih.

Transformasi Fourier adalah transformasi integral yang mengubah suatu sinyal dari domain waktu (*space domain*) menjadi domain frekuensi (*frequency domain*). Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal.

Teorema 2.2 (Fubini)

Jika f *kontinu pada segiempat* $\mathbb{R} = [a,b] \times [c,d]$, *maka*

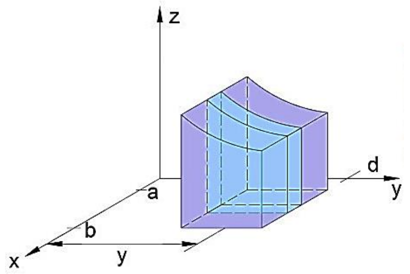
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \qquad (2.19)$$

(Dawkins, 2022).

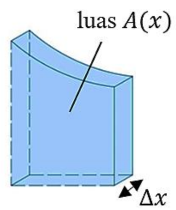
Misalkan $f(x,y) \geq 0$ sehingga kita dapat menafsirkan integral lipat dua sebagai volume V dari benda pejal di bawah permukaan, yaitu

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Jika kita menghitung volume benda pejal dengan mengiris benda pejal menjadi kepingan-kepingan sejajar terhadap bidang yz, maka luas permukaan kepingan bergantung pada seberapa jauh kepingan dari bidang yz atau bergantung pada x dan dinyatakan dengan $A(x)$.



Irisan dengan bidang $\boldsymbol{x}$ = konstan
(a)



Volume $\Delta \boldsymbol{V}$ dari kepingan
secara aproksimasi $\approx A(x)\Delta x$
(b)

Gambar 2.1 Interpretasi geometri benda pejal terhadap bidang yz

Dengan menggunakan prosedur tiga langkah yaitu iris, aproksimasi, integralkan, maka

$$V = \int_a^b A(x)\, dx,$$

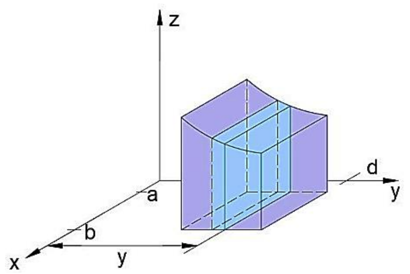
dengan

$$A(x) = \int_c^d f(x,y) dy,$$

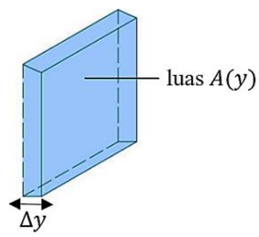
sehingga

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx.$$

Selanjutnya, jika kita menghitung volume benda pejal dengan mengiris benda pejal menjadi kepingan-kepingan sejajar terhadap bidang xz, maka luas permukaan kepingan bergantung pada seberapa jauh kepingan dari bidang xz atau bergantung pada y dan dinyatakan dengan $A(y)$.



Irisan dengan bidang $\boldsymbol{y}$ = konstan
(a)



Volume $\Delta \boldsymbol{V}$ dari kepingan
secara aproksimasi $\approx \boldsymbol{A(y)\Delta y}$
(b)

Gambar 2.2 Interpretasi geometri benda pejal terhadap bidang xz

Dengan menggunakan kembali prosedur tiga langkah yaitu iris, aproksimasi, integralkan, maka

$$V = \int_c^d A(y)\, dy,$$

dengan

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx,$$

sehingga

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\, dA = \int_c^d A(y)\, dy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\, dy\, dx.$$

Teorema Fubini sangat berguna untuk menguraikan integral dari perkalian dua fungsi. Misalkan $f(x,y) = g(x)\, h(y)$ kontinu pada segiempat $\mathbb{R} = [a,b] \times [c,d]$, maka

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \iint\limits_R g(x)h(y)\, dA = \int\limits_c^d \int\limits_a^b g(x)h(y)\, dx\, dy.$$

Perhatikan bahwa karena integral berulang di atas diintegralkan terhadap x terlebih dahulu, maka $h(y)$ yang merupakan fungsi dari variabel y dapat dianggap sebagai konstanta, sehingga

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \iint\limits_R g(x)h(y)\, dA = \int\limits_c^d h(y) \int\limits_a^b g(x)\, dx\, dy.$$

Selanjutnya, diketahui bahwa nilai integral tentu $\int_a^b g(x)\, dx$ adalah konstanta, maka diperoleh

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \iint\limits_R g(x)h(y)\, dA = \int\limits_a^b g(x)\, dx \int\limits_c^d h(y)\, dy.$$

Dengan demikian, jika kita dapat menguraikan sebuah fungsi $f(x,y)$ menjadi fungsi dari variabel x dikalikan fungsi dari variabel y, maka kita dapat menghitung masing-masing kedua integral tersebut kemudian mengalikan hasil integralnya.

Definisi 2.7 (Transformasi Fourier)

Misalkan fungsi $g \in L^1(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari g pada $-\infty < \omega < \infty$ didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \tag{2.20}$$

(Gunawan, 2017).

Transformasi Fourier $\mathcal{F}\{g\}(\omega)$ merupakan fungsi dalam domain frekuensi dan ω adalah frekuensi radial atau dapat ditulis $\omega = 2\pi f$. Frekuensi atau f adalah jumlah gelombang dalam waktu satu detik atau dapat ditulis $f = \frac{n}{t}$, dengan n merupakan banyaknya gelombang dan t merupakan waktu. Satu gelombang yaitu gabungan antara satu puncak dan satu lembah.

Dengan menggunakan rumus Euler, yaitu

$$(e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t) \tag{2.21}$$

Persamaan (2.20) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,(\cos\omega t - i\sin\omega t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin\omega t\,dt.\end{aligned}$$

Contoh 2.6

Diberikan fungsi $g \in L^1(\mathbb{R})$ berikut

$$g(t) = \begin{cases}\sin(2\pi t), & t \in [0,10] \\ 0, & \text{selainnya.}\end{cases}$$

Berdasarkan definisi transformasi Fourier (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} g(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{10} g(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{10}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{10} \sin(2\pi t)\,e^{-i\omega t}dt\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus Euler pada Persamaan (2.21), maka

$$e^{i2\pi t} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$
$$e^{-i2\pi t} = \cos(2\pi t) - i\sin(2\pi t),$$

diperoleh

$$e^{i2\pi t} - e^{-i2\pi t} = 2i\sin(2\pi t)$$
$$\sin(2\pi t) = \frac{e^{i2\pi t} - e^{-i2\pi t}}{2i}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g\}(\omega) &= \int_0^{10} \left(\frac{e^{i2\pi t} - e^{-i2\pi t}}{2i}\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_0^{10} e^{(i2\pi - i\omega)t} dt - \int_0^{10} e^{-(i2\pi + i\omega)t} dt\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\left[\frac{1}{(i2\pi - i\omega)} e^{(i2\pi - i\omega)t}\right]_0^{10} - \left[-\frac{1}{(i2\pi + i\omega)} e^{-(i2\pi + i\omega)t}\right]_0^{10}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(20\pi i - 10 i\omega)} - 1}{(i2\pi - i\omega)} + \frac{e^{-(20\pi i + 10 i\omega)} - 1}{(i2\pi + i\omega)}\right)
\end{aligned}$$

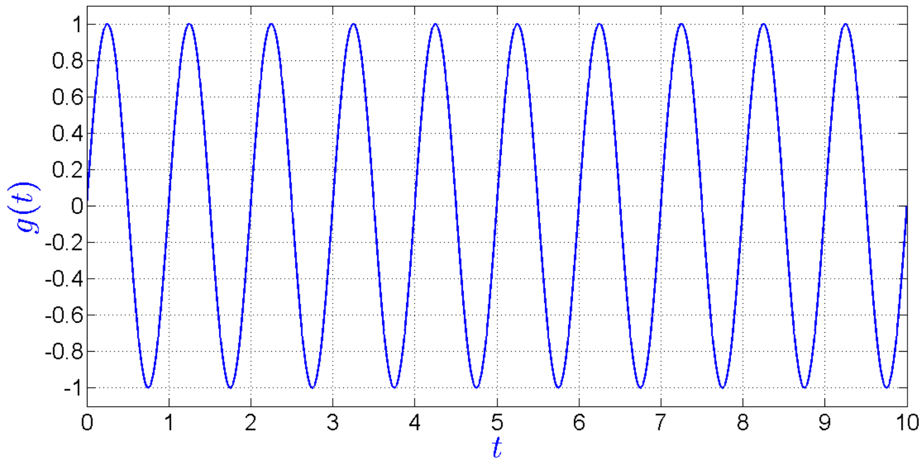
Dengan menggunakan rumus Euler pada Persamaan (2.21), maka

$$e^{20\pi i} = \cos(-20\pi) - i\sin(-20\pi) = \cos(20\pi) + i\sin(20\pi) = 1$$
$$e^{-20\pi i} = \cos(20\pi) - i\sin(20\pi) = 1,$$

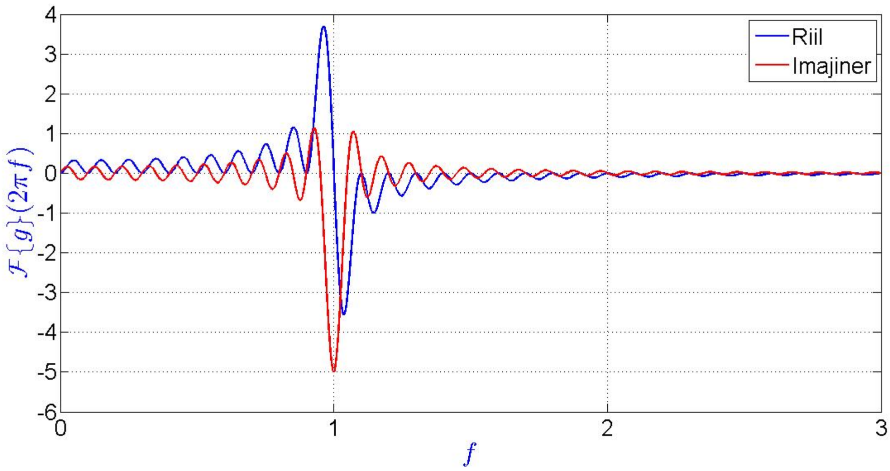
sehingga

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g\}(\omega) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-10i\omega} - 1}{(i2\pi - i\omega)} + \frac{e^{-10i\omega} - 1}{(i2\pi + i\omega)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{\left(e^{-10i\omega} - 1\right)(2\pi + \omega) + \left(e^{-10i\omega} - 1\right)(2\pi - \omega)}{(-4\pi^2 + \omega^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{2\pi i e^{-10i\omega} + i\omega e^{-10i\omega} - 2\pi i - i\omega + 2\pi i e^{-10i\omega} - i\omega e^{-10i\omega} - 2\pi i + i\omega}{(-4\pi^2 + \omega^2)}\right) \\
&= \frac{4\pi i\left(e^{-10i\omega} - 1\right)}{-2i(4\pi^2 - \omega^2)} \\
&= \frac{2\pi(1 - e^{-10i\omega})}{(4\pi^2 - \omega^2)}.
\end{aligned}$$

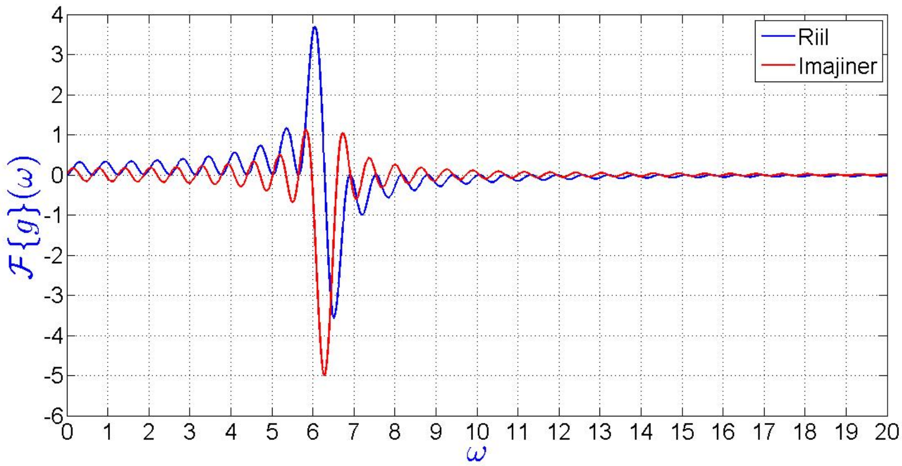
Jadi, $\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2\pi(1 - e^{-10i\omega})}{(4\pi^2 - \omega^2)}$.



Gambar 2.3 Grafik fungsi $g(t) = sin(2\pi t), t \in [0, 10]$



(a)



(b)

Gambar 2.4 Grafik transformasi Fourier $g(t) = sin(2\pi t), t \in [0, 10]$

Gambar 2.3 menunjukkan grafik fungsi $g(t) = \sin(2\pi t)$ dengan domain waktu t antara 0 sampai 10 detik mempunyai 10 gelombang. Jika menghitung secara manual dengan menggunakan rumus $f = \frac{n}{t} = \frac{10}{10}$, maka frekuensinya adalah 1 Hz atau frekuensi radialnya adalah $\omega = 2\pi f = 2\pi \approx 6{,}28$ rad/s.

Gambar 2.4 (a) dan (b) menunjukkan grafik fungsi $g(t) = \sin(2\pi t)$ dalam domain frekuensi (f) dan frekuensi radial (ω). Puncak atau amplitudo (jarak terjauh) pada pada Gambar 2.4 (a) menunjukkan nilai frekuensinya yaitu 1 Hz. Begitu pula pada Gambar 2.4 (b), puncak atau amplitudonya menunjukkan nilai frekuensi radial yang sesuai dengan nilai yang diperoleh apabila menghitung manual pada domain waktu, yaitu 6,28 rad/s.

Contoh 2.7

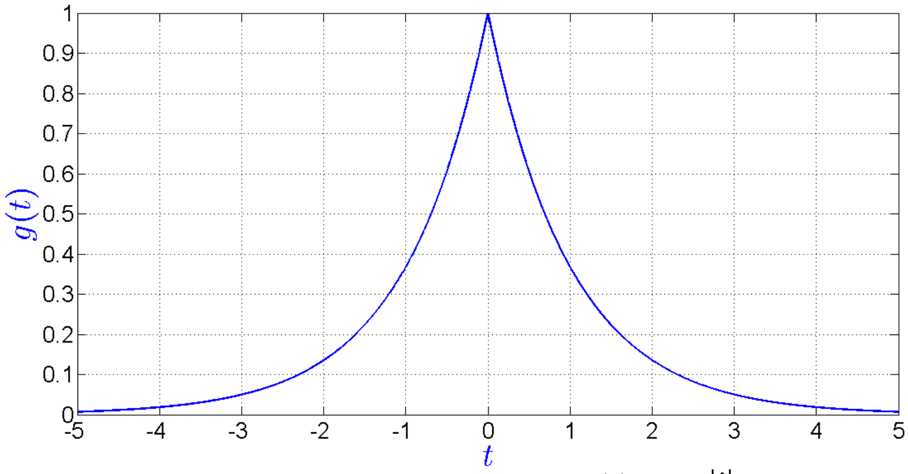
Diberikan fungsi $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ berikut

$$g(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}.$$

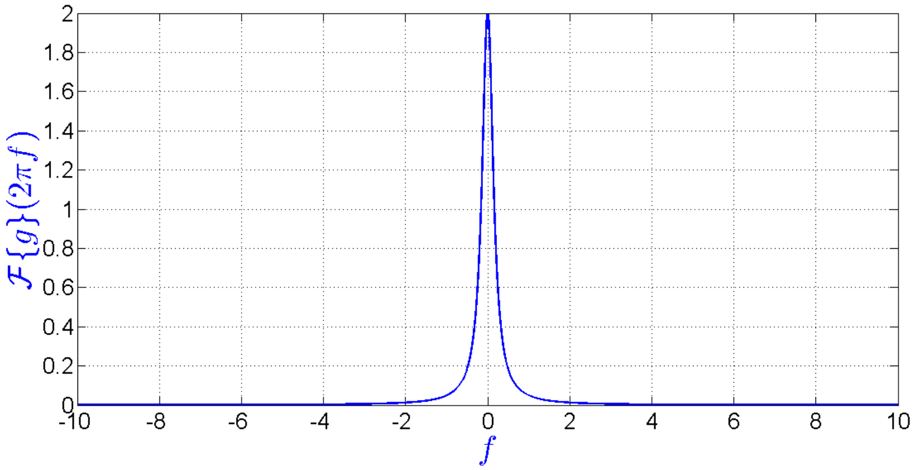
Berdasarkan definisi transformasi Fourier (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(-t)}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-(1+i\omega)t}\,dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{(1-i\omega)}e^{(1-i\omega)t}\right]_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)t}\right]_{0}^{b} \\
&= \frac{2}{(1+\omega^2)}.
\end{aligned}$$

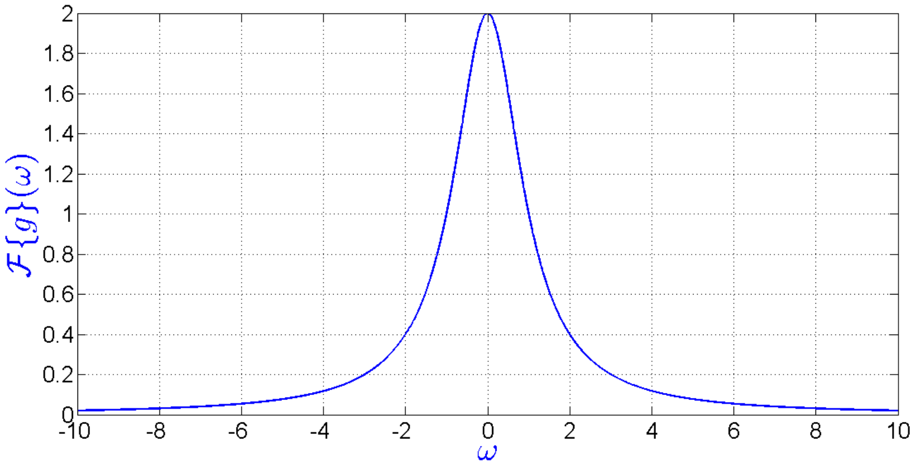
Jadi, $\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}$.



Gambar 2.5 Grafik fungsi $g(t) = e^{-|t|}$



(a)



(b)

Gambar 2.6 Grafik transformasi Fourier $g(t) = e^{-|t|}$

Gambar 2.5 menunjukkan grafik fungsi dalam domain waktu $g(t) = e^{-|t|}$ tidak membentuk 1 gelombang, sehingga fungsi tersebut mempunyai frekuensi

$f = 0$ Hz dan frekuensi radial $\omega = 0$ rad/s seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.6 (a) dan (b).

Sifat-sifat transformasi Fourier sebagai berikut.

a. Sifat Penjumlahan

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $\omega \in \mathbb{R}$ *maka*

$$\mathcal{F}\{f + g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.22}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f + g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + g(t))e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare \end{aligned}$$

b. Sifat Skala

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $f_k(t) = f(kt)$ *untuk setiap konstanta* $k \in \mathbb{R}$, *maka*

$$\mathcal{F}\{f_k\}(\omega) = \frac{1}{|k|}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{k}\right). \tag{2.23}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_k\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(kt)e^{-i\omega t}dt \end{aligned}$$

1) Untuk $k > 0$

Misalkan $u = kt$ maka $t = \frac{u}{k}$ dan $dt = \frac{du}{k}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_k\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega\left(\frac{u}{k}\right)}\frac{du}{k} \\ &= \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{i\omega u}{k}}du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

2) Untuk $k < 0$

Misalkan $u = -kt$ maka $t = -\frac{u}{k}$ dan $dt = -\frac{1}{k}du$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f_k\}(\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega\left(-\frac{u}{k}\right)}\frac{1}{k}du \\ &= -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{\frac{i\omega u}{k}}du \\ &= -\frac{1}{k}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{k}\right).\end{aligned}$$

Dari 1) dan 2) didapatkan

$$\mathcal{F}\{f_k\}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{k}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{k}\right), & k > 0 \\ -\frac{1}{k}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{k}\right), & k < 0 \end{cases}$$

sehingga

$$\mathcal{F}\{f_k\}(\omega) = \frac{1}{|k|}\mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{k}\right). \blacksquare$$

Sifat skala dari transformasi Fourier berarti kompresi atau ekspansi fungsi dalam domain waktu. Jika kita mengubah fungsi awal dalam domain waktu $f(t)$ menjadi $f(kt)$, maka akan terdapat dua kasus yaitu

1) Jika $k > 1$, maka fungsi $f(kt)$ dikompresi dari $f(t)$ dan setara dengan ekspansi dalam domain frekuensi.
2) Jika $k < 1$, maka fungsi $f(kt)$ diekspansi dari $f(t)$ dan setara dengan kompresi dalam domain frekuensi.

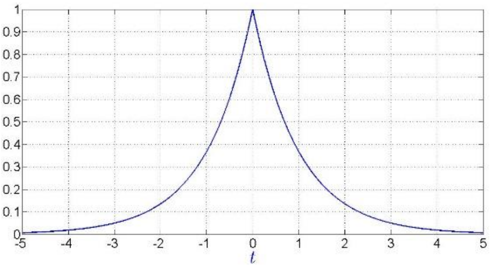
Contoh 2.8

Dari Contoh 2.7, diperoleh transformasi Fourier untuk $g(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$ adalah

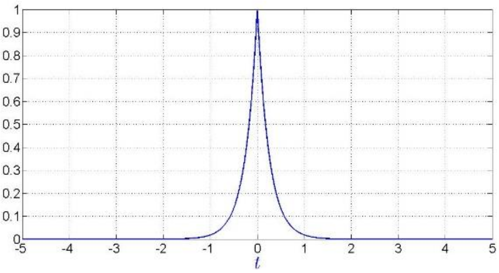
$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}.$$

Akan ditentukan transformasi Fourier untuk $g(4t) = e^{-|4t|}$ dengan menggunakan sifat skala transformasi Fourier. Berdasarkan sifat skala transformasi Fourier pada Persamaan (2.23) diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g_4\}(\omega) &= \frac{1}{|4|}\mathcal{F}\{g\}\left(\frac{\omega}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1+\left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right)}\\ &= \frac{1}{\left(2+\frac{\omega^2}{8}\right)}\\ &= \frac{8}{(16+\omega^2)}.\end{aligned}$$

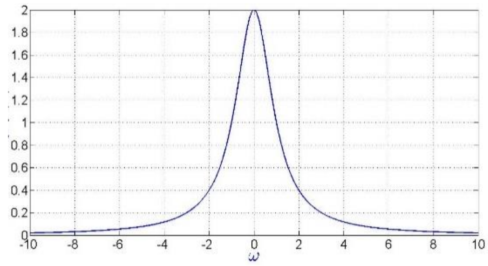


Grafik fungsi g$(t) = e^{-|t|}$
(sebelum penskalaan)
(a)

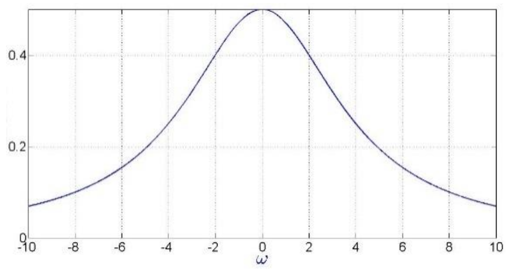


Grafik fungsi g$(4t) = e^{-|4t|}$
(setelah penskalaan $k = 4$)
(b)

Gambar 2.7 Grafik fungsi $g(t) = e^{-|t|}$ dan $g(4t) = e^{-|4t|}$



Grafik $\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}$
(sebelum penskalaan)
(a)



Grafik $\mathcal{F}\{g_4\}(\omega) = \frac{8}{(16+\omega^2)}$
(setelah penskalaan $k = 4$)
(b)

Gambar 2.8 Grafik transformasi Fourier $g(t) = e^{-|t|}$ dan $g(4t) = e^{-|4t|}$

Dari Contoh 2.8, diketahui bahwa fungsi $g(t)$ diubah menjadi $g(4t)$, sehingga $k = 4$. Karena $k > 1$, maka pada domain waktu, $g(t)$ dikompresi (dipersempit) menjadi $g(4t)$. Sedangkan pada domain frekuensi, $\mathcal{F}\{g\}(\omega)$ diekspansi (diperluas) menjadi $\mathcal{F}\{g_4\}(\omega)$. Hal ini bisa dilihat pada Gambar 2.7 dan 2.8.

c. Sifat Linier

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.24}$$

dimana, α, β adalah konstanta bilangan real.

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare
\end{aligned}$$

d. Sifat Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_k f(t) = f(t-k)$, maka

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.25}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\tau_k f(t)\big)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{-i\omega t}dt.
\end{aligned}$$

Misalkan $u = t - k$ maka $t = u + k$ dan $dt = du$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+k)}du \\
&= e^{-i\omega k} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du \\
&= e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \blacksquare
\end{aligned}$$

Contoh 2.9

Dari Contoh 2.7, diperoleh transformasi Fourier untuk $g(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$ adalah

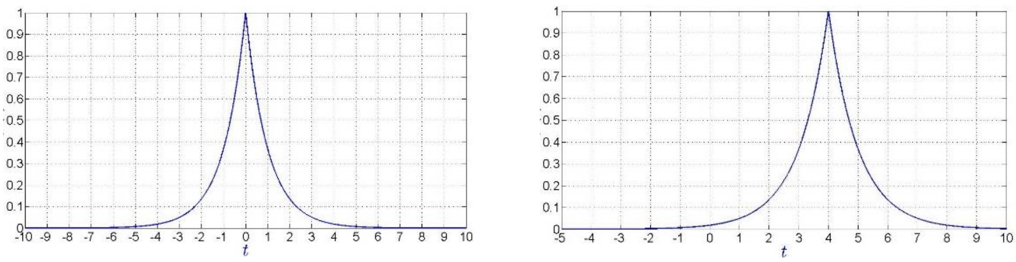
$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}.$$

Akan ditentukan transformasi Fourier untuk $g(t-4) = e^{-|t-4|}$ dengan menggunakan sifat translasi transformasi Fourier. Berdasarkan sifat translasi transformasi Fourier pada Persamaan (2.25) diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tau_4 g\}(\omega) &= e^{-4i\omega}\mathcal{F}\{g\}(\omega)\\ &= e^{-4i\omega}\frac{2}{(1+\omega^2)}\\ &= \frac{2e^{-4i\omega}}{(1+\omega^2)}.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus Euler pada Persamaan (2.21), maka

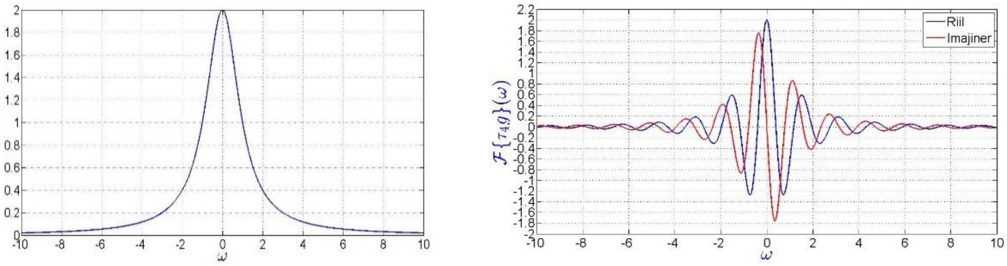
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tau_4 g\}(\omega) &= \frac{2}{(1+\omega^2)}(\cos 4\omega - i\sin 4\omega)\\ &= \frac{2}{(1+\omega^2)}\cos 4\omega - i\frac{2}{(1+\omega^2)}\sin 4\omega.\end{aligned}$$



Grafik fungsi $g(t) = e^{-|t|}$ (sebelum ditranslasi) (a)

Grafik fungsi $g(t-4) = e^{-|t-4|}$ (setelah ditranslasi $k = 4$) (b)

Gambar 2.9 Grafik fungsi $g(t) = e^{-|t|}$ dan $g(t-4) = e^{-|t-4|}$



Grafik $\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}$
(sebelum ditranslasi)
(a)

Grafik $\mathcal{F}\{\tau_4 g\}(\omega) = \frac{2e^{-4i\omega}}{(1+\omega^2)}$
(setelah ditranslasi $k = 4$)
(b)

Gambar 2.10 Grafik transformasi Fourier $g(t) = e^{-|t|}$ dan $g(t-4) = e^{-|t-4|}$

Pada Gambar 2.9 ditunjukkan bahwa dalam domain waktu, fungsi $g(t)$ diubah menjadi $g(t-4)$ dengan pergeseran waktu 4 detik, sehingga menyebabkan perbedaan nilai t ketika nilai amplitudonya 1. Sebelum digeser, amplitudonya bernilai 1 ketika $t = 0$, sedangkan setelah digeser, amplitudonya bernilai 1 ketika $t = 4$. Selain itu, pergeseran waktu pada Gambar 2.9, ekivalen dengan perkalian transformasi Fouriernya dengan $e^{-4i\omega} = \cos 4\omega - i \sin 4\omega$ sehingga menghasilkan grafik yang berbentuk osilasi.

e. Sifat Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$, *maka*

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\,. \tag{2.26}$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt \\
&= \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \blacksquare
\end{aligned}$$

Contoh 2.10

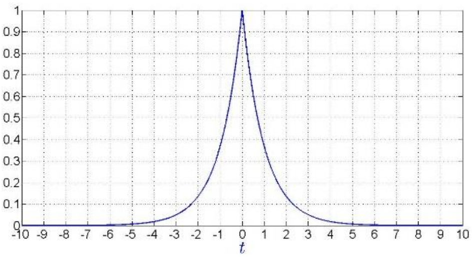
Dari Contoh 2.7, diperoleh transformasi Fourier untuk $g(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$ adalah

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}.$$

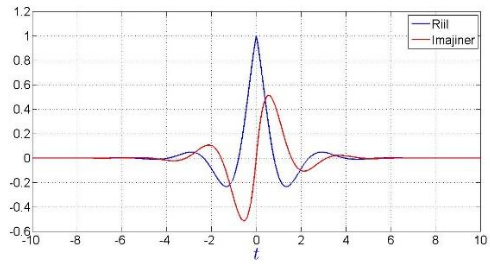
Akan ditentukan transformasi Fourier untuk $e^{2it}e^{-|t|}$ dengan menggunakan sifat modulasi transformasi Fourier.

Diketahui $\mathbb{M}_2 g(t) = e^{2it}g(t)$, sehingga $\omega_0 = 2$. Berdasarkan sifat modulasi transformasi Fourier pada Persamaan (2.26) diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathbb{M}_2 g\}(\omega) &= \mathcal{F}\{g\}(\omega - 2)\\ &= \frac{2}{(1+(\omega-2)^2)}\\ &= \frac{2}{(5-4\omega+\omega^2)}.\end{aligned}$$

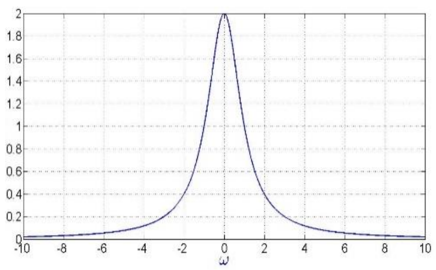


Grafik fungsi $\mathrm{g}(t) = e^{-|t|}$
(sebelum dimodulasi)
(a)

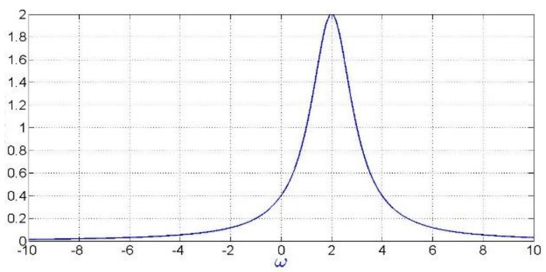


Grafik fungsi $\mathbb{M}_2 g(t) = e^{2it}e^{-|t|}$
(setelah dimodulasi $\omega_0 = 2$)
(b)

Gambar 2.11 Grafik fungsi $\boldsymbol{g(t) = e^{-|t|}}$ dan $\boldsymbol{\mathbb{M}_2 g(t) = e^{2it}e^{-|t|}}$



Grafik $\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)}$
(sebelum dimodulasi)
(a)



Grafik $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_2 g\}(\omega) = \frac{2}{(5-4\omega+\omega^2)}$
(setelah dimodulasi $\omega_0 = 2$)
(b)

Gambar 2.12 Grafik transformasi Fourier $\boldsymbol{g(t) = e^{-|t|}}$ dan $\boldsymbol{\mathbb{M}_2 g(t) = e^{2it}e^{-|t|}}$

Sifat modulasi dari transformasi Fourier menyatakan bahwa pergeseran frekuensi sebesar ω_0 dalam domain frekuensi ekivalen dengan mengalikan fungsi dalam domain waktu dengan $e^{i\omega_0 t}$. Jika fungsi $g(t) = e^{-|t|}$ dikalikan dengan e^{2it} menjadi $\mathbb{M}_2 g(t) = e^{2it}e^{-|t|}$, maka ekivalen dengan pergeseran frekuensi radial domain frekuensi sebesar 2 rad/s, sehingga transformasi Fourier $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_2 g\}(\omega) = \frac{2}{(5-4\omega+\omega^2)}$.

f. Sifat Translasi dan Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t-k)$ *maka*

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\right\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega-\omega_0). \qquad (2.27)$$

Bukti. Berdasarkan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t-k) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt
\end{aligned}$$

Misalkan $u = t - k$ maka $t = u + k$ dan $dt = du$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega-\omega_0)(u+k)} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u + i\omega_0 u - i\omega k + i\omega_0 k} du \\
&= e^{-i(\omega-\omega_0)k} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega-\omega_0)u} du \\
&= e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega-\omega_0). \blacksquare
\end{aligned}$$

2.5 Invers Transformasi Fourier

Definisi 2.8 (Invers Transformasi Fourier)

Misalkan fungsi $f, \mathcal{F}\{f\}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, *maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}(\omega)](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.28}$$

(Gunawan, 2017).

2.6 Transformasi Fourier dari Turunan

Teorema 2.3

Jika $f \in L^2(\mathbb{R})$, *maka diperoleh*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f\}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

Bukti. Dengan menggunakan induksi matematika akan dibuktikan Teorema 2.3

Langkah pertama

Untuk $n = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df}{dt}\right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-t}^{t} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) - i\omega e^{-i\omega t} dt \\
&= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,
\end{aligned}$$

dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20), diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(\omega) = i\omega \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Langkah kedua

Untuk $n = k$, yaitu misalkan $\mathcal{F}\left\{\frac{d^k f}{dt^k}\right\}(\omega) = -i\omega^k \mathcal{F}\{f\}(\omega)$ adalah benar.

Langkah ketiga

Akan ditunjukkan bahwa $n = k + 1$ benar.

Dengan menggunakan turunan $\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)$, diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}}\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k f}{dt^k}\right)\right\}(\omega),$$

Selanjutnya, dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20), diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}}\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k f}{dt^k}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \left(\frac{d^k f}{dt^k}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^k f}{dt^k}\right) e^{-i\omega t} dt,\end{aligned}$$

dengan menggunakan kembali definisi transformasi Fourier pada Persamaan (2.20), maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}}\right\}(\omega) &= (i\omega)\mathcal{F}\left\{\frac{d^k f}{dt^k}\right\}(\omega) \\ &= (i\omega)(i\omega^k)\mathcal{F}\{f\}(\omega) \\ &= (i\omega)^{k+1}\mathcal{F}\{f\}(\omega).\end{aligned}$$

2.7 Formula Parseval dan Plancherel

Pada subbab ini disajikan teorema Parseval dan Plancherel yang akan digunakan untuk membuktikan hasil utama pada tugas akhir.

Teorema 2.4 (Formula Parseval dan Plancherel)

Jika $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka diperoleh

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\{f\}, \mathcal{F}\{g\}). \tag{2.30}$$

Khususnya, jika $g = f$, maka

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}\{f\}\|_2^2. \tag{2.31}$$

Bukti. Dengan menggunakan *inner product* $L^2(\mathbb{R})$ pada Persamaan (2.17) dan invers transformasi Fourier pada Persamaan (2.28), diperoleh

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right) \overline{g(t)} dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{\iota\omega t}d\omega\right)\overline{g(t)}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{\iota\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}dt\right)d\omega,$$

dimana pada baris terakhir Persamaan di atas, kita menggunakan teorema Fubini untuk menukar posisi integral, sehingga

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-\iota\omega t}dt\right)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\,\overline{\mathcal{F}\{g\}(\omega)}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\{f\},\mathcal{F}\{g\}).$$

Khususnya, jika $g = f$, diperoleh

$$(f,f) = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\{f\},\mathcal{F}\{f\})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}\{f\}\|_2^2.$$

2.8 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Werner Heisenberg (1927) mengemukakan bahwa posisi dan momentum suatu partikel tidak dapat ditentukan dengan pasti dalam waktu yang bersamaan. Semakin akurat penentuan momentum, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya. Begitu pun sebaliknya, semakin akurat penentuan posisinya, maka semakin tidak akurat penentuan momentumnya

Momentum adalah kuantitas fisika yang menunjukkan seberapa sulit mengubah keadaan gerakan suatu benda. Hal ini berkaitan dengan massa benda dan kecepatannya. Semakin besar nilai momentum suatu benda, semakin sulit untuk mengubah kecepatan atau menghentikan gerakannya.

Berikut merupakan persamaan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg secara umum

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{h}{4\pi}. \tag{2.32}$$

Persamaan (2.32) menyatakan bahwa hasil kali ketidakpastian posisi suatu benda yang dinotasikan Δx dan ketidakpastian komponen momentum dalam arah x yang dinotasikan Δp akan lebih besar atau sama dengan $h/_{4\pi}$ dimana h adalah konstanta Planck. Ketidakpastian tersebut bukan disebabkan oleh ketidaktelitian percobaan atau alat ukur, tetapi ketidakpastian tersebut merupakan sifat alamiah dari objek-objek di alam semesta. Sebagai contoh, kita dapat menentukan momentum dari sebuah mobil yang bergerak, dengan mengalikan massa mobil dan kecepatannya (rumus momentum), tetapi kita tidak dapat menentukan dengan pasti posisi dari mobil. Sebaliknya, kita dapat menentukan posisi mobil dengan pasti saat mobil tersebut tidak bergerak (diam), tetapi kita tidak dapat menentukan momentumnya.

Menurut definisi, partikel ada di satu tempat pada suatu waktu. Sedangkan gelombang menyebar pada ruang, seperti riak yang bergerak pada permukaan kolam. Apabila kita mempunyai gelombang, maka kita bisa menentukan momentumnya, tetapi kita tidak bisa menentukan posisinya. Begitu pula sebaliknya, apabila kita mengetahui posisi partikel, tetapi partikel tersebut tidak bergerak atau tidak mempunyai gelombang, maka momentumnya tidak dapat ditentukan dengan pasti.

Jika gelombang terus digabungkan, maka akan membentuk sebuah paket gelombang yang terlokalisasi pada wilayah tertentu. Prinsip pada paket gelombang yaitu seolah-olah kita meletakkan gelombang ke dalam sebuah paket untuk tidak menyebar ke segala arah. Partikel pada paket gelombang bisa berada di mana saja. Jika diatur supaya Δx partikel kecil dengan membuat paket gelombang yang lebih kecil, maka kita perlu menambah gelombang dalam paket untuk mengurangi bentuk osilasinya (daerah bergelombang), yang artinya Δp akan menjadi besar. Sebaliknya, jika Δp direduksi dengan suatu cara tertentu, maka paket gelombangnya akan melebar dan Δx menjadi besar.

Persamaan umum prinsip ketidakpastian Heisenberg dapat dimodifikasi menjadi prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier, yang mana Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier. Perumusan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier menjelaskan tentang "fungsi dari $f(t)$ dan transformasi Fourier yang dinyatakan dengan $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ tidak mungkin terlokalisasi dengan baik secara bersamaan. Jika

$f(t)$ terkonsentrasi dalam interval waktu yang sempit, maka $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ tersebar pada $\mathbb{R}$ dan sebaliknya". Artinya, semakin besar suatu nilai fungsi $f(t)$, maka akan semakin kecil nilai $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ apabila kedua hal tersebut ditentukan secara bersamaan. Begitu pun sebaliknya.